数学精品库

SHUXUE JINGPIN KU

数学竞赛题的背景

SHUXUE JINGSAITI DE BEIJING

作者 王志雄
汪启泰

民主与建设出版社

数 学 精 品 库

数学竞赛题的背景

王志雄
汪启泰 著

民主与建设出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛题的背景/王志雄,汪启泰著.
—北京:民主与建设出版社,1996.11
(数学精品库)

ISBN 7-80112-066-3

Ⅰ.数…

Ⅱ.①王…
②汪…

Ⅲ.数学课-中学-课外读物

Ⅳ.G634.604

责任编辑:闵　杰

民主与建设出版社出版发行
(社址:北京朝外大街吉祥里208号　邮编:100020)
北京佳顺印刷厂印刷
开本:787×1092　1/32　印张:5.125
2001年1月第3次印刷
字数:109千字　印数:13001-23000　定价:8.00元

《初等数学精品库》编委会

作 者 介 绍

王志雄，1945年8月生于福建泉州。1968年北京大学数学力学系本科毕业，1981年厦门大学数学系研究生毕业，获理学硕士学位。现任国立华侨大学管理信息科学系教授，兼任中国数学奥林匹克高级教练、福建省组合数学委员会副主任、中国民主建国会福建省委会委员、泉州市委会副主委等学术、社会职务多项。在国内外发表学术论文30余篇，曾获福建省应用数学委员会优秀论文奖。5篇论文被美国、德国出版的国际性刊物评论、摘录。出版著作《数学奥林匹克36计》、译作《数论的三颗明珠》等6本，百余万字。参加与主持四项国家及福建省自然科学基金会的研究项目。名列国际数学联盟编辑的《世界数学家名录》，传记收入《中国当代自然科学人物总传》等多本辞书。

汪启泰，1945年9月生于福建泉州。1967年毕业于福建师范大学数学系。现在泉州三中任教数学课程，中学高级教师。兼任泉州市鲤城区数学会理事。发表论文《一类根式函数的值域》、《调整法与最值》等多篇。

前　　言

数学竞赛，为了保证其公正性、客观性，要求试题有新意。使用成题为命题之一大忌。因而，随着竞赛活动的蓬勃开展，命题的积极性得到了很大的调动，初数研究的潜力受到了很大的激发。

然而，命题不是命题者闭门造车、冥思苦想的结果。试题，无论命题者如何独具匠心，表现出不同程度的创造性，都是由来有自，有其深刻的背景。

数学是一个有机联系的整体。有人认为“奥林匹克数学”越来越独立，既不同于初等数学，也不同于高等数学。但是，我们不能不感到，“奥林匹克数学”与初等数学、高等数学的关系越来越密切，它以高等数学思想为灵魂，以初等数学知识为载体，使三者成水乳交融的和谐状态。

实际上，当代的任何数学都不可能是无本之木、无源之水。

数学大师对数学有不朽的建树，凭借的是他们有独到的数学思想方法。这些思想方法，在初等数学知识能够承受的前提下，或隐或显地大量地渗透到竞赛中。综观一百年来大量的竞赛试题，不难发现这一点。

本书通过归类整理，揭示一些试题的背景，展现它们的思想渊源，提供给读者一个与大师们进行“思想交流”的机会。在使读者的“奥林匹克数学”水平再提高一个层次方面，但愿它

能起到一块垫脚石的作用。本书还介绍了不少与竞赛题有关的，至今尚未获解决的数学问题。有兴趣的读者可就这些问题一试身手，“欲与大师试比高”。

“一个人如果要在数学上有所进步，他必须向大师们学习，而不应向徒弟们学习。”〔阿贝尔(Abel，1802—1829)语〕

目　　录

一 法兰西皇帝拿破仑"返魂"命题

【试题】

题 1 在任意给定的三角形的每边上向外作顶角为 120° 的等腰三角形，构成一个六边形。证明：连结这些等腰三角形中不属于原三角形顶点的顶点，成一等边三角形。

（美国，1956）

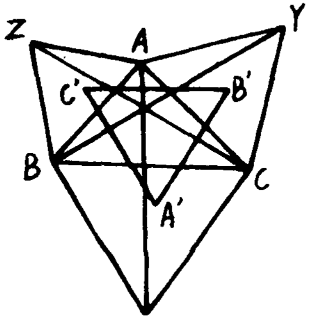
题 2 如（图 1），设 A'、B'、C' 分别是正三角形 XBC、YCA、ZAB 的重心，求证：

(1) $AX = BY = CZ$，

(2) $B'C' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AX$，

(3) $\triangle A'B'C'$ 为正三角形。

（南京，1978）



（图 1）

题 3 给定一个圆周，要求只用圆规（不许用直尺），把这圆周四等分。（上海，1956）

【背景】

题 1 与题 2 的实质是一样的。题 2 中的正 $\triangle A'B'C'$ 称为外拿破仑(Napoleon, Bonaparte, 1769 — 1821)三角形。

若从任意三角形 ABC 向内作正 $\triangle X'BC$、$Y'CA$ 与 $Z'AB$，这三个三角形的重心分别记为 A''、B''、C''，则 $\triangle A''B''C''$ 也是正三角形，称为内拿破仑三角形。

拿破仑三角形有不少趣味的性质，见本丛书的《数学宫趣游》与《平面几何思维训练》。

题 3 是拿破仑提出，向法国数学家征解的问题。解法见本丛书《数学宫趣游》。

二 数字魅力 竞赛趣题

【试题】

题 4 试证数列

49,4489,444889,44448889,…

中每一个数都是完全平方数。（莫斯科,1964）

题 5 证明 $N = \underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{22\cdots2}_{n+1个}$ 是完全平方数,并求 $\sqrt{N}$。

（苏联,奥尔德尼基茨市,3 届）

题 6 $P = \sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n 个} - \underbrace{22\cdots2}_{n 个}}$（$n$ 为自然数）,则

(A)P 为无理数,(B)$P = 11\cdots1$,(C)$P = 22\cdots2$,

(D)$P = 33\cdots3$, (E)$P = 77\cdots7$

答:〔　　〕(重庆,1983,初中)

题 7 若数字 $x(x \neq 0)$ 和 y,对任意的自然数 n,都使

$$\underbrace{x\cdots x}_{n个}6\underbrace{y\cdots y}_{n个}4$$

是一个完全平方数,求所有的 x 和 y。（全苏,8 届）

题 8 求所有这样的三位数,它等于它的数码的阶乘之和。（莫斯科,1940）

【背景】

题 4 至题 7 的原型是:求数字 a,b,x,y,使数列

$$\overline{ab},\overline{xayb},\overline{xxayyb},\cdots \tag{1}$$

中的每一项都是完全平方数。

定理:当且仅当存在整数 r、t,使得

$$9(10a+b)=(10r+t)^2$$

$$x=r^2$$

$$y=\frac{1}{10}(9b-t^2)$$

时,数列(1) 中每项均为完全平方数。

这样,类似这组题的例有:

$1\cdots102\cdots24=3\cdots32^2$

$1\cdots108\cdots89=3\cdots33^2$ (题 6)

$1\cdots115\cdots56=3\cdots34^2$

$1\cdots122\cdots25=3\cdots35^2$ (题 5)

$4\cdots422\cdots25=6\cdots65^2$

$4\cdots435\cdots56=6\cdots66^2$

$4\cdots448\cdots89=6\cdots67^2$ (题 4)

$4\cdots462\cdots24=6\cdots68^2$ (题 7)

$9\cdots940\cdots09=9\cdots97^2$

$9\cdots960\cdots04=9\cdots98^2$ (题 7)

$$\underbrace{9\cdots98}_{n\text{个}}\underbrace{0\cdots01}_{n\text{个}}=\underbrace{9\cdots99}_{n\text{个}}{}^2$$

题 8 源于这样的问题:求自然数 n,使得它等于它的数码的阶乘之和。

显然,若 n 是一位数,则 $n=1$ 或 2,即 $1!=1,2!=2$。

n 不能是两位数。

题 8 是考虑 n 为三位数的情况。存在唯一的 $n = 145$，即 $145 = 1! + 4! + 5!$。

可以证明 n 不能是四位数。

1964 年，中学生杜格赫蒂(R. S. Dougherty) 发现一个这样的五位数：$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$。

有没有其他的自然数 n?这是一个尚未解决的问题。

古希腊哲学家、数学家普洛克拉斯(Proclus，410－485)说："哪里有数，哪里就有美。"

数字的无穷魅力，能不断地使竞赛题对她倾心钟情。现举几例供参考：

(1) 考虑$\overline{ab\cdots l} = a^n + b^n + \cdots + l^n$，我们有：

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$，　$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$，

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$，　$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$，

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$，$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$，

…

$$4679307774 = 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10}。$$

(2) 考虑$\overline{ab\cdots l} = (a + b + \cdots + l)^n$，我们有：

$512 = (5 + 1 + 2)^3$，　$4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$，…

$19683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$，

$17210368 = (1 + 7 + 2 + 1 + 0 + 3 + 6 + 8)^5$，

$34012224 = (3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4)^6$，

$612220032 = (6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2)^7$，…

三 等式名不见经传 作试题源源不断

【试题】

题 9 计算 $\sqrt{31\times 30\times 29\times 28+1}$

（美国，1989，邀请赛）

题 10 已知 $P=\sqrt{1988\times 1989\times 1990\times 1991+1}-1989^2$，那么 P 的值是（ ）

(A) 1987 (B) 1988 (C) 1989 (D) 1990

（第一届希望杯，全国联赛初二）

题 11 计算 $\sqrt{1991\times 1992\times 1993\times 1994+1}-1992^2$

（天津，1991，初二）

题 12 试证：任意四个连续自然数的乘积与 1 的和的算术平方根是一个自然数。（上海，1962）

题 13 求证：四个连续的自然数之乘积不能表示成整数平方的形式。（匈牙利，1923）

题 14 设 $a+b+c=abc$，求证：

$$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)+c(1-a^2)(1-b^2)=4abc \quad (1)$$

（武汉，1957，1978）

题 15 已知 $\triangle ABC$ 的三内角的正切 $\mathrm{tg}A,\mathrm{tg}B,\mathrm{tg}C$ 满足：(1)$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=-\frac{1}{6}$，(2)$\mathrm{tg}^3A+\mathrm{tg}^3B+\mathrm{tg}^3C=-\frac{181}{216}$，求 A、B、C。（上海，1983）

题 16 设 $\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C$，求证：$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C)$

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C)$$

（武汉，1958）

题 17 设 x、y、$z\in Q$，$t^3=2$，$x+yt+zt^2\neq 0$，求证：存在 u、v、$\omega\in Q$，使得

$$(x+yt+zt^2)(u+vt+\omega t^2)=1$$

（伊比利亚美洲，3 届）

题 18 求证：任何整数都可以表示成五个整数的立方和的形式。（苏联，1977，大学生）

题 19 求证：存在无穷多个整数，它们不能写成三个整数的立方和的形式。（莫斯科，1959）

【背景】

题 9 至 13 源自恒等式：

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$。

题 14，15 源自下述定理：

若 α,β,γ 均非 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，当且仅当 $\alpha+\beta+\gamma$ 为 π 的整数倍时，等式

$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$ 成立。

题 16,17 源自恒等式：

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\end{aligned}\tag{2}$$

题 18 源自等式

$$6x=(x+1)^3+(x-1)^3-x^3-x^3\tag{3}$$

【解答】

(9) 869

(10) 13

(11) 1991

(13) a 为自然数，则

$$\begin{aligned}(a^2+3a)^2&<a(a+1)(a+2)(a+3)\\&<(a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

(14) 令 $a=\operatorname{tg}\alpha, b=\operatorname{tg}\beta, c=\operatorname{tg}\gamma$，则 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$(k 为整数)，式(1) 等价于

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma$$

(15) 由背景所述定理得 $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=-\frac{1}{6}$，式(2)中取 $a=\operatorname{tg}A, b=\operatorname{tg}B, c=\operatorname{tg}C$ 得

$\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\cdot\operatorname{tg}A=-\frac{2}{3}$，故 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 为方程 $x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}=0$，即 $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})=0$ 的根，从而 A、B、C 分别为 $\frac{3\pi}{4}$，$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$，$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$。

(16) 式(2)中，分别取 $a=\cos A+i\sin A, b=\cos B+i\sin B, c=\cos C+i\sin C$。

(17) 式(2)中取 $a=x, b=yt, c=zt^2$，因 $t\overline{\in}Q$，故 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=(x^2-2yz)+(2z-xy)t+(y^2-xz)t^2\neq 0$，从而 $r=a^3+b^3+c^3-3abc$ 是非零有理数，取 $u=\frac{x^2-2yz}{2r}, v=\frac{2z-xy}{2r}, \omega=\frac{y^2-xz}{2r}$，得证。

(18) 因对一切整数 n，$\frac{n^3-n}{6}$ 是整数，式(3)中取 $x=\frac{n^3-n}{6}$，得

$$n=n^3+x^3+x^3+(-x-1)^3+(1-x)^3。$$

(19) 对任何整数 x，$x^3\equiv 0, +1$ 或 $-1 \pmod 9$，故对任何三个整数 x, y, z，

$x^3+y^3+z^3\equiv 0, +1, +2, +3, -1, -2$ 或 $-3 \pmod 9$。从而，形为 $9k\pm 4$（k 为整数）的整数不能表示为三个整数的立方和。

注：由题 18、19，自然地要问：是否每个整数都能表示为四个整数的立方和？这是一个尚未解决的著名问题。