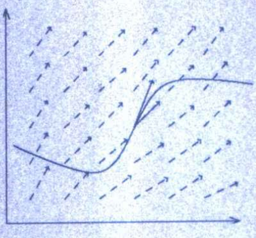
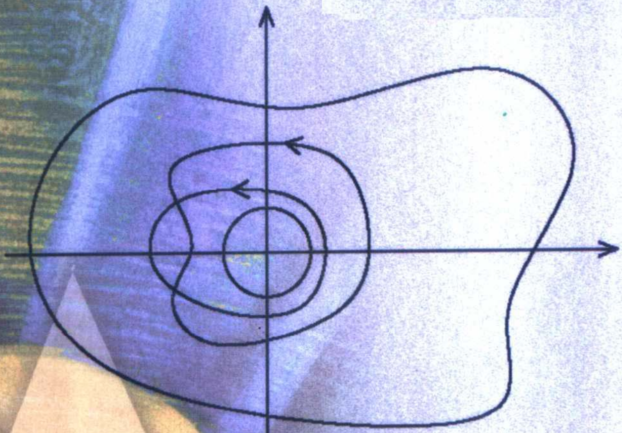
基础数学讲义丛书

基础分析学之二

——多元微积分学



项武义 著



人民教育出版社

基础数学讲义丛书

基础分析学之二

多元微积分学

项武义 著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

基础分析学．2，多元微积分学/项武义主编．
—北京：人民教育出版社，2004
（基础数学讲义；4）
ISBN 7-107-17682-X

Ⅰ．基…
Ⅱ．项…
Ⅲ．高等数学课—中学—教学参考资料
Ⅳ．G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 051410 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：4.75
字数：95 千字　　印数：0 001～3 000 册
定价：9.20 元

引言

本册将以上一册研究单元微积分所得的基础理论为基本，进而研究多元微积分. 如在上一册的结语中所提及的，在各种各样数理分析中所遇到的问题，通常都是多元、多关系的体系而不是只有一个自变元的. 总之，多元微积分才是普遍可用的，而单元微积分则仅仅是在理论上提供了简朴的雏型和基础. 把它推广到多元、多关系的范畴，一来是十分自然的顺理成章，二来也是迫切亟需的；这是分析学必然的进程.

目录

第一章

多元函数的连续性与微分

§1.1 多元函数的连续性

设 $u = f(x_1, \cdots, x_n)$ 是一个给定的 n 个自变元 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数，n 数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的变域是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域 D，而应变元 u 的值是由 n 数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 唯一确定的. 它在某一给定点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的“局部连续性”的定义乃是单元“局部连续性”定义的直接推广，即

【定义】定义于 D 上的 $u = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 点的连续的条件是对于任给 $\varepsilon > 0$，恒有足够小的 $\delta > 0$，使得

$$|x_i - a_i| < \delta,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in D$$
$$\Rightarrow \quad |f(x_1, \cdots, x_n) - f(a_1, \cdots, a_n)| < \varepsilon.$$

我们也可以改用数列与极限，把上述局部连续性重述如下：

对于任给 D 中以 A 为其极限的点列 $\{P_k\}$，即

$$P_k(x_{1,k},\cdots,x_{n,k})\in D,\quad \lim_{k\to\infty}x_{i,k}=a_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

皆有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{1,k},\cdots,x_{n,k})=f(a_1,\cdots,a_n).$$

由此可见 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在其定义域 D 上处处连续的条件就是对于任给 D 中其极限依然在 D 中的点列 $\{P_k\}$，皆有

$$\lim_{k\to\infty}f(P_k)=f(\lim_{k\to\infty}P_k).$$

即对于任给 n 个数列 $\{x_{i,k}\}$, $1\leqslant i\leqslant n$，若有

$$(x_{1,k},\cdots,x_{n,k})\in D,\ \lim_{k\to\infty}x_{i,k}\ \text{存在},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\text{而且}(\lim_{k\to\infty}x_{1,k},\cdots,\lim_{k\to\infty}x_{n,k})\in D,$$

则恒有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{1,k},\cdots,x_{n,k})=f(\lim_{k\to\infty}x_{1,k},\cdots,\lim_{k\to\infty}x_{n,k}).$$

[注] (i) 从上述多元函数的连续性的定义的基本面 (basic feature) 来看，多元函数的情形和单元函数的情形如出一辙，只是每个变元 x_i 皆有其趋于 a_i 的数列 $\{x_{i,k}\}$，所以在上述连续性的条件式中涉及 n 个收敛的数列而不再是仅仅一个收敛数列.

(ii) 其实多元的连续性和单元的连续性两者相比，前者的确要比后者来得复杂多样，其主要原因有二：其一是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 D 要远比 $\mathbf{R}^1$ 中的区间多样得多；其二是上述极限条件式要比单元者强得很多（在单元的情形一个收敛数列基本上只有从左、右两个方向去逼近其极限值；但是在多元的情形则可以从无穷多个方向逼近其极限点），所以多元函数的不连续性要远比单元函数的不连续性复杂多样. 由此可以想到，在多元的数理分析中，连续性就变得更加重要了. 很多常用好用的公式和定理，往往都有赖于所涉及的函数的连续性！

(iii) 多元函数的连续性在本质上是一个非常强的条件，但是它也是一种非常自然的条件. 所以在很多多元的数理分析问题中，所涉及的函数往往都自然而然地在大部分定义域上连续. 总之，在对于某一问题作数理分析时，对于其所涉及的函数的连续性成立的范围务必小心检查；而在连续性不成立的地方（奇点），当然就得格外用心，另行设法区别处理之.

(iv) 单元微积分中，在一个闭线段上处处连续的函数具有很多优良的基本性质（参看第三册第一章），而且它们又在单元微积分的基础理论中扮演重要的角色. 很自然地我们在此要问：在多元的各种各样变域中，究竟哪些才是“闭线段”的适当推广呢？换句话说，在哪一种变域上处处连续的多元函数依然保有在闭线段上处处连续的单元函数所具有的那些优良性质呢？

【分析】

要解答上述问题，自然又得对于上一册第一章对于那些优良性质的论证，再做一次温故知新，分析一下在论证中，所用到的闭线段的本质究竟是些什么？不难看到下述三点是显然必要的：其一是 **有界性**，其二是 **连通性**，而其三则是 **极限封闭性**，即闭线段中的任给收敛数列的极限点依然位于其中.

由此可见，要真正掌握多元函数的连续性，就必须对 $\mathbf{R}^n$ 中的区域的几何本质先下一番功夫，明确其有界性、连通性、极限封闭性等等的实质内涵.

有界性：将 $\mathbf{R}^1$ 中一个子集 $\mathcal{S}$ 的有界性直接推广，即得 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集 $\mathcal{S}$ 的有界性的定义，即：存在一个足够大的常数 K，使得所有 $\mathcal{S}$ 中的点的坐标皆满足 $|x_i| \leqslant K$，$1 \leqslant i \leqslant n$.

例如下述 n 维方块：

$$\square^{(n)}(2K) := \{(x_1, \cdots, x_n); |x_i| \leqslant K,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

本身是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界子集，而任何有界子集都是足够大的 $\square^{(n)}(2K)$ 一个子集.

连通性：设 $\{\varphi_i(t), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是定义于 $[a, b]$ 上的 n 个连续函数，则参数式

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

所描述者乃是 $\mathbf{R}^n$ 中连接 $A(\varphi_1(a), \cdots, \varphi_n(a))$ 和 $B(\varphi_1(b), \cdots, \varphi_n(b))$ 的一条连续曲线.

【定义】若 $\mathbf{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，其中任给两点 A, B 皆能有完全包含在 $\mathcal{S}$ 之内的连续曲线连接，则称 $\mathcal{S}$ 为 **连通子集**．

极限封闭性： $\mathbf{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，若满足其中任给收敛点列的极限点依然是 $\mathcal{S}$ 中的点，则称 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 **闭子集** (close set)．

例如上述 $\square^{(n)}(2K)$ 是一个闭子集，但将其中任何一点略去，则就不再是闭子集了．

相对于闭子集，下述开子集 (open set) 也是在分析学中极为基本的概念，即

【定义】对于给定点 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 和 $\delta > 0$,

$$U_\delta(A) := \{(x_1, \cdots, x_n);\ |x_i - a_i| < \delta,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

叫做 A 点的 δ **邻域** (δ-neighborhood)．

【定义】 $\mathbf{R}^n$ 中的子集 $\mathcal{S}$，若对于其中任给一点 A 皆有其（足够小的） δ 邻域 $U_\delta(A) \subset \mathcal{S}$，则称 $\mathcal{S}$ 为一 **开子集**．

[注意] 空集合应该看做开子集（或闭子集）的特例.

令

$$\square_0^{(n)}(2K) := \{(x_1, \cdots, x_n);\ |x_i| < K,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

则不难验证 $\square_0^{(n)}(2K)$ 乃是 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集.

【习题】

(1) 任给一组闭子集的交集也是一个闭子集, 而任给一组有限个开子集的交集也是一个开子集, 试证之.

(2) 任给一组开子集的并集也是一个开子集, 而任给一组有限个闭子集的并集也是一个闭子集, 试证之.

(3) 试证一个开子集的补集是一个闭子集.

(4) 试证一个闭子集的补集是一个开子集.

(5) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbf{R}^2$ 的二元函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试验证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(6) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbf{R}^2$ 的二元函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试验证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点 **不** 连续. (试把 $f(x,y)$ 局限于变域 $x=y$, 并求当 $x\to 0$ 时的极限.)

(7) 令 $f(x,y)$ 为定义于 $\mathbf{R}^2$ 的二元函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

问 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？

(8) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 是两个同一变域 D 上处处连续的函数，试证

$$(f+g)(x_1,\cdots,x_n):=f(x_1,\cdots,x_n)+g(x_1,\cdots,x_n)$$
和$$(f\cdot g)(x_1,\cdots,x_n):=f(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(x_1,\cdots,x_n)$$

也是 D 上处处连续的函数.

(9) 试证任给 n 元多项式函数都是 $\mathbf{R}^n$ 上处处连续的函数.

(10) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个连通的区域 D 上处处连续的函数. A,B 是 D 中任给两点， c 是介于 $f(A)$ 和 $f(B)$ 之间的值. 试证 D 中总是存在一点 P，使得 $f(P)=c$. (单元函数中间值定理的推广)

(11) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个有界、连通闭子集而 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 D 上处处连续的函数. 试证其函数值所构成者乃是 $\mathbf{R}$ 中的一个闭线段（即 $\mathbf{R}^1$ 中的有界、连通闭子集）. (提示：参考上册第一章中 [定理 1.2] 和代数基本定理的证明中 $|f(z)|^2$ 在 $\square(2K)$ 上的极小值存在

性的论证.)

(12) 设

$$u_i = f_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

都是 D 上的连续函数, 而 $y = g(u_1, \cdots, u_m)$ 则是 $\mathbf{R}^m$ 上的连续函数. 试证复合函数

$$y = g(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

也是 D 上的连续函数.

(13) (思考题)试问应该如何定义由 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域 D 到 $\mathbf{R}^m$ 中的一个区域 D' 的映射的连续性? 在适当的定义之下, 连续映射的复合应该还是连续映射, 试说明之.

§1.2 多元函数的微分

归根究底, 一个单元函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ "可微" 的实质就是在该点的微小 δ 邻域上, $f(x)$ 具有一个线性逼近 (linear approximation) $\ell(x)$ (即 $f(x) - \ell(x)$ 在足够小的 δ 邻域上是一个高于一阶的微量), 它就是 $f(a) + f'(a)(x - a)$, 而

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ 也就是 $y = f(x)$ 在 $(a, f(a))$ 点的切线方程式. 由此可以想到，一个多元函数 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 点可微的定义也就是它在 A 点的一个足够小的 δ 邻域， $U_\delta(A)$，上具有一个线性逼近，即

【定义】若存在一个线性函数

$$\ell(x_1, \cdots, x_n) = f(a_1, \cdots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - a_i),$$

使得

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}}\Big|f(x_1, \cdots, x_n) - \ell(x_1, \cdots, x_n)\Big|(|x_i - a_i| < \delta)$$

在 $\delta \to 0$ 时的极限值为 0，则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $A(a_1, \cdots, a_n)$ 点是 **可微的** (differentiable) .

[注] 若 f 在 A 点可微，则 f 必须在该点连续，其证明留作习题.

当我们把上述可微性的条件式局限到 $x_i = a_i (2 \leqslant i \leqslant n)$ 的特殊情形下时，它就简化成单元函数 $f(x_1, a_2, \cdots, a_n)$ 在 $x_1 = a_1$ 点的可微的条件式. 再者，由此易见上述线性逼近中的系数 c_1 必须等于 $f(x_1, a_2, \cdots, a_n)$ 在 $x_1 = a_1$ 点的变率. 同理 c_2 必须等于 $f(a_1, x_2, a_3, \cdots, a_n)$ 在 $x_2 = a_2$ 点的变率，$\cdots\cdots$ c_n 必须等于 $f(a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n)$ 在 $x_n = a_n$ 点的变率.

偏微分的定义与符号：设 x_i 的单元函数 $f(a_1,\cdots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\cdots,a_n)$ 在 $x_i=a_i$ 点可微，则其在该点的变率定义为函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 点对于 x_i 的 **偏导数** (partial derivative)，以符号 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A$ 记之，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(\cdots,x_i,\cdots)-f(\cdots,a_i,\cdots)}{x_i-a_i}.$$

总结上述简短的讨论，即有下述可微性的一个必要条件，即

【引理 1】若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 点可微，则它在 $A(a_1,\cdots,a_n)$ 点对于 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的偏导数皆存在（即其定义的极限存在），而且它在 A 点邻近的线性逼近就是

$$\ell(x_1,\cdots,x_n)=f(a_1,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A(x_i-a_i).$$

[注] (i) 一般来说，上述 n 个偏导数的存在，只是可微性的必要条件（并非充要条件，见下面的例子）！

(ii) 把偏导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_A$ 有定义的点的值逐一记录，即得另一个 n 元函数（其定义域可能要比 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的变域要小些）称之为 f 对于 x_i 的偏导函数，以符号 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 记之.

(iii) 由一个给定函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 去求它的各个偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 的计算叫做 **偏微分** (partial differentiation)，它

本质上其实就是单元函数的微分，只是在计算 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 时，除了 x_i 之外的 $(n-1)$ 个变元都要当做固定不变的常数来看待. 总之，偏微分运算其实是原先已经熟悉的单元函数的微分，即那个只让 x_i 变动而其他 $(n-1)$ 个变元都暂且固定不动，如此简化而得的单元函数的微分. 读者只要稍做练习，即可充分掌握.

【例】令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则由偏导函数的定义即可求得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,\\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} &= \lim_{h'\to 0}\frac{f(0,h')-f(0,0)}{h}=\lim_{h'\to 0}\frac{0-0}{h'}=0.\end{aligned}$$

但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微，因为它根本在 $(0,0)$ 点不连续！由此可见，若只是要求偏导函数的存在是不足以用来有效研讨问题的. 若要能够有效研讨问题，就必须要加上偏导函数的连续性！

在单元微积分中，当导函数（或高阶导函数）也具有连续性时，均值（或高阶均值）定理就成为十分好用的有力工具. 其实，在多元微积分中，偏导函数的连续性就变得更加重要和必要了. 有鉴于此，在以后的讨论中，除非另加申明，我们总是设所涉及的函数的定义域是一个开子集 D，而且