九年制义务教育选修课本（试用本）

初中几何选读

（供八、九年级用）

上海科学技术出版社

ISBN 7-5323-3506-2

9 787532 335060 >

经上海市中小学教材审查委员会
审查试用　准用号:CX—940007

九年制义务教育选修课本(试用本)

初中几何选读

(供八、九年级用)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会编

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社　出版、发行

(上海钦州南路71号　邮政编码:200235)

新华书店上海发行所经销　上海市委党校印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3.5　字数 75,000

1994年6月第1版　2006年6月第9次印刷

ISBN 7-5323-3506-2/G · 633

定价:2.80元

说　明

本教材根据上海中小学课程教材改革委员会制订的《选修课程标准》(草案)编写,供九年制义务教育八、九年级选用,教学时间需34课时。

本教材是试用本,由叶锦义同志编写。由于时间仓促,定有不足之处,希望试用本教材的各校师生提出宝贵意见,使之进一步完善。

目　录

第一章 全等变换

1·1 图形的运动与几何变换

我们已经学过了图形的轴对称(翻折)、旋转、中心对称、平移.其中图形的中心对称可以看作旋转角为 180° 的图形的旋转的特例.图形的轴对称(翻折)、旋转、平移是图形运动的三种最基本的形式.图形经过这三种运动中的任何一种运动,图形的位置会发生变化,但其形状、大小都是不变的,反过来,形状、大小相同的两个图形,经过三种基本运动中的一种(或者数种)运动一定能够重合. 我们知道,经过图形运动能够重合的两个图形称作全等形.

如图 1.1(1)~(4)的每组中两个三角形都是全等的,其中一个图形经过适当的运动可以与另一个图形重合. 想一想,每组中的一个三角形分别经过什么图形运动能与另一个三角形重合?

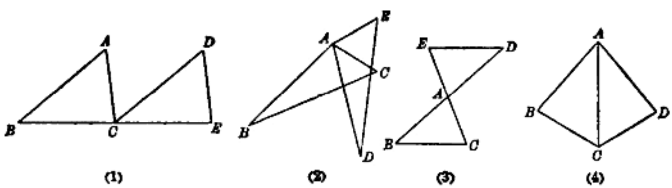


图 1.1

对于上述的图形运动后与另一个图形重合,我们可以理

解为图形依照一定的法则变为另一个图形. 例如，图 1.1(1)中，$\triangle ABC$ 依照平移的法则(想一想，平移的方向、距离各是什么?) 变为$\triangle DCE$；(2)中$\triangle ABC$ 依照旋转的法则(想一想，旋转中心、旋转角各是什么?)变为$\triangle ADE$；(3)中$\triangle ABC$ 依照中心对称法则(想一想，对称中心是什么?) 变为$\triangle ADE$；(4)中$\triangle ABC$ 依照轴对称法则(想一想，对称轴是什么?)变为$\triangle ADC$. 像这样

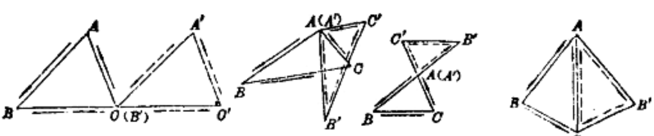
一个图形依照一定的法则变成另一个图形，叫做**几何变换**(或者叫做**图形变换**).

经过几何变换，图形的一些性质会有改变，而另一些性质仍保持不变. 例如，图 1.1 中的几何图形经过几何变换，图形的位置改变了，但是图形的形状、大小都没有改变，也就是说，变换前后图形保持全等.

如果一个图形经过几何变换后与原来的图形全等，那么这样的几何变换叫做**全等变换**.

依照平移、旋转(包括中心对称)、轴对称(翻折)法则进行的几何变换都是全等变换.

如图 1.2(1)～(4) 所示的几何变换都是全等变换，每组中的$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 全等. 但是仔细观察，图(1)～(3)中的全等与图(4)中的全等是有着明显的区别的.



(1) (2) (3) (4)

图 1.2

在图 1.2 中，我们把箭头所示的方向（如 $A\to B\to C\to A$，$A'\to B'\to C'\to A'$）称作三角形顶点的排列方向，如图 1.2（1）～（3）中，每一组中的两个三角形顶点的排列方向都是相同的（都是逆时针方向）；如图 1.2（4）中，两个三角形顶点的排列方向是相反的（$\triangle ABC$ 的顶点排列方向是逆时针方向，$\triangle AB'C$ 的顶点排列方向是顺时针方向）．

如果两个全等三角形的对应顶点的排列方向相同，那么这两个三角形叫做**真正全等三角形**；如果两个全等三角形的对应顶点的排列方向相反，那么这两个三角形叫做**镜照全等三角形**．

思考　一个三角形分别经过平移、旋转、中心对称这样的全等变换得到的三角形与原来三角形各是什么全等三角形？经过轴对称这样的全等变换呢？你能从中得出什么结论吗？

例　在$\triangle ABC$中，已知线段 EF，且 $EF=BC$，求作$\triangle DEF$，使$\triangle DEF\cong\triangle ABC$，并使两三角形为真正全等三角形．

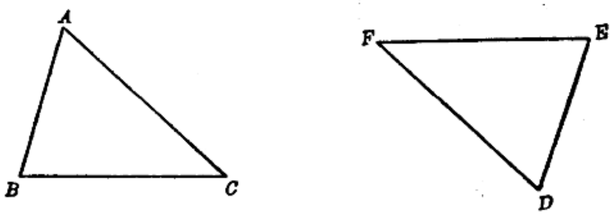


图 1.3

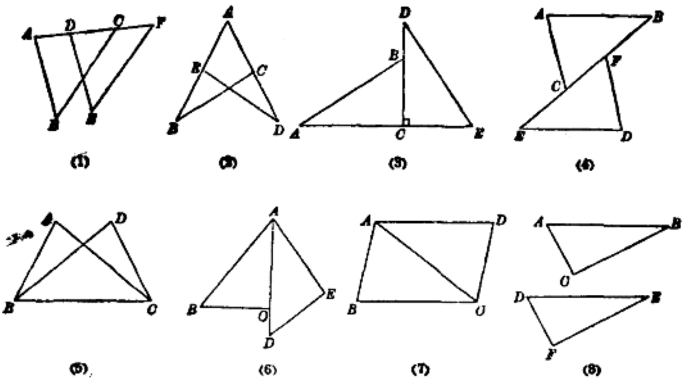
分析　$\triangle ABC$ 的顶点排列方向为逆时针的，假定$\triangle DEF$ 已经作出，按题意它的顶点排列方向也应是逆时针的．因此，顶点 D 应在直线 EF 的下方．

作法　以线段 EF 为一边，在直线EF的下方作$\triangle DEF$，使 $DE=AB, DF=AC$. $\triangle DEF$ 就是所求作的三角形（图1.3）.

全等变换是最基本、最常用的几何变换. 除全等变换外，几何变换中还有不改变图形的形状、只改变图形的大小那样的变换；还有不改变图形的大小、只改变图形的形状那样的变换；还有图形的形状、大小都改变那样的变换. 下面我们将分别研究各种全等变换. 此后，还将有选择地学习一些其他的几何变换.

练　　习

1. （口答）下列各组中的一个三角形分别经过什么图形运动能与另一个三角形重合？



（第1题）

2. 上题各组中，真正全等三角形的有哪几组？镜照全等三角

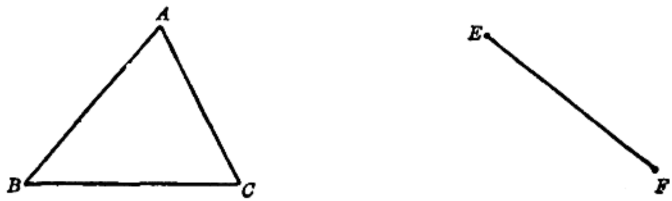
形的有哪几组？

3. 判别下列的全等三角形是真正全等三角形还是镜照全等三角形：

（1）等腰三角形的底边上的中线将原三角形所分成的两个三角形；

（2）平行四边形的两条对角线将原四边形所分成的四个三角形中其中两个全等的三角形.

4. 在$\triangle ABC$中，已知线段EF，且$EF=BC$，求作$\triangle DEF$，使$\triangle DEF\cong\triangle ABC$，并使两三角形为镜照全等三角形.



（第4题）

1·2 轴对称变换

我们知道，平面上的两个图形（F和F'），如果将其中一个图形（如F）沿着某一条直线（l）翻折180°后与另一个图形（如F'）重合，那么就说这两个图形（F和F'）关于直线l成轴对称，直线l称作这两个图形（F和F'）的对称轴. 现在我们根据几何变换的概念可以得到：

如果图形F变到与它关于直线l成轴对称的图形F'，那么这样的几何变换叫做关于直线l的**轴对称变换**，直线l仍然叫做对称轴. 显然，轴对称变换是全等变换.

如图 1.4，$\triangle ABC$ 经过关于直线 l 的轴对称变换后得到 $\triangle A'B'C'$. 反过来，$\triangle A'B'C'$ 经过关于直线 l 的轴对称变换后得到 $\triangle ABC$. 如图 1.4(2)，$\triangle ABC$ 内的一点 P 同时在对称轴 l 上，经过轴对称变换后仍为点 P；$\triangle ABC$ 内的一条线段 DE 同时在对称轴 l 上，经过轴对称变换后仍为 DE.

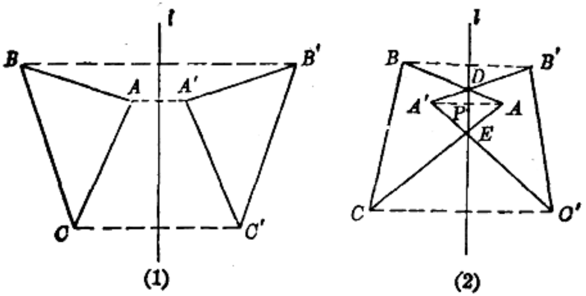


图 1.4

上面的事实说明，一个由轴对称变换后得到的图形，再经过轴对称变换可以变为原来的图形，前后两个轴对称变换具有同一条对称轴. 同时说明，一个图形落在对称轴上的点或线段，在轴对称变换中保持不变，即分别是它们的自身.

例 1 已知：D 是等腰三角形 ABC 的底边上的中点，直线 l 经过点 A、D. 求 $\triangle ABC$ 经过以 l 为对称轴的轴对称变换后的图形，并说明它与 $\triangle ABC$ 的关系.

分析 等腰三角形是一个多边形，我们可以像一般多边形那样，将三个顶点 A、B、C 分别以直线 l 为对称轴进行轴对称变换，分别得到它们的对应顶点 A'、B'、C'，然后顺次连结就可得到变换后的图形. 但是根据等腰三角形的“三线合一”性质可以知道，直线 l 必然同时垂直 BC，即 l 是 BC 的垂直平分线，因此经过以 l 为对称轴的轴对称变换后，点 B 的对应点 B' 重合于点 C，同理，点 C 的对应点 C' 重合于点

B.由于点 A 在 l 上，因此点 A 的对应点 A' 就是点 A.

解 经过以 l 为对称轴的轴对称变换，$\triangle ABC$ 变为 $\triangle ACB$，即经过以 l 为对称轴的轴对称变换后，$\triangle ABC$ 变成它自身，或者说变换后所得到的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ACB$ 重合(图1.5).

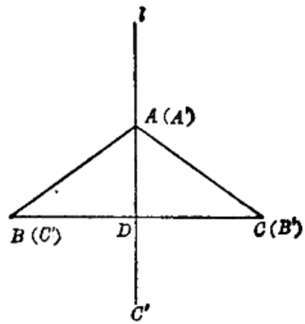


图 1.5

轴对称变换还告诉我们：通过轴对称变换，不仅可以改变点的位置，而且还可以改变线段、角等几何图形的位置．但不改变它们的大小，使有关的几何图形相对集中或者重新组合，这对于几何的证题、解题有重要的应用.

例 2 如图 1.6 所示，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\angle B=2\angle C$. 求证：$AB+BD=AC$.

分析 图形中线段 AB、BD 与线段 AC 比较分散，而图形中有角平分线，它所在的直线是这个角的对称轴，因此我们可以以它为对称轴，将 AB、BD 进行轴对称变换，这样它们与线段 AC 就相对集中，而且重新进行组合.

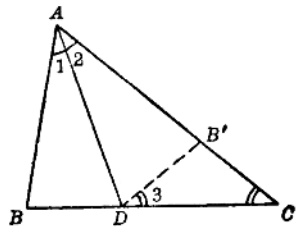


图 1.6

证明 由于 $\angle B=2\angle C>\angle C$，因此 $AC>AB$. 在 AC 上截取 AB'，使 $AB'=AB$，连结 $B'D$.

$\because$ AD 是角平分线，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

又 $\because$ $AB=AB'$，$AD=AD$，

$\therefore\quad \triangle ABD \cong \triangle AB'D.$

$\therefore\quad B'D = BD,\ \angle AB'D = \angle ABD.$

$\because\quad \angle B = 2\angle C,\quad \therefore \angle AB'D = 2\angle C.$

而 $\angle AB'D = \angle C + \angle 3,$

$\therefore\quad 2\angle C = \angle C + \angle 3$，从而$\angle C = \angle 3.$

$\therefore\quad B'D = B'C.$

$\therefore\quad AB + BD = AB' + B'D = AB' + B'C,$

即 $AB + BD = AC.$

说明 例2给我们一个启示，当几何图形中有角的平分线，如果不添辅助线很难证题、解题时，不妨尝试以角平分线所在直线为对称轴，将图形中的某些线、角进行轴对称变换.

想一想 为什么上例辅助线的作法就是将线段 AB、BD 进行轴对称变换？是否可以将线段 AC、CD 进行轴对称变换从而同样达到证明的目的？不妨试一试.

例3 如图1·7所示，已知，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，在直线 AD 上求作一点 P，使$\angle BPD = \angle CPD$.

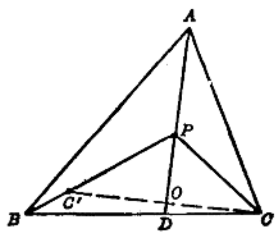


图 1.7

分析 假定点 P 已经作出，这时$\angle BPD = \angle CPD$，那么点 C 关于直线 AD 的对称点 C' 必然在 PB 上，即 B、C'、P 三点在一直线上. 因此我们对点 C 进行以直线 AD 为对称轴的轴对称变换，得到点 C'，直线 BC' 与直线 AD 的交点就是所求的点 P.

作法 1. 作 $CO \perp AD$，交直线 AD 于 O；

2. 延长 CO 至 C'，使 $OC' = CO$；

3. 作直线 BC'，交直线 AD 于点 P，点 P 为所求作的

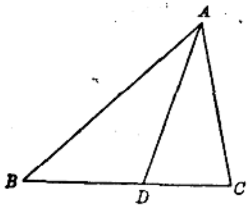
点.

想一想 你能证明这样作法的正确性吗?

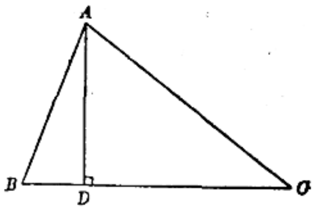
练　　习

A　　组

1. 已知：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，且 $AB=AC+CD$，求证：$\angle C=2\angle B$.

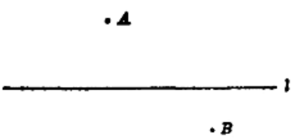


（第 1 题）

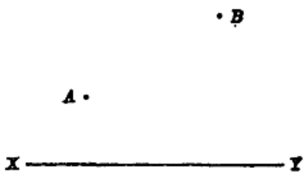


（第 2 题）

2. 已知：AD 是$\triangle ABC$ 的高，且$\angle B=2\angle C$，求证：$AB+BD=DC$.
3. 已知：直线 l 及 l 异侧的两点 A、B，在 l 上求一点 P，使 l 与 PA、PB 所成的角相等.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：直线 XY 及其同侧的两点 A、B，在 XY 上求一点

P,使$\angle APX=\angle BPY$.

B 组

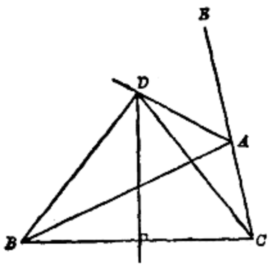
1. 如图,已知:$\triangle ABC$中,BC的垂直平分线交$\angle BAC$的外角平分线于点D.求证:$\angle DBA=\angle DCA$.

(提示:将点B进行以AD为对称轴的轴对称变换)

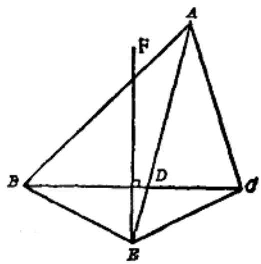
2. 如图,已知:$\triangle ABC$的角平分线AD的延长线与BC的垂直平分线相交于点E.求证:$\angle ABE+\angle ACE=180°$.

3. 如图,已知:$\angle XOY$及角外一点P,求作过P的直线,使这直线分别交OX、OY于点A、B,满足$PA=AB$.

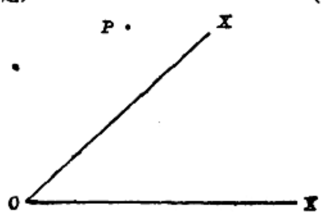
(提示:如直线PAB已作出,则将点P进行以OX为对称轴的轴对称变换后得到点P',就有PP'被OX垂直平分,因此有$P'B\parallel OX$.)



(第1题)



(第2题)



(第3题)

1·3 平移变换

我们知道，图形沿着一定的方向移动一定的距离的运动叫做图形的平移，如图 1.8 所示，$\triangle A'B'C'$是由$\triangle ABC$经过平移运动得到的，平移的方向是图中箭头所表示的从点A到点A'（即射线AA'）的方向，平移的距离是线段AA'的长度．经过平移运动后所得到的图形与原来图形能够互相重合，这两个图形间对应点连结的线段都是平行（或在一直线上）而且相等的，如图 1.8 中，$AA' \perp\!\!\!\!= BB' \perp\!\!\!\!= CC' \perp\!\!\!\!= PP' \perp\!\!\!\!= QQ' \cdots$．

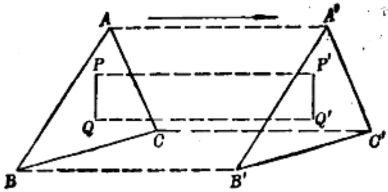


图 1.8

我们还知道，平移后的图形与原来图形中，对应线段平行（或在同一直线上）并且相等．如图 1.8 中，$AB \perp\!\!\!\!= A'B'$，$BC \perp\!\!\!\!= B'C'$，$CA \perp\!\!\!\!= C'A'$，$PQ \perp\!\!\!\!= P'Q'$，$\cdots$．

如果图形从一个位置移动到另一位置时，移前的图形 F 与移动后所得到的图形 F′ 之间任意一双对应点的连结线段相等并且平行，那么这样的几何变换叫做**平移变换**．显然，平移变换是全等变换．

如图 1.8 所示，$\triangle A'B'C'$就是由$\triangle ABC$经过平移变换（平移方向为射线AA'的方向，平移距离为线段AA'的长度）得到的．反过来，$\triangle ABC$也可由$\triangle A'B'C'$经过平移变换

(平移方向为射线 $A'A$ 的方向，平移距离为线段 $A'A$ 的长度)得到. 和轴对称变换一样，一个由平移变换得到的图形，再经过平移变换可以变为原来的图形. 前后两个平移变换的距离相同，方向相反.

和轴对称变换一样，平移变换不仅可以改变点的位置，而且可以改变线段、角等几何图形的位置但不改变它们的大小，使有关的几何图形相对集中或者重新组合. 因此平移变换在几何证题、解题中也有着重要的作用.

例 1 如图 1.9所示，梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle B$与$\angle C$ 互余，点 M、N分别是 AD、BC 的中点. 求证：$MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

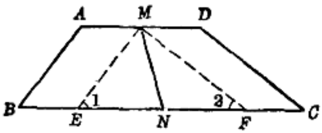


图 1.9

分析 线段 MN、BC、AD 比较分散，没有集中在一个三角形中，由于 $AD \parallel BC$，因此我们可以分别将 AM、DM 进行平移变换，构成 $BC-AD$ 这样线段的差，然后再证明 MN 等于它的一半.

证明 分别过 M 作 $ME \parallel AB$ 交 BC 于 E，作 $MF \parallel DC$ 交 BC 于 F.

则 $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$.

$\because$ $AM \parallel BE$、$AB \parallel ME$，

$\therefore$ $ABEM$ 是平行四边形，$\therefore$ $BE=AM$，

同理，$CF=MD$.

$\because$ M、N 分别是 AD、BC 中点，

$\therefore$ $AM=DM$，$BN=CN$.

$\therefore$ $BN-AM=CN-DM$，$\therefore$ $BN-BE=CN-CF$，

即 $EN=NF$.

$\because \angle B+\angle C=90^\circ$，$\therefore \angle 1+\angle 2=90^\circ$，

$\therefore \angle EMF=90^\circ$.

$$\therefore MN=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}(BC-BE-FC)$$

$$=\frac{1}{2}(BC-AM-MD)$$

$$=\frac{1}{2}(BC-AD).$$

例 2 线段 O_1O_2 与 AB 相交于点 P，且 $O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$. 已知 $O_1A=r$，$O_2B=R$，$O_1O_2=d$，(r、R、d 为常数)(图 1.10).

求：AB 的长.

分析 由于 O_1A、O_2B，O_1O_2 比较分散，而且 O_1O_2 被分割，因此设法使这些线段相对集中. 由于 O_1A、O_2B 同时垂直于 AB，O_1A 与 O_2B 就必然平行，因此可以将线段 AB 进行平移变换.

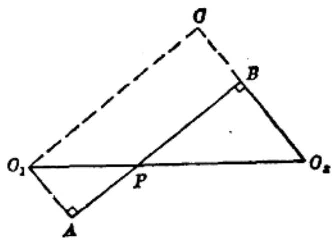


图 1.10

解 过点 O_1 作 $O_1C\parallel AB$，交 O_2B 的延长线于点 C，

$\because O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$，

$\therefore O_1A\parallel O_2B$，

所以四边形 AO_1CB 是平行四边形.

$\therefore \angle C=\angle A=90^\circ$，$BC=AO_1$，$O_1C=AB$.

在 Rt$\triangle O_1O_2C$ 中，

$$O_1C^2+O_2C^2=O_1O_2^2,$$