

全国奥数总领队担纲 金牌教练倾力打造

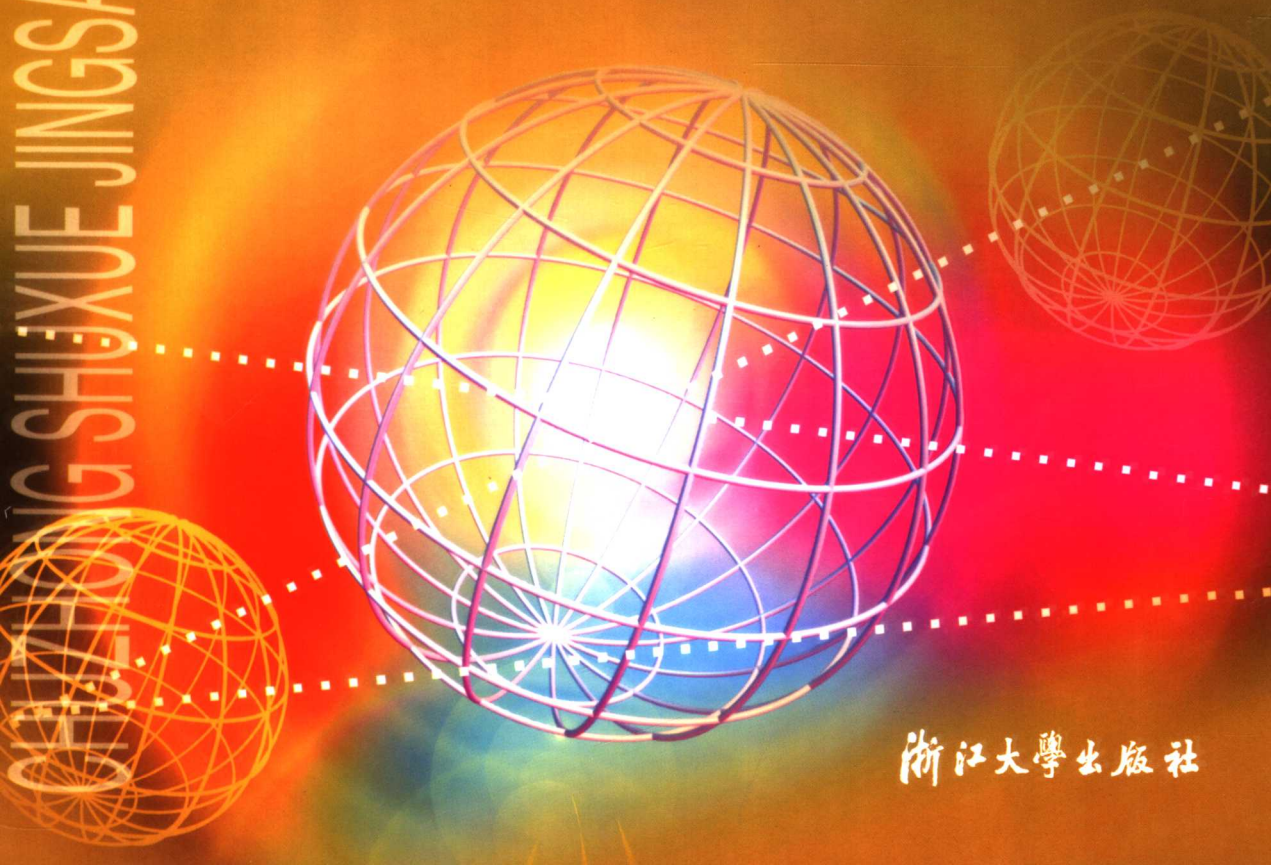
初中数学竞赛培**优**教程

(全真模拟)

李胜宏 马茂年 主编

浙江大学出版社

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI PEIYOU JIAOCHENG



初中数学竞赛培优教程

(全真模拟)

李胜宏 马茂年 主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛培优教程. 全真模拟 / 李胜宏, 马茂年
主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2004. 1
ISBN 7-308-03571-9

I. 初... II. ①李... ②马... III. 数学课—初中—
教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 115030 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

责任编辑 杨晓鸣 王同裕

排版 浙江大学出版社电脑排版中心

印刷 浙江遂昌印业有限公司

开本 787mm × 960mm 1/16

印张 12.5

字数 300 千字

版印次 2004 年 1 月第 1 版 2006 年 2 月第 7 次印刷

印数 39001 - 43000

书号 ISBN 7 - 308 - 03571 - 9/G · 671

定价 15.00 元

前 言

近年来,在数学奥林匹克竞赛(IMO)中,我国选手频频取得优异成绩,在国内外产生了极大反响。数学奥林匹克吸引着越来越多的师生参加,全国各种层次的数学竞赛活动已空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要,我国编写了这套初中数学竞赛培优教程丛书,包括基础知识、专题讲座和全真模拟三种。

本套丛书就是为了提高学生数学能力,为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助材料。其主要优点:一是“竞赛”,二是“同步”。所谓“竞赛”是指内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性,并特别注重创新能力的培养;所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度基本一致,使用时可删减或选用部分内容,也可提前或错后讲解使用。

本丛书博采众长,匠心独具,有的放矢,注重实效,值得学生认真读,认真用,认真练。

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来,加强理解和驾驭知识能力的考查,正是中考、高考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路,丛书则把这条思路具体化为一条清晰的分析训练思路,这样的编写指导思想是产生精品的保障。

仔细品味,这套丛书还具有以下几个突出的特点:

第一、知识体例新

首先是赛题目标和知识编排新,本丛书以最新教改精神为依据,以现行初中新课标为蓝本编写;其次是对赛题体例编排新,紧扣教材和初中数学竞赛大纲,步步推进、设题解题、释疑解难、迁移延伸、逐层深入;再次是题型(材料)新,书中选用题型(材料)都是按中考、竞赛要求精心设计的,令读者耳目一新。

第二、解题方法细

首先是对赛题讲解细致入微;其次是重点、难点详细讲析,既有解题过程又有思路点拨;再次是解题方法细,一题多解,多题一法变通训练,总结规

律;最后从基本知识入手,能力训练序列化。

第三、内容讲解精

首先是对竞赛内容讲解精,真正体现围绕重点,突破难点,引发思考,启迪思维,根据赛点要求,巧设问题,精讲精练,使学生举一反三,触类旁通;其次是练习配置精,注重典型性,避免随意性,注重迁移性,避免孤立性,实现由知识到能力的过渡。

第四、大纲研究透

首先是对竞赛大纲研究透彻,居高临下把握知识,立足于教材,又不拘泥于教材;其次是对学生知识储备研究得透,学习目标科学可行,注重知识“点”与“面”的联系,“教”与“学”的联系;再次是对问题讲解透彻,一题多问,一题多解,培养求异思维和创新思维能力。

第五、课外知识全

首先是知识分布全面,真正体现了“一套在手,学习内容全有”的编写指导思想;其次是该丛书的信息量大,涵盖了初中数学全部课程和教与学的全部过程,内容丰富,题量充足,融入各种新颖题型,补充了各类具有知识性和人文性的课外知识;再次是适用对象全面,着眼于全国重点、普通中学的所有初中学生,内容由浅入深,由易到难。

只有适合的,才是最好的,您的关注是我们的期盼,您的满意是我们的欣慰。尽管我们在成书过程中,本着近乎苛刻的态度,题题推敲,层层把关,力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华,但丛书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的惟一标准是广大师生使用本丛书的实践,作为教研领域的最新成果,我们期盼它的社会效益,也诚挚地希望广大师生的批评指正。

数学竞赛虽然有一定难度,但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的,也许本丛书会给你摘取金牌作好铺垫。让我们共同努力,在数学的奇妙天地中去体味数学,学习数学,开垦数学。

本书由全国数学奥林匹克竞赛总领队李胜宏教授和金牌教练马茂年主编。

目 录

初中数学竞赛模拟试题一	(1)	参考答案(75)
初中数学竞赛模拟试题二	(3)	参考答案(79)
初中数学竞赛模拟试题三	(5)	参考答案(82)
初中数学竞赛模拟试题四	(6)	参考答案(85)
初中数学竞赛模拟试题五	(8)	参考答案(88)
初中数学竞赛模拟试题六	(10)	参考答案(91)
初中数学竞赛模拟试题七	(12)	参考答案(93)
初中数学竞赛模拟试题八	(14)	参考答案(96)
初中数学竞赛模拟试题九	(15)	参考答案(99)
初中数学竞赛模拟试题十	(17)	参考答案(101)
初中数学竞赛模拟试题十一	(19)	参考答案(104)
初中数学竞赛模拟试题十二	(21)	参考答案(107)
初中数学竞赛模拟试题十三	(22)	参考答案(110)
初中数学竞赛模拟试题十四	(23)	参考答案(112)
初中数学竞赛模拟试题十五	(26)	参考答案(115)
初中数学竞赛模拟试题十六	(28)	参考答案(118)
初中数学竞赛模拟试题十七	(29)	参考答案(120)
初中数学竞赛模拟试题十八	(31)	参考答案(123)
初中数学竞赛模拟试题十九	(33)	参考答案(125)
初中数学竞赛模拟试题二十	(35)	参考答案(127)
初中数学竞赛模拟试题二十一	(37)	参考答案(130)
初中数学竞赛模拟试题二十二	(38)	参考答案(133)
初中数学竞赛模拟试题二十三	(40)	参考答案(136)
初中数学竞赛模拟试题二十四	(41)	参考答案(139)
初中数学竞赛模拟试题二十五	(43)	参考答案(142)
初中数学竞赛模拟试题二十六	(45)	参考答案(145)

初中数学竞赛模拟试题二十七	(47)	参考答案(149)
初中数学竞赛模拟试题二十八	(48)	参考答案(151)
初中数学竞赛模拟试题二十九	(50)	参考答案(154)
初中数学竞赛模拟试题三十	(52)	参考答案(157)
初中数学竞赛模拟试题三十一	(53)	参考答案(159)
初中数学竞赛模拟试题三十二	(55)	参考答案(163)
初中数学竞赛模拟试题三十三	(57)	参考答案(165)
初中数学竞赛模拟试题三十四	(58)	参考答案(168)
初中数学竞赛模拟试题三十五	(60)	参考答案(172)
初中数学竞赛模拟试题三十六	(61)	参考答案(175)
初中数学竞赛模拟试题三十七	(63)	参考答案(177)
初中数学竞赛模拟试题三十八	(65)	参考答案(180)
初中数学竞赛模拟试题三十九	(67)	参考答案(183)
初中数学竞赛模拟试题四十	(69)	参考答案(186)
初中数学竞赛模拟试题四十一	(71)	参考答案(189)
初中数学竞赛模拟试题四十二	(72)	参考答案(192)

初中数学竞赛模拟试题一

一、选择题(每小题 6 分,共 30 分)

1. 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 等于()

- A. $\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{5}$ D. 无法确定

2. 如图 1-1, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, O 为 AC 与 BD 的交点, E 在 AO 上, 且 $AE = OC$, F 在 BO 上, 且 $BF = OD$. 则 $\triangle AFC$ 的面积 S_1 与 $\triangle BED$ 的面积 S_2 的关系为()

- A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 = S_2$
C. $S_1 < S_2$ D. 不能确定

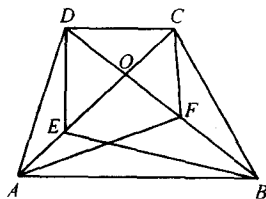


图 1-1

3. 一个商人用 m 元(m 为自然数)买来了 n 台(n 为质数)电视机, 其中有 2 台用成本的一半价钱卖给了某个慈善机构, 其余的电视机在商店出售, 每台盈利 500 元, 结果该商人获得利润为 5500 元, 则 n 的最小值是()

- A. 11 B. 13 C. 17 D. 19

4. 如果 m, n 为正实数, 方程 $x^2 + mx + 2n = 0$ 和方程 $x^2 + 2nx + m = 0$ 都有实数根, 那么 $m + n$ 的最小值是()

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

5. 如图 1-2, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 C, E , CB 是 $\odot O_1$ 的直径, 过 B 作 $\odot O_1$ 的切线交 CE 的延长线于 A , AFD 是割线, 交 $\odot O_2$ 于 F, D , $BC = FD = 2$, $CE = \sqrt{3}$, 则 AF 的长为()

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}+1}{3}$
C. $\frac{\sqrt{21}+3}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}-3}{3}$

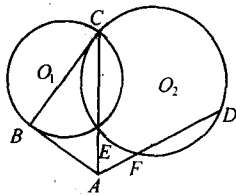


图 1-2

二、填空题(每小题 6 分,共 30 分)

6. 方程 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7}$ 的所有正整数解为_____.

7. 如图 1-3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD = DC = 1$, $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$, BC, AD 的延长线交于点 P , 则 $AB \cdot S_{\triangle PAB}$ 的最小值为_____.

8. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a, b, c 均为整数, 且 $a > b > c$, $a + b + c = 20$, 则 $\angle A$

$+ \angle C =$ _____.

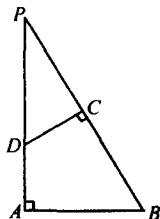


图 1-3

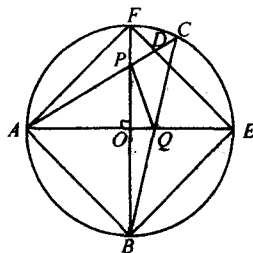


图 1-4

9. 如图 1-4, 在半径为 1 的 $\odot O$ 中, 引两条互相垂直的直径 AE 和 BF , 在 EF 上取点 C , 弦 AC 交 BF 于 P , 弦 CB 交 AE 于 Q , 则四边形 $APQB$ 的面积为 _____.
10. 如图 1-5 所示, 在一条笔直的公路上有 7 个村庄, 其中 A, B, C, D, E, F 离城市的距离分别为 4, 10, 15, 17, 19, 20 km, 而村庄 G 正好是 AF 的中点. 现要在某个村庄建一个活动中心, 使各村到活动中心的路程之和最短, 则活动中心应建在 _____ 处.

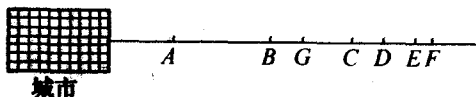


图 1-5

三、解答题(每小题 15 分, 共 60 分)

11. 设实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$,
- (1) 求 $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) + 1$ 的最大值与最小值;
 - (2) 求 $\frac{x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2}$ 的最大值与最小值.
12. 设 n 是大于 3 的整数, 且 $2^n = 10a + b$, a, b 是正整数, $b < 10$.
- (1) 求证: ab 是 6 的倍数;
 - (2) 试求最大的整数 m 使 $m \mid ab$.
13. 如图 1-6, AB 是 $\odot O$ 的一条弦, 向两端分别延长 AB 至 P 和 Q . 过 P, Q 分别作 $\odot O$ 的两切线切 $\odot O$ 于 M, N , 连 MN .
- (1) 若 $PA = QB$, 求证: MN 平分 AB ;
 - (2) 若 MN 平分 AB , 求证: $PA = QB$.

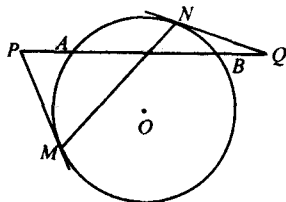


图 1-6

14. 观察按下列规则排成的一列数:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{6}, \dots (*)$$

(1) 在(*)中, 从左起第 m 个数记为 $F(m)$, 当 $F(m) = \frac{2}{2001}$ 时, 求 m 的值和这 m 个数的积.

(2) 在(*)中, 未经约分且分母为 2 的数记为 c , 它后面的一个数记为 d , 是否存在这样的两个数 c 和 d , 使 $cd = 2001000$, 如果存在, 求出 c 和 d ; 如果不存在, 请说明理由.

初中数学竞赛模拟试题二

一、选择题(每小题 6 分, 共 30 分)

1. 下列四个式子中与 $(a-3)\sqrt{\frac{1}{3-a}}$ 相等的是()

- A. $\sqrt{a-3}$ B. $-\sqrt{a-3}$ C. $\sqrt{3-a}$ D. $-\sqrt{3-a}$

2. 若 $\frac{x}{x-1} = \frac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$, 那么 x 等于()

- A. y^2+2y-1 B. y^2+2y-2 C. y^2+2y+1 D. y^2+2y+2

3. 周长为有理数的等腰三角形, 其底边上的高是底边的 $\frac{1}{2}$, 则腰与底边上的高()

- A. 都是有理数 B. 都不是有理数
C. 腰是有理数, 底边上的高不是有理数
D. 腰不是有理数, 底边上的高是有理数

4. 如图 2-1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ABC = 40^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 延长 BD 至 E , 使 $DE = AD$, 则 $\angle ECA$ 的度数为()

- A. 30° B. 35°
C. 40° D. 45°

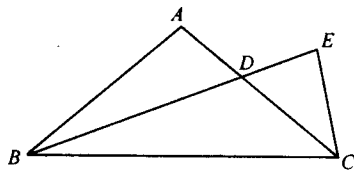


图 2-1

5. 在平面上具有整数坐标的点称为整点. 若有一线段的端点分别为 $(2, 11)$, $(11, 14)$, 则在此线段上(包括端点)的整点共有()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

二、填空题(每小题 6 分,共 30 分)

6. 设 $\frac{x}{x^2+x+1} = a$ ($a \neq 0$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$), 则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为_____.
7. 半径为 R 的 $\odot O$ 中, 弦 $AB = R$, 弦 $CD = \sqrt{3}R$. 若 $AB \parallel CD$, 则 AB 和 CD 的距离是_____.
8. 若实数 x, y 满足 $2x^2 + y^2 = 6x$, 则 $x^2 + y^2 + 2x$ 的最大值为_____.
9. 如图 2-2, A, B, C, D 四点在同一圆周上, 且 $BC = CD = 4$, $AE = 6$, 线段 BE 和 DE 的长都是正整数, 则 BD 的长等于_____.
10. 在密码学中, 称直接可以看到的内容为明码, 对明码进行某种处理后得到的内容为密码. 对于英文, 人们将 26 个字母按顺序分别对应整数 0 到 25. 现有 4 个字母构成的密码单词, 记 4 个字母对应的数字分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 已知整数 $x_1 + 2x_2, 3x_2, x_3 + 2x_4, 3x_4$ 除以 26 的余数分别为 9, 16, 23, 12. 则密码的单词是_____.

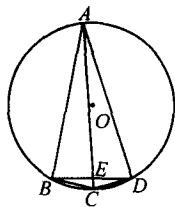


图 2-2

三、解答题(每小题 15 分,共 60 分)

11. 关于 x 的方程 $(m-8)x^2 - 2(m-4)x - (m+2) = 0$ 至少有一个负根, 求 m 的取值范围.
12. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, $AD:DC = 2:1$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$. 求证: AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.
13. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像和 x 轴、 y 轴都只有一个交点, 分别为 P, Q , $PQ = 2\sqrt{2}$, $b + 2ac = 0$, 一次函数 $y = x + m$ 的图像过 P 点, 并和二次函数的图像交于另一点 R , 求 $\triangle PQR$ 的面积.
14. 从甲站到乙站共有 800km, 开始 400km 是平路, 接着 300km 是上坡路, 余下的是下坡路, 已知火车在上坡路、平路、下坡路上的速度的比是 3:4:5.
 - (1) 若火车在平路上的速度是 80km/h, 那么它从甲站到乙站所用的时间比从乙站到甲站所用的时间多多少小时?
 - (2) 若要求火车来回所用的时间相同, 那么火车从甲站到乙站在平路上的速度与乙站到甲站在平路上的速度的比是多少?

初中数学竞赛模拟试题三

一、选择题(每小题6分,共30分)

1. 若 $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 则 $\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} - \sqrt[3]{x^4 - x^2}$ 的值为()
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的对称轴是 $x = 2$, 且当 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \pi, x_3 = 0$ 时, y 的对应值分别是 y_1, y_2, y_3 , 那么 y_1, y_2, y_3 的大小关系是()
 A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 > y_2 > y_3$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_2 > y_1 > y_3$
3. 已知 x, y, z 都是实数, 且 $x^2 - yz - 8x + 7 = 0, y^2 + z^2 + yz - 6x + 6 = 0$, 那么 x 的取值范围是()
 A. $-\infty < x \leq -1$ B. $-1 \leq x \leq 1$
 C. $1 \leq x \leq 9$ D. $9 \leq x < +\infty$
4. 已知 AB 是半圆的直径, BC 切半圆于 B 点, $BC = AB/2 = r, AC$ 交半圆于 D 点, $DE \perp AB$ 于 E , 则 DE 的长为()
 A. $\frac{3}{5}r$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}r$ D. $\frac{4}{5}r$
5. 若抛物线 $y = x^2 - (k-1)x - k + 1$ 与 x 轴的两个交点及其顶点构成等边三角形, 则满足条件的 k 的值的个数为()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题(每小题6分,共30分)

6. 观察图 3-1 中的各图形, 根据图(a), (b), (c) 的规律, 图(d)中三角形的个数为

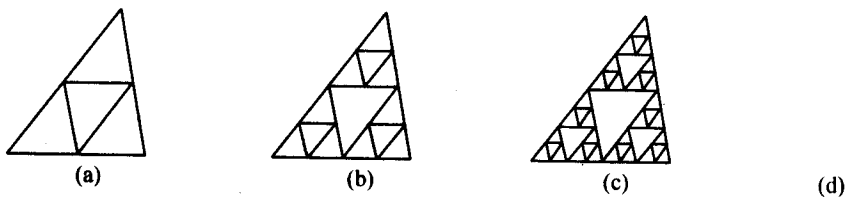


图 3-1

7. 已知 $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, 则 y 的最小值为_____.
8. 如图 3-2 所示, 已知电线杆 AB 直立于地面上, 它的影子恰好照在土坡的坡面

CD 和地面 BC 上. 如果 CD 与地面成 45° , $\angle A = 60^\circ$, $CD = 4\text{m}$, $BC = (4\sqrt{6} - 2\sqrt{2})\text{m}$, 则电线杆 AB 的长为 _____ m . (精确到 0.1m)

9. 如图 3-3, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, CE 是 $\angle BCD$ 的平分线, $CE \perp AD$, $DE = 2AE$, CE 把梯形分成两块, 面积分别为 S_1 和 S_2 . 若 $S_1 = 1$, 则 $S_2 =$ _____.

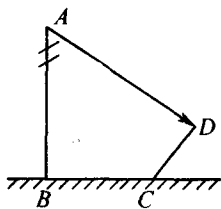


图 3-2

10. 一个圆内有 2001 个点, 其中任何三点都不共线, 把这个圆分成 667 块, 使每块恰含有三个点. 若每块中三点满足任两点间的距离皆为整数, 且不超过 9, 则以每块中的三点为顶点作三角形, 这些三角形中全等三角形的个数最少有 _____ 个.

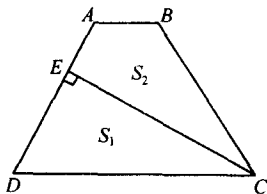


图 3-3

三、解答题 (每小题 15 分, 共 60 分)

11. 若函数 $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ ($0 \leq x \leq 2$) 的最小值为 3, 求 a 的值.
12. 如图 3-4, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle A$ 的一个外角的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E 点, 过 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F . 求证: $AF = \frac{AB - AC}{2}$.
13. 已知 a, b, c 都是正整数, 且抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有两个不同的交点 A, B , 若 A, B 到原点的距离都小于 1, 求 $a + b + c$ 的最小值.

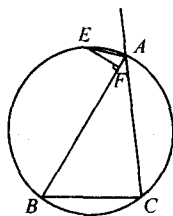


图 3-4

14. 1 与 0 交替排列, 组成下面的一串数
101, 10101, 1010101, 101010101, ……

请你回答, 在这串数中有多少个质数? 并请证明你的论断.

初中数学竞赛模拟试题四

一、选择题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 若 $a + b = 4$, $a^3 + b^3 = 28$, 则 $a^2 + b^2$ 的值是 ()
A. 8 B. 10 C. 12 D. 14
2. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 顶角 $\angle BAC = 100^\circ$, 延长 AB 到 D , 使 $AD = BC$, 则 $\angle BCD =$ ()
A. 10° B. 15° C. 20° D. 30°
3. 已知 x, y, z 均为实数, $x > 0, y > 0$, 且 $a = \frac{(y-z)^2}{x} - \frac{(x-z)^2}{y}$, $b = x - y$, 则下

面的结论中必定成立的是()

A. 若 $x < y$, 则 $a \geq b$

B. $a \leq b$

C. $a \geq b$

D. 若 $x < y$, 则 $a < b$

4. 以下命题中:

① $\sqrt{0.31}$ 是最简根式;

② 把 $x^3 + x^2 - 4$ 分解因式的最后结果为 $(x+2) \cdot (x^2 + x - 2)$;

③ 设 $a + b = 1$, 则 $a^3 + b^3 + 3ab = 1$;

④ 将 $\frac{ab}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$ 分母有理化后, 结果为 $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a - b}$. 正确命题的个数是()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 如图 4-1, 若 $ABCD$ 是 2×2 的正方形, E 是 AB 的中点, F 是 BC 的中点, AF 与 DE 相交于 I , BD 和 AF 相交于 H , 那么四边形 $BEIH$ 的面积是()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{7}{15}$

D. $\frac{8}{15}$

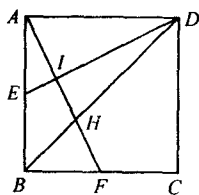


图 4-1

二、填空题(每小题 6 分, 共 30 分)

6. 若正数 m, n 满足 $m + 4\sqrt{mn} - 2\sqrt{m} - 4\sqrt{n} + 4n = 3$,

则 $\frac{\sqrt{m} + 2\sqrt{n}}{\sqrt{m} + 2\sqrt{n} + 3} =$ _____.

7. 若方程 $x^2 - 17x + 17k - 1 = 0$ 至少有一个正整数根, 则所有正整数 k 的和等于 _____.

8. AB 是 $\odot O$ 的一条弦, P 是 $\odot O$ 外一点, PB 切 $\odot O$ 于 B , PA 交 $\odot O$ 于 C , 且 $AC = BC$, $PD \perp AB$ 于 D , E 是 AB 的中点, $DE = 1000$, 则 $PB =$ _____.

9. 一堆有红、白两种颜色的球各若干个, 已知白球的个数比红球少, 但白球个数的 2 倍比红球多, 若把每一个白球都记作“2”, 每一个红球都记作“3”, 则总数为 60, 那么, 白球有 _____ 个, 红球有 _____ 个.

10. 已知:

$$\text{商品利润率} = \frac{\text{商品出售价} - \text{商品成本价}}{\text{商品成本价}} \times 100\%$$

某商人经营甲、乙两种商品, 每件甲种商品的利润率为 40%, 每件乙种商品的利润率为 60%. 当售出的乙种商品的件数比售出的甲种商品的件数多 50% 时, 这个商人得到的总利润率为 50%, 那么当售出甲、乙两种商品的件数相等时, 这个商人得到的总利润率是 _____.

三、解答题(每小题 15 分,共 60 分)

- 求使关于 x 的方程 $(a+1)x^2 - (a^2+1)x + 2a^3 - 6 = 0$ 有整数根的所有整数 a .
- 已知抛物线 $y = x^2 + px + q$ 上有一点 $M(x_0, y_0)$ 位于 x 轴下方.
 - 求证:此抛物线与 x 轴交于两点;
 - 设此抛物线与 x 轴的交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < x_2$. 求证: $x_1 < x_0 < x_2$.
- 如图 4-2, 直线上按顺序有四个点 A, B, C, D , 且 $AB:BC:CD = 2:1:3$, 分别以 AC, BD 为直径作 $\odot O_1, \odot O_2$, 两圆交于 E, F , 求 $ED:EA$ 的值.
- 如果一个自然数各位数字之和与各位数字之积的和恰好等于这个自然数, 我们称它为“幸运数”, 试求出所有“幸运数”的和.

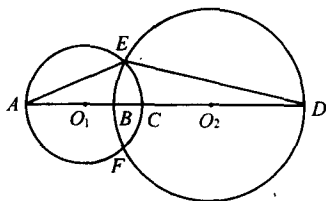


图 4-2

初中数学竞赛模拟试题五

一、选择题(每小题 6 分,共 30 分)

- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $AB = 12$, 则 $\triangle ABC$ 的面积等于()
A. 16 B. 18 C. 8 D. 10

- 如图 5-1, A 是半径为 1 的圆 O 外的一点, $OA = 2$, AB 是圆 O 的切线, B 是切点, 弦 $BC \parallel OA$, 连结 AC , 则阴影部分的面积等于()

- A. $\frac{2\pi}{9}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

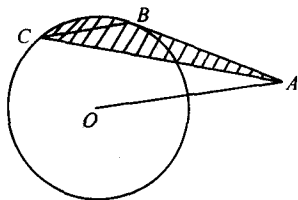


图 5-1

- 如果方程 $(x-1)(x^2 - 2x + m) = 0$ 的三根可以作为一个三角形的三边之长, 那么实数 m 的取值范围是()
A. $0 \leq m \leq 1$ B. $m \geq \frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4} < m \leq 1$ D. $\frac{3}{4} \leq m \leq 1$
- 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a-b+c}$, 则 $\triangle ABC$ 一定是()
A. 等边三角形 B. 以 a 为底的等腰三角形
C. 以 c 为底的等腰三角形 D. 非以上结论

5. 如果 20 个点将某圆周 20 等分, 那么顶点只能在这 20 个点中选取的正多边形的个数有 ()

A. 4 个 B. 8 个 C. 12 个 D. 24 个

二、填空题(每小题 6 分, 共 30 分)

6. 正数 a, b, c 满足 $\begin{cases} a+b+c=10, \\ a^2+b^2=c^2, \end{cases}$ 则 ab 的最大值为 _____.

7. 一个半径为 1cm 的圆, 在边长为 6cm 的正六边形内任意挪动(圆可以与正六边形的边相切), 则圆在正六边形内不能达到的部分的面积为 _____ cm^2 .

8. 已知 $\frac{a^2-9x^2+6xy-y^2}{(a+3x)^2-(ay+3xy)} = 1 (x \neq 0)$, 则

$$\frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

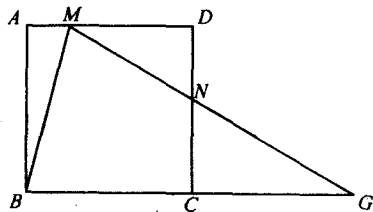


图 5-2

9. 如图 5-2, 在正方形 $ABCD$ 中, N 在 CD 边上, 使 $NC = 2ND$. 若 M 是 AD 边上异于 D 的一点, 使得 $\angle NMB = \angle MBC$, 则 $\tan \angle ABM =$ _____.

10. 设计一把直角尺 ABC , BC 在地面上, AB 与地面垂直, 并且 $AB = 10\text{cm}$. 移动一个半径不小于 10cm 的圆形轮子, 使轮子紧靠 A 点, 且与 BC 相切于 D 点(如图 5-3). 设计要求在 D 点处的刻度恰好显示这个轮子的半径(以厘米为单位). 那么, 当 BC 的长度为 1m 时, BC 上可以标出的最大刻度是 _____.

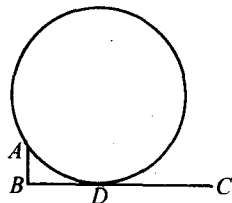


图 5-3

三、解答题(每小题 20 分, 共 60 分)

11. 实数 a, b, c 满足 $(a+c)(a+b+c) < 0$, 求证: $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

12. 如图 5-4, 甲楼楼高 16m , 乙楼坐落在甲楼的正北面. 已知当地冬至中午 12 时太阳光线与水平面的夹角为 30° . 此时, 求:

- (1) 如果两楼相距 20m , 那么甲楼的影子落在乙楼上有多高?
(2) 如果甲楼的影子刚好不落在乙楼上, 那么两楼的距离应当是多少?

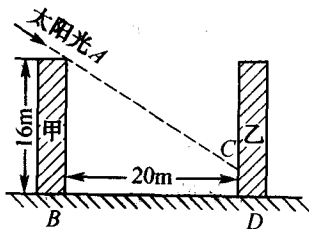


图 5-4

13. 如图 5-5, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于 M , 它们的两条外公切线的夹角为 60° , 连心线与 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 分别交于 A, B (异于 M 点), 过 B 作直线交 $\odot O_1$ 于 C, D 两

点,

求 $\cot \angle BAC \cdot \cot \angle BAD$ 的值.

14. 已知 $x^2 - (2k+1)x + m = 0$ 的两根 p 与 q 为质数,

且 $\frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{6k+1}{3k}$, 求整数 k 的值.

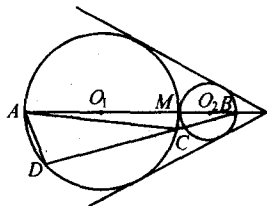


图 5-5

初中数学竞赛模拟试题六

一、选择题(每小题 6 分,共 30 分)

1. 计算 $\frac{1}{1-\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$ 的值是()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

2. $\triangle ABC$ 的周长是 24, M 是 AB 的中点, $MC = MA = 5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是()

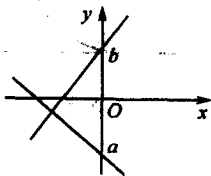
A. 12

B. 16

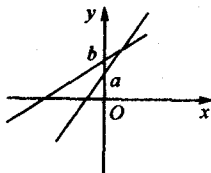
C. 24

D. 30

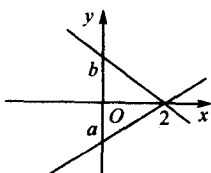
3. 设 $b > a$, 将一次函数 $y = bx + a$ 与 $y = ax + b$ 的图像画在平面直角坐标系内, 则有一组 a, b 的取值, 使得下列 4 个图中正确的是()



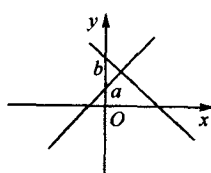
A



B



C



D

4. 如图 6-1, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 998$, $DC = 1001$, $AD = 1999$, 点 P 在线段 AD 上, 则满足条件 $\angle BPC = 90^\circ$ 的点 P 的个数为()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 不小于 3 的整数

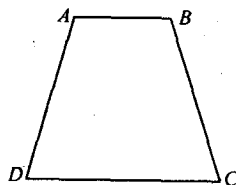


图 6-1

5. 某城市按以下规定收取每月煤气费: 用煤气如果不超过 60 立方米, 按每立方米 0.8 元收费; 如果超过 60 立方米, 超过部分按每立方米 1.2 元收费, 已知某用户 4 月份的煤气费平均每立方米 0.88 元, 那么, 4 月份这用户应交煤气费()

A. 60 元

B. 66 元

C. 75 元

D. 78 元