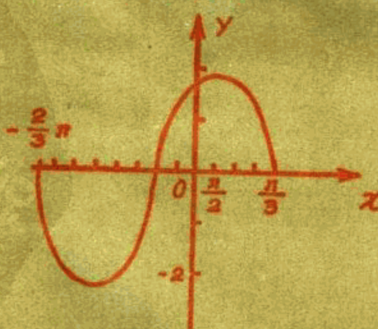
中学数学题例解

$x_1x+y_1y=r^2$

$y=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$



青海人民出版社

中学数学题例解

王　文
赵一民　编

青海人民出版社

中学数学题例解

王 文 赵一民编

青海人民出版社出版 青海省新华书店发行
人民交通出版社印刷厂制型 青海新华印刷厂印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：2.5 字数：56,000
1981年6月第1版 1981年6月第1次印刷
印数：1—20,000
统一书号：13097·40 定价：0.23元

第一部分　例　　题

例1．解方程　$\sqrt{x+4}=|x-2|+x$。

解：当 $x\geqslant 2$ 时，$|x-2|=x-2$，原方程变形为 $\sqrt{x+4}=x-2+x$，两边平方、整理，得

$$4x^2-9x=0,$$

$$x_1=\frac{9}{4},\ x_2=0(\text{舍去})$$

当 $x<2$ 时，$|x-2|=2-x$，原方程变形为

$$\sqrt{x+4}=2-x+x,$$

两边平方，得　$x=0$。

经检验，$x=\frac{9}{4}$、$x=0$ 是原方程的根。

例2．解方程　$|x-4|+|x-2|=4$。

解：当 $x\geqslant 4$ 时，$|x-4|=x-4$，$|x-2|=x-2$，原方程变形为　$x-4+x-2=4$，

解这个方程，得　$x=5$。

当 $2\leqslant x<4$ 时，$|x-4|=4-x$，$|x-2|=x-2$，于是，原方程变形为 $4-x+x-2=4$，即 $0\cdot x=2$，方程无解。

当 $x<2$ 时，$|x-4|=4-x$，$|x-2|=2-x$，于是，原方程变形为 $4-x+2-x=4$，即 $-2x=-2$，$x=1$。

综合以上情况，原方程的解为 $x_1=5$，$x_2=1$。

例3．化简　$\sqrt{1-\sin\frac{31\pi}{8}}$。

解： 原式 $=\sqrt{1-2\sin\frac{31\pi}{16}\cos\frac{31\pi}{16}}$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{31\pi}{16}-2\sin\frac{31\pi}{16}\cos\frac{31\pi}{16}+\cos^2\frac{31\pi}{16}}$$

$$=\sqrt{\left(\cos\frac{31\pi}{16}-\sin\frac{31\pi}{16}\right)^2}$$

$$=\cos\frac{31\pi}{16}-\sin\frac{31\pi}{16}。$$

例4． 求证 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

证明：〔用反证法〕

假定 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数，那么就能用一个既约分数来表示它，令 $\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}$（其中 p、q 为互质的自然数），于是 $p^3=2q^3$，即 p 是 2 的倍数，故又可令 $p=2p_1$（其中 p_1 是自然数），代入 $p^3=2q^3$，得 $8p_1{}^3=2q^3$，或 $4p_1{}^3=q^3$，这表明 q 是 4 的倍数，自然也是 2 的倍数，可令 $q=2q_1$（其中 q_1 是自然数）。

这样，p、q 就有公约数 2，此与假设 p、q 互质矛盾，故 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

例5． 求证 $\log_2 3$ 是无理数。

证明：

$\because$ $2<3<4$，　　$\therefore$ $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$，

即 $1<\log_2 3<2$。

$\therefore$ $\log_2 3$ 不是整数。

下面再证明它不是分数。

假定 $\log_2 3=\frac{p}{q}$（其中 p、q 为互质的自然数），那么 $2^{\frac{p}{q}}=3$，或 $2^p=3^q$。因为 2、3 互质，所以对于任意的正整数 p、q，2^p、3^q 也必然互质，故 $2^p=3^q$ 不可能成立，从而 $\log_2 3$ 不可能是分数。

综上所推，$\log_2 3$ 是无理数。

例6. 设 $a^{2x}=3$，求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 的值。

解法(1)：

分子、分母同乘以 a^x，

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}$$

$$=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3+1}=2\frac{1}{3}。$$

解法(2)：

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}$$

$$=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-x^{x}a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$$

$$=a^{2x}-1+\frac{1}{a^{2x}}=3-1+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}。$$

例7. 设 a、b、c 都是正数，且 $a+b+c=1$，求证 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$。

证法(1)：$\because\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b+c=1,$

$$\therefore\quad 1-c=a+b\geqslant 2\sqrt{ab} \qquad (1)$$

$$1-a=b+c\geqslant 2\sqrt{bc} \qquad (2)$$

$$1-b=a+c\geqslant 2\sqrt{ac} \qquad (3)$$

(1)·(2)·(3)，得

$$(1-c)(1-a)(1-b)\geqslant 8abc,$$

即
$$1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc\geqslant 8ab,$$

$$1-1+(ab+ac+bc)\geqslant 9abc,$$

$$ab+ac+bc\geqslant 9abc,$$

又$\because\ a>0,\ b>0,\ c>0,$

$\therefore\ abc>0,$

$$\therefore\quad \frac{ab+ac+bc}{abc}\geqslant 9,$$

即
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9。$$

证法(2)：$\because\ a>0,\ b>0,\ c>0$

$$\therefore\quad a^2+b^2\geqslant 2ab,\quad b^2+c^2\geqslant 2bc,\quad a^2+c^2\geqslant 2ac,$$

$$\therefore\quad \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2,\quad \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2,$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 2,$$

$$\therefore\quad \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6,$$

$$\therefore\quad \frac{b+c}{a}+1+\frac{a+c}{b}+1+\frac{a+b}{c}+1\geqslant 9,$$

即
$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geqslant 9。$$

又 $\because \quad a+b+c=1$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9。$$

例8． 设 $\dfrac{x}{y+z}=a$， $\dfrac{y}{z+x}=b$， $\dfrac{z}{x+y}=c$，求证

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1。$$

证明：

$$\because \quad \frac{x}{y+z}=a, \qquad \therefore \quad \frac{y+z}{x}=\frac{1}{a},$$

$$\therefore \quad \frac{y+z}{x}+1=\frac{1}{a}+1, \quad 或 \quad \frac{x+y+z}{x}=\frac{1+a}{a},$$

$$故 \qquad \frac{x}{x+y+z}=\frac{a}{1+a}; \qquad (1)$$

$$同理可证 \quad \frac{y}{x+y+z}=\frac{b}{1+b}; \qquad (2)$$

$$\frac{z}{x+y+z}=\frac{c}{1+c}。 \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3)，得

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1。$$

例9． 已知 $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$ 为含 x 的完全平方式，求证 $9p^2-14pq+9q^2=0$。

证明： 把原式展开、整理，得

$$2x^2+3(p+q)x+4pq。$$

$\because$ 该二次三项式为 x 的完全平方式，

$\therefore \Delta=[3(p+q)^2]^2-4\cdot 2\cdot 4pq=0$，

即　$9p^2-14pq+9q^2=0$。

例10．计算　$\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$。

解：

$$原式=\left[\frac{(2a^{\frac{1}{2}})^2-(3a^{-\frac{1}{2}})^2}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$$

$$=[2a^{\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}]^2$$

$$=[3a^{\frac{1}{2}}]^2=9a。$$

例11．若 $a>b>c>0$，求证 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>c^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$。

证明： ∵　$a>b>0$　∴　$\dfrac{a}{b}>1$，　$a-b>0$，

∴　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，　即 $\dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}>1$　或 $\dfrac{a^ab^b}{b^aa^b}>1$，

或　　　　$a^ab^b>a^bb^a$；　　　　（1）

同理可证　　$a^ac^c>a^cc^a$；　　　　（2）

　　　　　　$b^bc^c>b^cc^b$。　　　　（3）

（1）·（2）·（3），得

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}。$$

例12．设 a、b、c 为任意三个正实数，求证

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}。$$

证明： 先证如下命题：不论正实数 a、b 的大小关系如何，恒有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$。

当 $a\geqslant b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}\geqslant1$，$a-b\geqslant0$，故 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant1$。

当 $0<a<b$ 时， $0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$。

综合上述两种情况就证明了所提出的命题。

又∵ $\frac{a-b}{3}$ 与 $a-b$ 的符号相同，

∴ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\geqslant 1$。

同理，$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\geqslant 1$， $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1$，

$$\therefore \quad \frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1。$$

∴ $a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$。

例13．设 a、b、c、d、e 为任意正实数，求证

$$a^a b^b c^c d^d e^e \geqslant (abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}。$$

证明：我们利用例12中已证明过的命题。

$$\because \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1,\quad 5>0,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{5}}\geqslant 1, \qquad (1)$$

仿此可得 $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{5}}\geqslant 1$；(2) $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{a-d}{5}}\geqslant 1$；(3)

$\left(\frac{a}{e}\right)^{\frac{a-e}{5}}\geqslant 1$；(4) $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{5}}\geqslant 1$；(5)

$$\left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{b-d}{5}}\geqslant 1;(6)\quad \left(\frac{b}{e}\right)^{\frac{b-e}{5}}\geqslant 1;(7)$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{c-d}{5}}\geqslant 1;(8)\quad \left(\frac{c}{e}\right)^{\frac{c-e}{5}}\geqslant 1;(9)$$

$$\left(\frac{d}{e}\right)^{\frac{d-e}{5}}\geqslant 1。(10)$$

(1)·(2)·(3)·……·(9)·(10)，得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{5}}\times\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{5}}\times\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{a-d}{5}}\times\cdots\cdots\times\left(\frac{d}{e}\right)^{\frac{d-e}{5}}\geqslant 1。$$

(A)

而（A）式左端 $=a^{\frac{4}{5}a-\frac{b}{5}-\frac{c}{5}-\frac{d}{5}-\frac{e}{5}}\cdot b^{\frac{4}{5}b-\frac{a}{5}-\frac{c}{5}-\frac{d}{5}-\frac{e}{5}}$

$\cdot c^{\frac{4c}{5}-\frac{a}{5}-\frac{b}{5}-\frac{d}{5}-\frac{e}{5}}\cdot d^{\frac{4d}{5}-\frac{a}{5}-\frac{b}{5}-\frac{c}{5}-\frac{e}{5}}\cdot e^{\frac{4e}{5}-\frac{a}{5}-\frac{b}{5}-\frac{c}{5}-\frac{d}{5}}$

$$=\frac{a^a b^b c^c d^d e^e}{(abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}}。\qquad (B)$$

比较(A)、(B)得

$$\frac{a^a b^b c^c d^d e^e}{(abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}}\geqslant 1;$$

$\therefore\ a^a b^b c^c d^d e^e\geqslant(abcde)^{\frac{a+b+c+d+e}{5}}$。

例14．设 a、b 为正实数，且 $a^b=b^a$，求证

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}。$$

证明：$\because\ a>0,\ b>0$，且$a^b=b^a$，

$\therefore\ a=b^{\frac{a}{b}}$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = a^{\frac{a}{b}-1}。$$

例15. 计算 $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}$。

解： 原式 $=\dfrac{1}{3}\log_3[3^4(3^6\cdot 3^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}]$

$$=\frac{1}{3}\left[\log_3 3^4+\frac{1}{4}(\log_3 3^6+\log_3 3^{-\frac{4}{3}})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[4+\frac{1}{4}\left(6-\frac{4}{3}\right)\right]=\frac{31}{18}=1\frac{13}{18}。$$

例16. 已知 $\log_{14}7=a$，$\log_{14}5=b$，求 $\log_{35}28$。

解： $\because \log_{14}7=\dfrac{\log_7 7}{\log_7 14}=\dfrac{1}{\log_7 14}=\dfrac{1}{\log_7 7+\log_7 2}$

$$=\frac{1}{1+\log_7 2},$$

$$\therefore \log_7 2=\frac{1}{a}-1。$$

$$\because \log_{14}5=\frac{\log_7 5}{\log_7 14}=\frac{\log_7 5}{\dfrac{1}{\log_{14}7}}=\log_7 5\cdot\log_{14}7,$$

$$\therefore \log_7 5=\frac{\log_{14}5}{\log_{14}7}=\frac{b}{a},$$

$$\therefore \log_{35}28=\frac{\log_7 28}{\log_7 35}=\frac{\log_7(4\times 7)}{\log_7(5\times 7)}=\frac{2\log_7 2+1}{\log_7 5+1}$$

$$=\frac{2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)+1}{\dfrac{b}{a}+1}=\frac{2-a}{a+b}。$$

例17．若齐次线性方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ ax+a^2y+z=0 \\ a^2x+y+az=0 \end{cases}$$

有非零解，那么 a 应为何值？

解：齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式的值等于零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}=0,$$ 展开、整理，得

$a^6-2a^3+1=0$，解方程得 $a=1$ 或 $a=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，此即为所求。

例18．解方程组

$$\begin{cases} \sqrt[3]{(x+y)^2}+2\sqrt[3]{(x-y)^2}=3\sqrt[3]{x^2-y^2} & (1) \\ 3x-2y=13。 & (2) \end{cases}$$

解：由(1)得

$$(\sqrt[3]{x+y})^2-3\sqrt[3]{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}+2(\sqrt[3]{x-y})^2=0,$$

左边分解，得

$$(\sqrt[3]{x+y}-2\sqrt[3]{x-y})(\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y})=0$$

$\therefore$ $$\sqrt[3]{x+y}-2\sqrt[3]{x-y}=0; \quad (3)$$

$$\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}=0; \quad (4)$$

由(3)得

$\sqrt[3]{x+y}=2\sqrt[3]{x-y}$，两边立方，得 $x+y=8(x-y)$； (5)

由(4)得

$\sqrt[3]{x+y}=\sqrt[3]{x-y}$，两边立方，得 $x+y=x-y$ (6)

由（5）得 $7x=9y$　　　　　　　　（7）

由（6）得 $y=0$　　　　　　　　（8）

解（2）、（7）组成的方程组，得$\begin{cases}x=9\\y=7\end{cases}$，解（2）、（8）组成的方程组，得$\begin{cases}x=\frac{13}{3}\\y=0\end{cases}$　经检验，以上两组都是原方程组的解。

例19．方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3-\ \ x_4=1\\ \qquad x_2-2x_3+\ \ x_4=-1\\ 2x_1\qquad\quad +\ \ x_3+2x_4=0\\ \qquad 2x_2+ax_3-2x_4=0\end{cases}$$

中，a取什么值时，该方程组有唯一解？

解：由克莱姆法则，当该方程组的系数行列式的值不为零时，方程组有唯一解。

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&-1\\0&1&-2&1\\2&0&1&2\\0&2&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2&-1\\0&1&-2&1\\0&-6&-3&4\\0&2&a&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-6&-3&4\\2&a&-2\end{vmatrix}=-10a+20\neq0,$$

$a\neq2$，此即为所求。

例20．解方程　$\log_{(16-3x)}(x-2)=\log_8 2\sqrt{2}$。

解：∵　$\log_8 2\sqrt{2}=\log_8 2^{\frac{3}{2}}=\log_8(2^3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

∴　原方程可变形为$\log_{(16-3x)}(x-2)=\frac{1}{2}$，化为指数式　$(16-3x)^{\frac{1}{2}}=x-2$，解此方程，得 $x_1=4$，$x_2=-3$。

经检验知 $x=4$ 是原方程的根。

例21. 已知 a_1，a_2，……，a_n 为调和数列，

求证 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$

证明： $\because$ a_1，$a_2\cdots$，a_n 为调和数列，

$$\therefore\quad \frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{a_n}\text{为等差数列。}$$

设公差为 d，那么

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\cdots\cdots=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=d,$$

即
$$\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}=\frac{a_2-a_3}{a_2a_3}=\cdots\cdots=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}a_n}=d,$$

由等比定理，得

$$\frac{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=d。$$

又由等差数列的通项公式，得

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d,$$

$$\therefore\qquad d=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)},$$

$$\therefore\quad \frac{a_1-a_n}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)},$$

$$\therefore\quad a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=a_1a_n(n-1)。$$

例22. 已给数列$\{a_n\}$：3，5，7，9，11，13，15，…（1），作另一数列$\{b_n\}$：3，7，15，…（2）。数列$\{b_n\}$的形成规则如下：第1项 b_1 为$\{a_n\}$的第1项，即 $b_1=3$；第2项 b_2 为$\{a_n\}$的第3项，即 $b_2=7$；第3项 b_3 为$\{a_n\}$的第7项，即 $b_3=15$；……；第 n 项 b_n 为$\{a_n\}$的第 b_{n-1} 项。试写出$\{b_n\}$第4项、第5项，

并写出$\{b_n\}$的通项。

解：解本题的关键在于正确理解数列$\{b_n\}$的形成规则。

数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n = 2n + 1$。

数列$\{b_n\}$的第4项b_4应为数列$\{a_n\}$的第b_3项，即第15项，故$b_4 = a_{15} = 2\times 15 + 1 = 31$。数列$\{b_n\}$的第5项应为数列$\{a_n\}$的第$b_4$项，即第31项，故$b_5 = a_{31} = 2\times 31 + 1 = 63$。

由数列$\{b_n\}$的形成规则可知 $b_n = a_{b_{n-1}}$，而 $a_{b_{n-1}} = 2b_{n-1} + 1$，故$b_n = 2b_{n-1} + 1$，两边同时加1，得$b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$，令$C_n = b_n + 1$，则$C_n$为公比等于2的等比数列，又$C_1 = b_1 + 1 = 4$，故$C_n = C_1\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$，$b_n = C_n - 1 = 2^{n+1} - 1$，即$b_n = 2^{n+1} - 1$是所求的通项公式。

例23. 一个四位数，其千位、百位、十位、个位数字依次组成等差数列；百位上的数字是个位、千位数字的等比中项；把该四位数的数字反着次序排列所得的数与原四位数的和为11110，求原四位数。

解：因为所求四位数的千、百、十、个位数字依次组成等差数列，故可设这四个数字依次为$x-3d$、$x-d$、$x+d$、$x+3d$，根据其它条件可列出如下方程组：

$$\begin{cases}(x-d)^2 = (x-3d)(x+3d) & (1)\\ 1000(x-3d)+100(x-d)+10(x+d)+(x+3d)+1000\cdot(x+3d)+100(x+d)+10(x-d)+(x-3d)=11110 & (2)\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}dx - 5d^2 = 0 & (3)\\ 2222x = 11110, & (4)\end{cases}$$

由(4)得$x=5$；由(3)得$d=0$，或$d=1$（利用$x=5$）。

当$d=0$时，所求四位数为5555。

当 $d=1$时，所求四位数为2468。

例24. 求证$5^{2n}-24n-1$能被576整除,其中n为正整数。

证法(1)：用数学归纳法

当$n=1$时，$5^{2n}-24n-1=25-24-1=0$，显然能被576整除，即命题成立。

假定$n=k$时，命题成立，即$5^{2k}-24k-1$能被576整除，进而考虑$n=k+1$的情形：

$$5^{2(k+1)}-24(k+1)-1=25\cdot5^{2k}-24k-24-1$$
$$=25\cdot5^{2k}-25\cdot24k+25\cdot24k-24k-25$$
$$=25(5^{2k}-24k-1)-24^2k$$

由归纳法假定，$5^{2k}-24k-1$能被576整除，而$24^2=576$，显然也能被576整除，即当$n=k+1$时，命题也成立。

综合以上情况,可以断定,对于任何正整数命题都成立。

证法(2)：

$\because\quad 5^{2n}=(5^2)^n=25^n$
$$=(24+1)^n=1+C_n^1\cdot24+C_n^2\cdot24^2+\cdots+24^n,$$

$\therefore\quad 5^{2n}-24n-1=C_n^2\cdot24^2+C_n^3\cdot24^3+\cdots+24^n$
$$=24^2(C_n^2+C_n^3\cdot24+\cdots+24^{n-2})。$$

又 $\because\quad 24^2=576$,

$\therefore\quad 5^{2n}-24n-1$能被576整除。

例25. 已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数，并且$bd+cd$是奇数，求证这个多项式不能分解成两个整系数多项式的乘积。

证法(1)：

假设所给多项式能分解为两个整系数多项式的乘积，即

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r)\qquad(1)$$

其中p、q、r都是整数。比较两边的系数，得