21世纪高职高专基础课规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

上册

主编　肖胜中

NEUPRESS
东北大学出版社

高　等　数　学

上　册

主　编　肖胜中
副主编　姚新钦　李汉荣
　　　　谭旭平　符传宏

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册） / 肖胜中主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8

ISBN 7-81102-040-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 肖…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 077625 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：18
字　　数：449 千字
出版时间：2006 年 8 月第 2 版
印刷时间：2006 年 8 月第 2 次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：薛　平
责任出版：秦　力

定　　价：27.00 元

前　　言

高等数学是高职高专院校各专业的公共必修课，是一门重要的基础课；既是学习后续课程必须掌握的基础知识，也是日后开展工作、解决问题应学会的基本方法. 进入 21 世纪以后，我国的高职高专教育发展迅猛，教育改革不断深入，但教材建设却稍显滞后，教材体系改革迫在眉睫. 目前已经出版的一批高职高专数学教材虽然在稳定教学秩序、主导教学方向方面起到了一定的作用，但细看起来，许多教材内容偏难、偏多、偏深，形式单一，与高职高专所要求的“必须、够用”有一定的差距. 为了改变这一现状，我们在总结多年数学教学经验、探索数学教学发展动向的基础上，借鉴了高职院校数学教材改革中一些成功的实践，根据高职高专教育人才培养目标和教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学的基本要求》，优选教学内容，编写了这套《高等数学》教材.

在编写过程中，我们以教育部关于三年制高职高专教育的教学大纲为重要依据，以“必须、够用”为原则，以满足专业需要为目标，力争让这套书能在教学水平、科学水平、思想水平上符合人才培养目标及课程教学的基本要求. 这套教材取材合适、深度适宜，题量能够达到巩固数学基本理论和掌握基本方法之目的，教材体系符合认知规律，富有知识性、可读性和趣味性，有利于激发学生学习数学的兴趣和能力的培养.

本书为这套教材的上册，不但吸收了同类教材的优点，还具有如下特色：

(1) 注意结合各专业的特点，设定内容模块，各模块的内容比较精炼，不同专业的学生可以选取不同的模块.

(2) 在内容的编排上力求打破传统的教材体系，做到“精选内容、突出重点、主次分明、注重应用、讲求实效.”

(3) 不片面追求理论上的系统性，删除繁琐理论的推导和证明，以解释清楚有关理论为度，或给出几何直观解释.

(4) 注重培养学生把实际问题转化成数学模型的能力，使学生消化数学思想和方法.

本书主编为肖胜中，副主编为姚新钦、李汉荣、谭旭平、符传宏．其中第1章由符传宏编写，第2章由谭旭平编写，第3章由李汉荣编写，第4章由姚新钦编写，第5章由王树勇和肖胜中编写，第6～9章由肖胜中编写．最后由肖胜中从教材的自身体系出发，进行了统稿、修改和整理．

在编写过程中，得到了学校和东校区领导的大力支持和帮助，熊炎副教授、钟前明讲师进行了校对并提出了建议，李东梅为该书的出版做了大量的工作，在此表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，书中可能存在不少疏漏，恳请广大读者批评指正．

编　者
2006年3月

目　　录

第一模块　微积分

第一模块　微积分

第1章　函数、极限与连续

1.1　函　数

在千姿百态的物质世界中，变化的量随处可见．这些变化的量往往不是孤立地存在的，而是普遍存在着相互制约的关系，这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念——函数．函数是数学中重要的概念之一，是研究各种变化的量的一个非常重要的工具．本章在中学数学已有函数知识的基础上，帮助读者进一步理解函数的概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数等基本概念，以及它们的一些主要性质，为微积分的学习奠定基础．

1.1.1　函数的概念

(1) 常量与变量

在某一变化过程中始终保持不变的量称为常量．例如，物体的重力加速度、圆周率 π 都是常量，某种商品的价格、搭乘公交车的票价是在某一段时间内保持不变的量．常量通常用字母 a，b，c，d 等来表示．

把在某一变化过程中可以取不同数值的量称为变量．例如，室外的温度、行驶中的汽车速度、股票市场的指数都是在不断变化的，因此它们都是变量．对于一个变量，它可能取得的数值所构成的集合称为这个变量的变动区域，简称变域．变量通常用字母 x，y，z，s，t 等来表示；变域常用大写字母来表示，如 X 表示变量 x 的变域．当某些变量有特定的经济含义时，也用大写字母表示，比如常用 C 表示成本、R 表示收入、L 表示利润等．

特别地，常量与变量的概念是相对的．同一个量，在某个过程中是常量而在另一过程中则可能是变量，反之亦然．例如，某商品的价格在一段较短的时间内是常量，但在一段较长的时间内则是变量．

(2) 函数的定义

定义1　设 D 是一非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某种对应法则 f，y 都有确定的数值与之相对应，则称 y 为定义在数集 D 上 x 的函数，记作 $y=f(x)$．x 称为自变量，数集 D 称为函数的定义域，y 称为因变量或函数，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与之相对应的函数值的集合 $M=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域，f 是函数的对应法则．

在定义 1 中，若对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in M$ 与之相对应，则称之为单值函数，否则称为多值函数.

(3) 函数与函数值的记号

根据定义 1，y 是x 的函数可记为$y=f(x)$，但在同一个问题中，如需要讨论几个不同的函数，就要用不同的函数记号来表示. 比如，以 x 为自变量的函数可以表示为$F(x)$，$\Phi(x)$，$y(x)$，$s(x)$等.

函数 $y=f(x)$，当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值可记为 $y\big|_{x=x_0}$或 $f(x_0)$.

例 1 若 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}-1$，求 $f(2)$，$f(a)$.

解

$$f(2)=\frac{2\times 2-1}{2+3}-1=-\frac{2}{5},$$

$$f(a)=\frac{2a-1}{a+3}-1=\frac{2a-1-(a+3)}{a+3}=\frac{a-4}{a+3}.$$

例 2 已知某种产品的成本 C(单位：元)与产量 q(单位：件)之间的函数关系式为 $C(q)=1\ 000+\dfrac{q^2}{2}$，求产量为 60 件时的成本是多少元?

解 根据题意得，

$$C(60)=1\ 000+\frac{60^2}{2}=2\ 800(\text{元}).$$

(4) 函数的两个决定性要素

根据定义 1 可见，函数的两个决定性要素是(1) 定义域；(2) 对应法则.

若两个函数的定义域和对应法则完全相同，则称这两个函数是同一函数. 例如当 x，u 的变化范围相同时，$y=3x-1$ 和 $y=3u-1$ 就是相同的函数. 由此可见，函数与表示其变量的字母无关.

(5) 函数的表示法

(a) 解析法(又称公式法) 用数学式子来表示两个变量之间的对应关系. 如函数 $y=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$和 $y=|3x+1|-x^2$ 都是用解析法来表示的函数.

对于用解析法来表示的函数，需要注意以下几个问题：

① 若没有加以特殊的限制，则该函数的定义域就是使表达式有意义的所有点构成的集合，这种定义域又称为函数的自然定义域. 求函数的自然定义域要注意以下几点：

(ⅰ) 在分式中，分母不能为零；

(ⅱ) 在根式中，负数不能开偶次方根；

(ⅲ) 在对数中，真数要大于 0；

(ⅳ) 在三角函数式中，要符合三角函数的定义域；

(ⅴ) 对于实际问题要结合实际情况进行分析.

若函数表达式中含有分式、根式、对数式或三角函数式，则函数的定义域应取各个部分定义域的交集. 这就是求函数的定义域的方法.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$；(2) $f(x)=\ln\dfrac{x-2}{x-3}$；(3) $f(x)=\arccos\dfrac{2x+1}{3}$.

解　(1) 由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x^2-4\neq 0\end{cases}$ 得 $-2<x<2$ 或 $2<x<+\infty$，即函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$；

(2) 由 $\dfrac{x-2}{x-3}>0$ 得 $x>3$ 或 $x<2$，即函数的定义域为 $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$；

(3) 由 $-1\leqslant\dfrac{2x+1}{3}\leqslant 1$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 1$，即函数的定义域为 $[-2,1]$.

② 若函数 y 可以用含自变量 x 的关系式来表示，如 $y=3x-x^2$，$y=e^{2x}-x$ 等，这种形式的函数称为显函数. 若函数是由一个含和的方程所确定的，如 $y+2x-3=0$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 等，这种形式的函数称为隐函数. 某些隐函数可以通过变化变成显函数，这个变化过程称为隐函数的显化.

③ 有些问题中，两个变量之间的关系无法只用一个数学式子表达，需要用两个或两个以上的式子才能表达完整，这样的函数称为分段函数.

例如，某超级市场举行优惠活动，某种饮料原价为 3 元，若顾客一次性购买该种饮料 5 瓶或 5 瓶以上，则获得 8 折优惠. 那么销售收入 R 与销售量 Q 之间的关系函数为

$$R=\begin{cases}3Q, & 0\leqslant Q<5,\\ 3Q\cdot 0.8, & Q\geqslant 5.\end{cases}$$

这是一个分段函数. 其定义域是各段自变量取值集合的并集. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算.

例 4　已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ x-2, & 0<x\leqslant 2,\\ 2-x, & 2<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(3)$.

解　函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $-1\in(-\infty,0]$，所以 $f(-1)=-(-1)=1$；

因为 $1\in(0,2]$，所以 $f(1)=1-2=-1$；

因为 $3\in(2,+\infty)$，所以 $f(3)=2-3=-1$.

用解析法表示两个经济量之间的函数关系，便于利用相应的数学方法进行研究，可以比较全面地反映出两个经济量之间的内在联系. 这种函数解析式，在经济学中称为经济方程.

(b) 表格法(又称列表法)　用一个表格来表达函数关系式的方法.

例 5　某电视台每天都播发天气预报，据统计某地方 2004 年 9 月 9 日～18 日每天的最高气温如表 1-1 所示：

表 1-1

日　期	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
最高气温(℃)	29	27	28	26	24	25	27	26	25	24

这是用表格表示的函数．表 1-1 表示温度是日期的函数，这里不存在任何计算温度的公式，但每一天都会产生出唯一的最高温度，对每个日期都有一个与之相对应的唯一最高气温．

(c) 图式法(又称图像法)　在坐标平面上用一条曲线来表示函数关系的方法．

图 1-1

例 6　某河道的一个断面图形如图 1-1 所示．其深度 y 与 O 点到测量点的距离 x 之间的对应关系可由图 1-1 中的曲线表示．这里深度 y 与测距 x 的函数关系是用图形来表示的，它的定义域是 $D=[0,\ b]$．

1.1.2　函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $y=f(x)$，其定义域 D 是关于原点对称的，若对 D 内的任意 x，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数．

若对 D 内的任意 x，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数．

若函数 $f(x)$ 对于 D 内的任意 x 既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 是 D 上的非奇非偶函数．

奇函数和偶函数都具有对称性，从图像可知，奇函数的图像是关于原点对称的，而偶函数的图像是关于 y 轴对称的，只要知其一半，便可知其全部．

例 7　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2-1$；(2) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{5}$；(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$．

解　(1) 函数的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，关于原点对称，对于 $\forall x\in(-\infty,\ +\infty)$，

$$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2-1$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的偶函数；

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，关于原点对称，对于 $\forall x\in(-\infty,\ +\infty)$，

$$f(-x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{5}=-\frac{e^{-x}-e^{x}}{5}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{5}$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的奇函数；

(3) 函数的定义域为 $(-1,\ 1)$，关于原点对称，对于 $\forall x\in(-1,\ 1)$，

$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 是 $(-1,\ 1)$ 上的奇函数．

(2) 函数的单调性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内有定义，若对于 $(a,\ b)$ 内的任意两点 $x_1,\ x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是单调增加的，$(a,\ b)$ 称为函数的单调增加区间；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内是单调减少的，$(a,\ b)$ 称为函数的单调减少区间．

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数．单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间．单调增加函数的图像是沿 y 轴正向逐渐上升的，如图 1-2 所示；单调减少的函数的图像是沿 y 轴正向逐渐下降的，如图 1-3 所示．

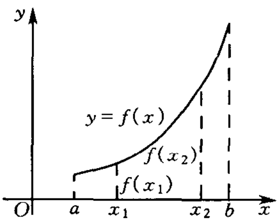

图 1-2

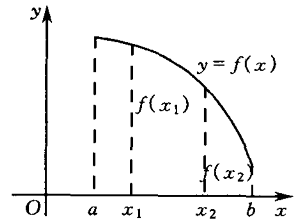

图 1-3

例 8　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(-1, 0)$内是单调减少的．

解　在区间$(-1, 0)$内任取两点 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，那么 $x_1-x_2<0$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0,$$

所以

$$f(x_1)>f(x_2).$$

根据函数单调减少的定义可知，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(-1, 0)$内是单调减少的．

(3) 函数的有界性

定义 4　设函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，若存在一个正数 M，使得对于区间(a, b)内的一切 x 值，对应的函数值 $y=f(x)$都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有界．若这样的 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内无界．

定义 4 同样适用于其他有限区间与无限区间．

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为对于任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $|\cos x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$．又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[1, 2]$上是有界的，因为对于任意的 $x\in[1, 2]$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$．但 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0, 1)$上是无界的，因为对于任意的 $x\in(0, 1)$，不存在正数 M，使得 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立．

在实际问题中，一些用解析法表示的函数，由于问题的要求，常常成为有界函数．比如，某种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 P 满足关系式 $Q=20-2P$，由于 Q 表示需求量，$Q\geqslant 0$，于是当 $0<P<10$ 时，则 $|Q|<20$，这说明它是一个有界函数．

(4) 函数的周期性

定义 5　对于函数 $y=f(x)$，若存在一个不为零的正数 T，使得对于定义域 D 内的一切 x，都有$(x\pm T)\in D$，且等式 $f(x+T)=f(x)$都成立，则称函数 $y=f(x)$为周期函数．T 称为这个函数的一个周期．

一个以 T 为周期的周期函数，它的图像在定义域内每个长度为 T 的相邻区间上，有相同的形状．如图 1-4 所示．

由定义 5 可知，若 T 是周期函数的一个周期，则 T 的任意整数倍也是$f(x)$的周期．最

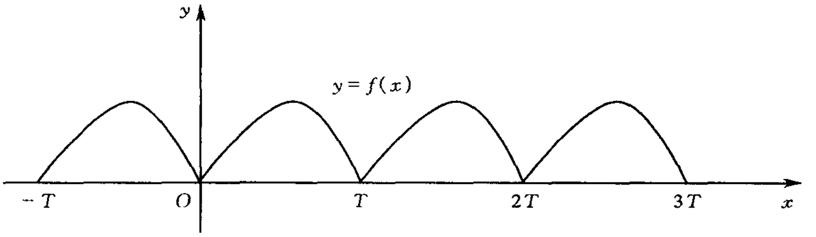

图 1-4

小正数T称为周期函数的最小正周期. 因此，今后在讨论周期函数的周期时只讨论它的最小正周期. 例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$是以 $T=\pi$ 为周期的周期函数.

1.1.3 反函数

设某种商品的单价为 P(常数)，销售量为 Q，则收入 R 是销售量Q 的函数$R=P\cdot Q$. 这时 Q 是自变量，R 是Q 的函数. 若已知收入 R，反过来求销售量 Q，则有 $Q=\frac{R}{P}$. 这时 R 是自变量，Q 变成R 的函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 若对于 M 中的每一个y 值，都可以从关系式确定唯一的 $x(x\in D)$值与之相对应，这样由 y 确定x 的函数称为函数$y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 M，值域为 D，并称 $y=f(x)$为直接函数. 当然也可以说 $y=f(x)$是 $x=f^{-1}(y)$的反函数，也就是说它们互为反函数.

通常，用 x 表示函数的自变量，用 y 表示函数的因变量，所以在理论反函数式 $x=f^{-1}(y)$中，将字母 x，y 互换，得到实际应用的反函数关系式 $y=f^{-1}(x)$.

函数的图像与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 9 求函数 $y=e^x+1$ 的反函数.

解 由 $y=e^x+1$ 得 $y-1=e^x$，$x=\ln(y-1)$.

交换 x 和y，得 $y=\ln(x-1)$，即 $y=\ln(x-1)$是 $y=e^x+1$ 的反函数.

1.1.4 初等函数

(1) 基本初等函数

以下 6 种函数称为基本初等函数.

① 常数函数：$y=c$ (c 为常数).

② 幂函数：$y=x^\alpha$(α 为任意实数).

③ 指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$).

④ 对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$). 特别地，当 $a=e$时，$y=\ln x$ 称为自然对数；当 $a=10$ 时，$y=\lg x$ 称为常用对数.

⑤ 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

⑥ 常用反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数在中学都已学过，它们是微积分中所研究对象的基础.

(2) 复合函数

在经济活动中，经常会遇到这样的问题：一般来说，销售收入 R 可看做是销售量Q 的函数，而销售量 Q 又可以看做是时间t 的函数，时间 t 通过销售量Q 间接地影响销售收入R，则销售收入 R 可以看做是时间t 的函数. R 与t 的这种函数关系在数学上称做一种复合的函数关系.

定义 7　设 y 是u 的函数$y=f(u)$，u 是x 的函数$u=\varphi(x)$，若 $u=\varphi(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域的交集非空，则 y 通过变量u 构成x 的函数，称为 x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$.其中，x 是自变量，u 是中间变量.

复合函数 $y=f(\varphi(x))$的定义域与 $u=\varphi(x)$的值域不一定相同，有时只是 $u=\varphi(x)$的值域的一部分. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=x^3+1$ 能构成复合函数 $y=\sqrt{x^3+1}$，因为 $u=x^3+1$ 的值域为$(-\infty, +\infty)$，而 $y=\sqrt{u}$的定义域为$[0, +\infty)$，前者函数的值域部分包含在后者函数的定义域中；又如，$y=\ln u$，$u=-x^2$ 不能构成复合函数，因为 $u=-x^2$ 的值域为$(-\infty, 0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为$(0, +\infty)$，前者函数的值域完全没有被包含在后者函数的定义域中.

例 10　已知 $y=\ln u$，$u=\arccos x$，将 y 表示成x 的函数.

解　$y=\ln\arccos x$.

例 11　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；(2) $y=\tan^2 2x$；(3) $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

解　(1) $y=\sqrt{x^2-1}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-1$ 复合而成的；

(2) $y=\tan^2 2x$ 是由$y=u^2$，$u=\tan v$，$v=2x$ 复合而成的；

(3) $y=e^{\sqrt{x+1}}$是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合而成的.

(3) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而成并且可以用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如，$y=\ln\arccos x$，$y=\tan^2 2x$，$y=e^{\sqrt{x+1}}$等都是初等函数，但

$$y=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 2x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

是不能用一个解析式表示的函数，所以不是初等函数，而

$$y=|x|=\begin{cases} -x, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

是初等函数.

(4) 经济类函数举例

在一项经济活动中往往会涉及多个经济量，这些经济量之间，存在着各种各样的依存关系，其中一个量的变化与其他多个量的变化有关. 用数学方法解决经济问题时，必须找出经济量之间的函数关系，建立数学模型.

① 需求函数

某一商品的需求量是指在一定的价格水平下，消费者愿意而且有能力支付购买的商品

量．消费者对商品的需求量是由多种因素决定的，而商品的价格是影响需求量的一个主要因素，当然消费者收入的增减、季节的变换等都会影响需求量．现假定除价格以外的其他因素均为常量，只是研究需求量与价格的关系．

设商品的价格为 P，需求量为 Q，那么 $Q=f(P)$称为需求函数．在一般情况下，商品的价格越高，需求量就会越小；商品的价格越低，需求量就会越大．也就是说，需求函数是单调减少函数．

根据经济中的统计数据，常见的需求函数有以下几种类型：

① 线性函数：$Q=a-bP \quad (a>0,\ b>0)$；

② 幂函数：$Q=kP^{-a} \quad (k>0,\ a>0)$；

③ 指数函数：$Q=a\mathrm{e}^{-bP} \quad (a>0,\ b>0)$．

例 12 某商场内某种品牌的影碟机每台售价为 500 元时，每月的销售量为 2 000 台；若每台售价为 450 元时，每月可多销 400 台．试求该品牌影碟机的线性需求函数．

解 设该种品牌影碟机的需求函数为 $Q=a-bP$，则

$$\begin{cases}2\,000=a-500b,\\ 2\,000+400=a-450b.\end{cases}$$

解得 $a=6\,000$，$b=8$．所以该品牌影碟机的需求函数为

$$Q=6\,000-8P.$$

② 供给函数

某一商品的供给量是指在一定的价格水平下，生产者愿意生产并可供出售的商品量．与需求量一样，供给量也是由多种因素决定的．同样假定除价格以外的其他因素均为常量，则供给量 Q 就是价格 P 的函数，记作 $Q=\varphi(P)$．在一般情况下，商品价格低，生产者不愿意生产，供给就少；商品的价格高，生产者愿意生产并且能够向市场提供的商品就多，所以供给函数是单调增加的．

根据经济学中的统计数据，常见的供给函数有以下几种类型：

① 线性函数：$Q=aP-b \quad (a>0,\ b>0)$；

② 幂函数：$Q=kP^{a} \quad (k>0,\ a>0)$；

③ 指数函数：$Q=a\mathrm{e}^{bP} \quad (a>0,\ b>0)$．

若市场上某一商品的需求量恰好等于供给量，则称此时市场处于供需平衡状态，此时的商品价格称为均衡价格．市场上的商品价格将围绕均衡价格上下波动．

例 13 某商品的需求函数和供给函数分别为 $Q=36-4P$，$Q=-12+8P$，求出该商品的均衡价格以及此时的供给量．

解 市场达到均衡价格时，供给量与需求量相等，即

$$36-4P=-12+8P,$$

解得 $P=4$，则 $Q=20$．

③ 成本函数

成本是生产一定数量产品所需要的各种生产要素投入的总费用，通常分为固定成本和可变成本．固定成本是指支付固定生产要素的费用，包括厂房、机器设备的折旧费、广告费等，记作 C_1；可变成本是指支付可变生产要素的费用，包括原材料、能源消耗、工人工资等，它是随着产量的变化而变化的，记作 $C_2(Q)$．

设某产品的产量为 Q，总成本为 C，总成本函数记为

$$C=C(Q)=C_1+C_2(Q).$$

例 14　已知某种产品的成本函数为 $C=4\ 000+\frac{Q^2}{4}$，求当生产 100 个此产品时的总成本和平均成本.

解　当 $Q=100$ 时，则

$$C=4\ 000+\frac{100^2}{4}=6\ 500,$$

$$\overline{C}=\frac{C}{Q}=\frac{6\ 500}{100}=65.$$

④ 收益函数

总收益是指生产者出售一定产量产品所得到的全部收入；平均收益是指生产者出售一定量产品，平均每出售单位产品所得到的收入，即单位产品的售价.

用 Q 表示出售的产品量，R 表示总收益，$\overline{R}$ 表示平均收益，则

$$R=R(Q),\ \overline{R}=\frac{R(Q)}{Q}.$$

若产品的价格为 P，则

$$R(Q)=PQ,\ \overline{R}=P.$$

⑤ 利润函数

利润是生产中获得的总收益与总成本之差，即

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

例 15　某厂每批生产某种产品 x 单位时费用为 $C(x)=5x+200$(元)，得到的收入为 $R(x)=10x-0.01x^2$(元)，求每批生产多少单位时，才能使利润最大?

解　总利润为

$$\begin{aligned}L(x)&=(10x-0.01x^2)-(5x+200)\\&=5x-0.01x^2-200\\&=-(25-0.1x)^2+425,\end{aligned}$$

所以当 $x=250$ 时，才能获得最大利润为 425 元.

习题 1.1

1. 判断下列各题中的两个函数是否相同：

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $f(x)=x-1$；　(2) $f(x)=x$ 与 $f(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x$ 与 $f(x)=(\sqrt{x})^2$；　(4) $f(x)=|x|$ 与 $f(x)=\sqrt{x^2}$；

(5) $f(x)=\arccos x$ 与 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(6) $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$ 与 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)$；