

重点高中学科指导

数 学

(第二版)

复旦大学附属中学

秦杜馨 姚 莉 郑剑敏 李秋明
黄全京 马晓萍 陈金辉 张敏峰 编

復旦大學 出版社

前 言

为了扩充自己的知识面,巩固提高自己的数学学习成绩,许多家长、学生奔走在各大书店中,为了寻找一本适合于自己的好的教学参考书。

复旦大学附属中学是一个具有数学特色的学校,在高考、数学竞赛及研究性学习中都有骄人的成绩。复旦大学附属中学有一支在教学上严谨、踏实、富有进取精神的师资队伍,能使学生在高中三年的学习中受到严格、扎实的基础教育,并能使学生更具有分析问题、解决问题的能力 and 开拓、创新的精神。

本书由复旦大学附属中学数学组的骨干教师编写,适合于区重点以上的学生阅读参考。书中高一部分由姚莉、秦杜馨编写;高二部分由郑剑敏、李秋明编写;高三部分由黄全京、马晓萍、陈金辉、李秋明、张敏峰编写。

作 者

2004 年 12 月

目 录

上篇 高一、高二同步复习

第1章 集合与命题

1.1 集合

例题精选 1

测试卷

卷 A 3

卷 B 4

1.2 命题

例题精选 5

测试卷 6

1.3 数与式

例题精选 7

测试卷

卷 A 8

卷 B 9

1.4 方程

例题精选 9

测试卷 11

1.5 一次函数与二次函数

例题精选 12

测试卷

卷 A 15

卷 B 16

第2章 不 等 式

例题精选 17

测试卷

卷 A	19
卷 B	20

第 3 章 函数的基本性质

例题精选	21
测试卷	23

第 4 章 幂函数 指数函数 对数函数

例题精选	25
测试卷	
卷 A	28
卷 B	29

第 5 章 三角比

5.1 任意角的三角比

例题精选	31
测试卷	32

5.2 三角恒等式

例题精选	33
测试卷	
卷 A	34
卷 B	35

5.3 解三角形

例题精选	36
测试卷	36

5.4 和差化积与积化和差

例题精选	37
测试卷	
卷 A	38
卷 B	39

第 6 章 三角函数

6.1 三角函数

例题精选	41
测试卷	

卷 A	43
卷 B	44
卷 C	45

6.2 反三角函数和最简三角方程

例题精选	46
测试卷	
卷 A	49
卷 B	50

第 7 章 空间直线 平面

7.1 平面的性质 空间两条直线

例题精选	51
测试卷	52

7.2 直线与平面 平面与平面

例题精选	53
测试卷	55

第 8 章 多 面 体

例题精选	57
测试卷	
卷 A	58
卷 B	60

第 9 章 行列式和矩阵

例题精选	63
测试卷	64

第 10 章 向 量 初 步

例题精选	66
测试卷	
卷 A	67
卷 B	68

第 11 章 坐标平面上的直线

例题精选	71
------------	----

测试卷	72
-----------	----

第 12 章 圆锥曲线

12.1 圆

例题精选	74
测试卷	75

12.2 椭圆 双曲线 抛物线

例题精选	76
测试卷	
卷 A	79
卷 B	80

第 13 章 坐标变换

例题精选	81
测试卷	82

第 14 章 参数方程与极坐标

例题精选	83
测试卷	84

第 15 章 复数

15.1 复数的概念

例题精选	86
测试卷	88

15.2 复数的三角形式

例题精选	89
测试卷	
卷 A	90
卷 B	91

第 16 章 数列 数列极限 数学归纳法

例题精选	93
测试卷	
卷 A	96
卷 B	98

第 17 章 排列 组合 概率与统计初步

例题精选	100
测试卷	
卷 A	101
卷 B	102
测试卷答案	104

下篇 高三同步复习

第一部分 单元复习

单元复习一(代数 1)	128
单元复习二(代数 2)	129
单元复习三(代数 3)	130
单元复习四(代数 4)	132
单元复习五(代数 5)	132
单元复习六(代数 6)	133
单元复习七(代数 7)	134
单元复习八(代数 8)	135
单元复习九(代数 9)	135
单元复习十(代数 10)	136
单元复习十一(代数 11)	137
单元复习十二(代数 12)	138
单元复习十三(代数 13)	138
单元复习十四(代数 14)	140
单元复习十五(三角 1)	141
单元复习十六(三角 2)	141
单元复习十七(三角 3)	142
单元复习十八(三角 4)	143
单元复习十九(三角 5)	144
单元复习二十(三角 6)	145
单元复习二十一(三角 7)	146
单元复习二十二(三角 8)	146
单元复习二十三(立体几何 1)	147

单元复习二十四(立体几何 2)	148
单元复习二十五(立体几何 3)	150
单元复习二十六(解析几何 1)	151
单元复习二十七(解析几何 2)	152
单元复习二十八(解析几何 3)	152
单元复习二十九(解析几何 4)	153
单元复习三十(解析几何 5)	154
单元复习答案	155

第二部分 专题指导

函数专题	173
数列专题	175
向量与立体几何专题	183
复数专题	190
应用题专题	195
解析几何专题	202
探索性问题专题	210

第三部分 高考模拟题

模拟题一	214
模拟题二	216
模拟题三	218
模拟题四	220
模拟题五	223
模拟题六	225
模拟题七	228
模拟题八	230
模拟题九	233
模拟题十	236
模拟题十一	238
高考模拟题答案	241

上篇 高一、高二同步复习

第1章 集合与命题

1.1 集合

例题精选

例1 已知集合 A, B 的元素为实数, 其中 $A = \{2, 3, a^3 + 5a^2 - a + 2\}$, $B = \{0, 7, 3a + 5, 2 - a, a^2 + 4a - 2\}$, 且 $A \cap B = \{3, 7\}$, 求实数 a 的值, 并求 $A \cup B$.

解 $\because A \cap B = \{3, 7\}$, $\therefore a^3 + 5a^2 - a + 2 = 7$, 得 $a = -5, a = -1$ 或 $a = 1$.

当 $a = -5$ 时, 代入 B 得 $2 - a = 7$, 此时元素不互异, 舍去;

当 $a = -1$ 时, $B = \{0, 7, 2, 3, -5\}$, 与 $A \cap B = \{3, 7\}$ 矛盾, 舍去;

当 $a = 1$ 时, $B = \{0, 7, 8, 1, 3\}$, 符合题意.

故 $a = 1$. 此时 $A \cup B = \{0, 7, 8, 1, 3, 2\}$.

例2 设集合 $A = \{x \mid x^2 + (2a - 3)x - 3a = 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 + (a - 3)x + a^2 - 3a = 0\}$. 若 $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, 试用列举法表示 $A \cap B$.

解 $\because A \cap B \neq \emptyset$, 可设 A, B 的公共元素为 m , 则有

$$\begin{cases} m^2 + (2a - 3)m - 3a = 0, \\ m^2 + (a - 3)m + a^2 - 3a = 0. \end{cases}$$

可得 $am - a^2 = 0$, $\therefore a = 0$ 或 $m = a$.

若 $a = 0$, 则 $A = \{x \mid x^2 - 3x = 0\} = \{0, 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x = 0\} = \{0, 3\}$, 与 $A \neq B$ 矛盾, $\therefore a \neq 0$.

若 $m = a$, 得 $a = 0$ (舍), $a = 2$, 此时

$$A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{2, -3\}, B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{2, -1\},$$

$$\therefore A \cap B = \{2\}.$$

例3 设全集 $U = \{x \mid x \text{ 为 } 12 \text{ 的约数, 且 } x \in \mathbf{Z}\}$, $A \cap \complement_U B = \{-6, 4, -4\}$, $A \cap B = \{-2, 6\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{-3, 1, 2, 12\}$, 求集合 A 与 B .

解 $U = \{-1, -2, -3, -4, -6, -12, 12, 6, 4, 3, 2, 1\}$,

$$\because \complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U (A \cup B) = \{-3, 1, 2, 12\},$$

$$\therefore A \cup B = \{-1, -2, 3, 4, -4, 6, -6, -12\},$$

又 $A \cap \complement_U B = \{-6, 4, -4\}$, 由韦恩图(图 1.1)可得:

$$A = \{-6, -4, -2, 4, 6\}, B = \{-12, -2, -1, 3, 6\}.$$

例4 若 $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{y \mid y = 14p +$

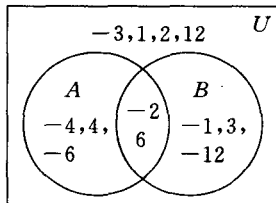


图 1.1

$36q, p, q \in \mathbf{Z}$, 求证: $A = B$ 。

证明 任取 $x \in A$, 则存在 $k_0 \in \mathbf{Z}$, 使 $x = 2k_0 = 2(-35k_0 + 36k_0)$ 。

令 $p' = -5k_0, q' = 2k_0$, 则 $x = 2k_0 = 2(7p' + 18q') = 14p' + 36q'$,

$\therefore p', q' \in \mathbf{Z}, \therefore x \in B$,

$\therefore A \subseteq B$ 。

任取 $x \in B$, 则存在 $p_0, q_0 \in \mathbf{Z}$, 使 $x = 14p_0 + 36q_0 = 2(7p_0 + 18q_0)$,

$\therefore p_0, q_0 \in \mathbf{Z}, \therefore 7p_0 + 18q_0 \in \mathbf{Z}, \therefore x \in A$ 。

$\therefore B \subseteq A; \therefore A = B$ 。

例 5 设 $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x \mid ax^2 - x + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的值。

解 由已知可得 $A = \{-1, 6\}$ 。 $\therefore B \subseteq A, \therefore B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{6\}$ 或 $B = \{-1, 6\}$,

若 $B = \emptyset$, 则 $a \neq 0$ 且 $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 6 < 0$, 得 $a > \frac{1}{24}$;

若 $B = \{-1\}$, 则 $a(-1)^2 - (-1) + 6 = 0$, 得 $a = -7 (\neq 0)$, 代入得 $-7x^2 - x + 6 = 0$, 即 $B = \left\{-1, \frac{6}{7}\right\}$, 矛盾;

若 $B = \{6\}$, 则 $a \cdot 6^2 - 6 + 6 = 0$, 得 $a = 0$, 则 $B = \{x \mid -x + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{6\}$, $\therefore a = 0$;

若 $B = \{-1, 6\}$, 则 $a(-1)^2 - (-1) + 6 = 0$ 且 $a \cdot 6^2 - 6 + 6 = 0$, 得 $a = -7$ 且 $a = 0$, 矛盾。

$\therefore a > \frac{1}{24}$ 或 $a = 0$ 。

例 6 已知 $A = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = a+1\right\}, B = \{(x, y) \mid (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$ 。问当 a 为何值时, $A \cap B = \emptyset$?

解 若 $a = 1, B = \emptyset$, 则 $A \cap B = \emptyset$;

若 $a \neq 1$, 则 $A \cap B$ 即为方程组 $\begin{cases} \frac{y-3}{x-2} = a+1, \\ (a^2-1)x + (a-1)y = 15 \end{cases}$

的解集, 即为方程组 $\begin{cases} y-3 = (a+1)(x-2) & (x \neq 2), \\ (a^2-1)x + (a-1)y = 15 \end{cases} \quad (1.1)$

(1.2)

的解集。消去 y 得: $2(a^2-1)x = 2a^2-3a+16$ 。 (1.3)

当 $a^2 = 1$, 即 $a = -1 (\because a \neq 1)$ 时, 方程(1.3)无解, $\therefore A \cap B = \emptyset$;

当 $a^2 \neq 1$, 即 $a \neq -1 (\because a \neq 1)$ 时, $x = \frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}$ 。

如果 $x = \frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)} = 2$, 则 $a = \frac{5}{2}, a = -4$, 此时 $x = \frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}$ 是方程(1.1)

的增根, 即当 $a = \frac{5}{2}$ 或 $a = -4$ 时, $A \cap B = \emptyset$ 。

综上所述,当 $a = 1$, $a = -1$, $a = \frac{5}{2}$ 或 $a = -4$ 时, $A \cap B = \emptyset$ 。

测 试 卷

卷 A

一、填空题

1. 集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的非空子集有_____个。
2. 已知 $A = \{x \mid 2 < x < 6\}$, $B = \{y \mid y > 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____。
3. 已知 $A = \{x \mid -2 < x < 3\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 则 $A \subset B$ 时, a 的取值范围是_____。
4. 满足 $\{a, b\} \subsetneq A \subsetneq \{a, b, c, d, e, f\}$ 的集合 A 有_____个。
5. 已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2x + a = 0\}$, 如果 $B \subsetneq A$, 则实数 a 组成的集合是_____。
6. 某班 50 名同学的家中,至少订阅 a, b 两种报纸中的一种。已知订阅 a 报的有 34 户,订阅 b 报的有 28 户,则只订阅 a 报纸一种的有_____户。
7. 从集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 中任取两个数作乘积,所得的数组成集合 P , 则集合 P 的所有真子集的个数是_____。

二、选择题

8. 设集合 $M = \{x \mid x \leq \sqrt{2}\}$, $a = \sqrt{11}$, 则下列各式中正确的是()。
A. $a \subsetneq M$ B. $a \notin M$ C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subsetneq M$
9. 设 X, Y 是非空集合, $E = X \cap Y$ 且 $X \not\subseteq E$, 那么 $X \cup E$ 等于()。
A. X B. Y C. $\emptyset$ D. E
10. 设集合 $X = \left\{n \mid \frac{n}{2} \in \mathbf{Z}\right\}$, $Y = \left\{n \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 $X \cap Y$ 等于()。
A. $\{0\}$ B. $\{\emptyset\}$ C. $\emptyset$ D. $\mathbf{Z}$
11. 集合 $M = \{x \mid |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 M 的所有非空子集的个数是()。
A. 8 B. 16 C. 31 D. 32
12. 如果 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{a, c, d, e\}$, $\complement_U X = \{a, b\}$, 其中 U 是全集, 那么 $\complement_U Y \cup X$ 为()。
A. $\{b, c, d, e, f\}$ B. $\{f\}$
C. $\{a, b, c, d, e\}$ D. $\{a, c, d, e, f\}$

三、解答题

13. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\complement_U A \cap B = \{3, 7\}$, $A \cap \complement_U B = \{2, 8\}$, $\complement_U A \cup \complement_U B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 求 $A, B, \complement_U A \cap \complement_U B$ 。
14. 已知 $x^2 + px + q = 0$ 的两个不相等的实根是 α, β , $X = \{\alpha, \beta\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$, $A \cap X = \emptyset$, $X \cap B = X$, 求 p, q 的值。
15. 用列举法表示集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{n}{m+1}, \text{ 其中 } m+n=5, m, n \in \mathbf{N}\right\}$ 。
16. 已知 $A = \{x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x^2 - mx + 2 = 0\}$,

若 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求 a, m 的值。

卷 B

一、选择题

- 下列关系错误的是()。
A. $0 \in \{0\}$ B. $\emptyset \subsetneq \{0\}$ C. $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$ D. $\emptyset \in \{0\}$
- 对于非空集合 X, Y , 若 $X \subsetneq Y$, 则下面集合中表示空集的是()。
A. $\complement_U X \cap Y$ B. $\complement_U X \cup \complement_U Y$ C. $X \cap \complement_U Y$ D. $X \cap Y$
- 已知 $A = \{a, b\}$, $B = \{x \mid x \subseteq A\}$, 那么 B 等于()。
A. $\{a, b\}$ B. $\{\{a\}, \{b\}\}$
C. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ D. $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 设集合 $A = \{x \mid a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0\}$, $B = \{x \mid a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0\}$, 方程 $(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) = 0$ 的解集是()。
A. A B. B C. $A \cap B$ D. $A \cup B$
- 设 $A \cap B = \emptyset$, $D = \{x \mid x \subseteq A\}$, $E = \{y \mid y \subseteq B\}$, 则有()。
A. $D \cap E = \emptyset$ B. $A \cup B = D \cup E$
C. $D \cap E = \{\emptyset\}$ D. $(A \cup B) \in (D \cup E)$

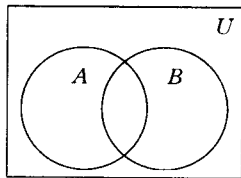
二、填空题

- 已知全集 $U = \{2, 4, a^2 - a + 1\}$, 且 $A = \{a + 1, 2\}$, $\complement_U A = \{7\}$, 则实数 $a =$ _____。
- 已知全集 $U = \mathbb{Z}$, $P = \{x \mid |x| < 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{x \mid |x| \geq 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{x \mid |x| \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$, 试用列举法写出集合 $(P \cap \complement_U S) \cup T =$ _____。
- 已知全集 $U = \{\text{不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, $\complement_U A \cap B = \{3, 17\}$, $A \cap \complement_U B = \{7, 19, 29\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{5, 11\}$, 则 $A =$ _____, $B =$ _____。
- 若 $A = \{y \mid y = -x^2 + 2, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y \mid y = -x + 2, y \in \mathbb{N}\}$, 则 $A \cap B =$ _____。
- 已知集合 $A \subsetneq X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $B \subsetneq Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $X \cap Y = \emptyset$, 则集合 $A \cup B$ 的个数是 _____。

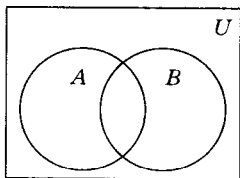
三、解答题

11. 已知全集 U 及其子集 A, B (如图所示), 试用阴影表示下列集合:

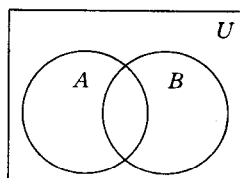
- $\complement_U A \cap \complement_U B$ (图(a));
- $\complement_U A \cap B$ (图(b));
- $\complement_U (A \cup B) \cup (A \cap B)$ (图(c))。



(a)



(b)



(c)

第 11 题图

12. 已知 $A = \{\text{小于 } 23 \text{ 而能被 } 5 \text{ 整除的自然数}\}$, $B = \{\text{小于 } 23 \text{ 而能被 } 3 \text{ 整除的自然数}\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.
13. 设集合 A 有 8 个元素, 集合 B 有 5 个元素, 全集 U 有 15 个元素, $A \cap B \neq \emptyset$, 若 $\complement_U(A \cup B)$ 有 x 个元素, 求 x 的取值范围.
14. 已知非空集合 $A = \{x \mid x^2 + mx + n = 0\}$, $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, 若 $A \cap X = \emptyset$, $A \cap Y = A$, 求 m, n .
15. 设 $A = \{x \mid x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbb{Z}\}$,
- (1) 对于 A 中的任意两个元素 x_1, x_2 , 试问 $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ 是否属于 A ?
 - (2) 当 a, b 互质时, 若 A 中的元素 x 的倒数也是 A 的元素, 试求 a 和 b 之间的关系;
 - (3) 对于给定的整数 b , 试求满足 $0 < a + \sqrt{2}b < 1$ 的 A 中的元素的个数.

1.2 命题

例题精选

例 1 判断下列命题的真假, 并说明理由.

- (1) 如果 $a < b$, 那么 $a^2 < b^2$;
- (2) 三点确定一个圆;
- (3) 任何一个集合必有两个子集.

解 (1) 假命题. $\because$ 若 $a = -2, b = 1$, 有 $a < b$, 但是 $a^2 > b^2$.

(2) 假命题. 若三点在同一直线上时, 就不能确定一个圆.

(3) 假命题. 空集只有一个子集.

例 2 写出命题“ A, B 为集合, U 为全集, 如果 $A \cap B = \emptyset$, 那么 $A \subseteq \complement_U B$.”的逆命题、否命题和逆否命题, 并指出其真假.

解 逆命题: “ A, B 为集合, U 为全集, 如果 $A \subseteq \complement_U B$, 那么 $A \cap B = \emptyset$.”

真命题.

否命题: “ A, B 为集合, U 为全集, 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 那么 $A \not\subseteq \complement_U B$.”

真命题.

逆否命题: “ A, B 为集合, U 为全集, 如果 $A \not\subseteq \complement_U B$, 那么 $A \cap B \neq \emptyset$.”

真命题.

例 3 若 $x \in \mathbb{R}$, 求 $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正实数的 (1) 一个必要非充分条件; (2) 一个充分非必要条件; (3) 充分必要条件.

解 由 $(1 - |x|)(1 + x) > 0$, 解得 $\begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ x < 0 \text{ 且 } x \neq -1, \end{cases}$ 得 $x < 1$ 且 $x \neq -1$. 故

(1) $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正实数的一个必要非充分条件是 $x < 1$ (结论不唯一);

(2) $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正实数的一个充分非必要条件是 $x = 0$ (结论不唯一);

(3) $(1 - |x|)(1 + x)$ 是正实数的充分必要条件是 $x < 1$ 且 $x \neq -1$.

例 4 设集合 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$, 试写出 $B \subseteq A$ 的一个充分不必要条件.

解 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{2, -3\}$, $\because B \subseteq A$, $\therefore B = \emptyset$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-3\}$, $m = 0$ 即为 $B \subseteq A$ 的一个充分不必要条件(此时 $B = \emptyset$)。(此题结论不唯一)

测试卷

一、选择题

- 下列各组中的两个命题互为等价命题的是()。
 - $"A \subseteq B"$ 与 $"A \cup B = B"$
 - $"a \in A"$ 与 $"a \in A \cup B"$
 - $"a \in A \cap B"$ 与 $"a \in B"$
 - $"a \in A \cap B"$ 与 $"a \in A \cup B"$
- $\frac{b}{a} > 1$ 的充分必要条件是()。
 - $a(a-b) = 0$
 - $b > a > 0$
 - $a(b-a) > 0$
 - $b < a < 0$
- 三个数 x, y, z 不全是负数的充分必要条件是()。
 - x, y, z 中至少有一个正数
 - x, y, z 都不是负数
 - x, y, z 中只有一个是负数
 - x, y, z 中至少有一个是非负数
- 设 A, B 为两个集合, C 为非空集合, U 为全集, 则 $A \subseteq B$ 的一个充分不必要条件是()。
 - $B \subseteq A$
 - $\complement_U B \subseteq \complement_U A$
 - $A \cap B = A$
 - $(A \cup C) \subseteq B$
- 如果命题“若 p 则 q ”的逆命题是真命题, 则下列命题中一定为真命题的是()。
 - 若 p 则 q
 - 若 $\bar{p}$ 则 $\bar{q}$
 - 若 $\bar{q}$ 则 $\bar{p}$
 - 以上均不对

二、填空题(填写“充分条件”、“必要条件”或“充要条件”)

- “四边相等”是“一个四边形是正方形”的_____。
- $"x^2 - 1 = 0"$ 是 $"x - 1 = 0"$ 的_____。
- $"m$ 是有理数”是 $"m$ 是实数”的_____。
- $"x = 2"$ 是 $"x^2 - 5x + 6 = 0"$ 的_____。
- $"x < 5"$ 是 $"x < 3"$ 的_____。
- “两边和夹角对应相等”是“两个三角形全等”的_____。
- “一个自然数的末位数为 0”是“这个数可被 5 整除”的_____。
- “两圆的圆心距等于两圆半径之和”是“两圆相切”的_____。
- 已知 A, B 是两个命题, 若 $\bar{A}$ 是 $\bar{B}$ 的充分条件, 则 A 是 B 的_____。
- $"A \cap C \supseteq B \cap C"$ 是 $"A \supseteq B"$ 的_____。
- $"(x-1)(x-2) = 0"$ 是 $"x = 1"$ 的_____。
- $"x_1 > 2$ 且 $x_2 > 2"$ 是 $"x_1 + x_2 > 4$ 且 $x_1 x_2 > 4"$ 的_____。
- $"\frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0"$ 是 $"ax^2 + bx + c = 0 (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)"$ 的两根是不相等的正数”的_____。
- $"b^2 - 4ac > 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0"$ 是 $"ax^2 + bx + c = 0 (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)"$ 的两根是不相等的正数”的_____。
- $"b^2 - 4ac > 0, a > 0, b < 0, c > 0"$ 是 $"ax^2 + bx + c = 0 (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)"$ 的两根是不相等的正数”的_____。

三、解答题

21. 写出命题“如果两个实数的和是有理数,那么这两个数都是有理数”的逆命题、否命题、逆否命题,并指出四个命题的真假。
22. 已知 $A = \{a, a^2, ab\}$, $B = \{1, a, b\}$, 试求 $A = B$ 的充要条件。

1.3 数 与 式

例题精选

例1 已知 $x < 0$, $a > 0$, 试求将 $x\sqrt{a}$ 中的 x 移入根号内所得的式子。

解 $\because x < 0, \therefore -x > 0$, 则 $-x = |x| = \sqrt{x^2}$, $\therefore x\sqrt{a} = -\sqrt{x^2}\sqrt{a} = -\sqrt{ax^2}$ 。

例2 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 求 $a^2 + \frac{1}{2}ab + b^2$ 的值。

解 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = 2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\because 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, $\therefore a = 2, b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

$$\therefore a^2 + \frac{1}{2}ab + b^2 = 4 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 5.$$

例3 化简: $|1-a| - |2a+1| + |a+3|$ 。

解 原式 $= |a-1| - |2a+1| + |a+3|$ 。

$\therefore$ 当 $a < -3$ 时, 原式 $= -(a-1) + (2a+1) - (a+3) = -1$;

当 $-3 \leq a < -\frac{1}{2}$ 时, 原式 $= 2a+5$;

当 $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, 原式 $= -2a+3$;

当 $a \geq 1$ 时, 原式 $= 1$ 。

例4 用反证法证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则可设 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (其中 m, n 为互质的自然数),

则 $2 = \frac{n^2}{m^2}$, $\therefore 2m^2 = n^2$, 即 n^2 是偶数, $\therefore n$ 是偶数, 可设 $n = 2k$ (k 为自然数),

$\therefore 2m^2 = (2k)^2$, 即 $m^2 = 2k^2$, $\therefore m^2$ 是偶数, 得 m 是偶数。

“ m, n 都是偶数”与“ m, n 为互质的自然数”矛盾,

$\therefore \sqrt{2}$ 不是有理数。

例5 已知 $(a-2b-2)^2 + |3a+b-20| = 0$, 求 $4a-7b$ 的值。

解 $\because (a-2b-2)^2 \geq 0$ 且 $|3a+b-20| \geq 0$, $\therefore \begin{cases} a-2b-2=0, \\ 3a+b-20=0, \end{cases}$ 得 $b=2$,

$$\therefore 4a-7b = 10.$$

例6 已知 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, 分别求 $x+x^{-1}$, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 的值。

解 $\because x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, $\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3^2$, 得 $x+x^{-1} = 7$,

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) = 27,$$

$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} + 3 \times 3 = 27$, 得 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 18$ 。

例 7 已知 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$, 求 $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ 的值。

解 令 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = k$, $\therefore a = bk, b = ck, c = dk, d = ak$, 得 $a = ak^4$,

$\therefore a \neq 0$, $\therefore k^4 = 1$, 得 $k = \pm 1$ 。

当 $k = 1$, 即 $a = b = c = d$ 时, $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = 2$;

当 $k = -1$, 即 $a = -b = c = -d$ 时, $\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d} = 0$ 。

例 8 在实数集内分解因式:

(1) $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3$;

(2) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 5y - 25$;

(3) $x^5 + x^4 + 1$ 。

解 (1) $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) = (x - 3)(x + 1)(x - 1)^2$ 。

(2) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 5y - 25 = (2x - y)(x - 2y) - 5x - 5y - 25 = (2x - y + 5)(x - 2y - 5)$ 。

(3) $x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + 1 + x^3 - x^3 = x^5 + x^4 + x^3 + 1 - x^3 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$ 。

测 试 卷

卷 A

一、用列举法写出下列集合

1. $\{4290 \text{ 的质因数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. $\left\{x \mid \frac{8}{x-2} \in \mathbf{Z}, \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. $\{y \mid y = \sqrt[n]{x}, n \text{ 是质数又是偶数}, x \text{ 是小于 } 10 \text{ 的完全平方数}\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、选择题

4. 3^n 是 18^{10} 的因子, 则最大的整数 n 是()。

A. 10

B. 15

C. 20

D. 25

5. 十进制为 234 的数在三进制应为()。

A. 22210

B. 22110

C. 22200

D. 22220

6. 与 $\frac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$ 最接近的整数是()。

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

三、计算题

7. 若等式 $|x+2| = x+2$, $|2x-1| = -(2x-1)$ 同时成立, 求 x 的取值范围。

8. (1) 计算 $\frac{1}{2}\sqrt{18} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{7+\sqrt{40}} + 0.198^\circ$;

(2) 设 $x < -1$, 化简 $2 - |2 - |2 - x||$ 。

四、解答题

9. 已知 $n = \overline{13xy45z}$ 能被 792 整除, 试确定 x, y, z 的值。
10. 既约分数的分母为 30, 求小于 10 的所有这样的正分数的和。
11. 求证: 三个连续自然数的立方和能被 9 整除。

卷 B

一、填空题

1. $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{(a+3)^{2n}} = -(a+3)$ 成立的集合是_____。
2. 若 $|x-3| + (a+2x)^2 = 0 (x \in \mathbf{R})$ 成立, 则实数 $a =$ _____。

二、在实数集内分解因式

3. $(x+y)^3 - (x+y)(1-x-y) + 1$ 。
4. $x^n - 5x^{n-1} - 14x^{n-2}$ 。
5. $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x - 2) - 72$ 。

三、化简

6. $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$ 。
7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ 。

四、计算题

8. 设 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求:
(1) $|x - x^{-1}|$; (2) $x^3 + x^{-3}$; (3) $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$; (4) $2x^2 - 6x + 3$ 。
9. 设自然数 x, y, m, n 满足条件 $\frac{x}{y} = \frac{y}{m} = \frac{m}{n} = \frac{5}{8}$, 求 $x + y + m + n$ 的最小值。
10. 已知 $a + b + c = 0$, 求 $\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$ 的值。

五、解答题

11. 某人以平均每小时 3 km 的速度登山, 下山以平均每小时 6 km 的速度沿原路返回, 求他的平均速度。

1.4 方程

例题精选

例 1 解下列方程:

- (1) $|x-3| + |2-x| = 3$;
(2) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{4}{x^2-1}$;
(3) $4x^2 - 10x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 17$ 。

解 (1) 当 $x < 2$ 时, $3 - x + 2 - x = 3$, $\therefore x = 1$;