现代物理基础丛书 8

物理学中的群论

（第二版）

马中骐 著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书　　8

物理学中的群论

（第二版）

马中骐　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书与第一版相比在教学体系上做了重大调整. 基础内容包括群的基本概念、群的线性表示理论、转动群、晶体对称性和李群与李代数基本知识等, 适合物理专业各类学生的群论教学需要, 也适合理论化学专业研究生参考. 进一步的内容(带星号)包括正多面体对称群、置换群、杨算符和各种矩阵群的不可约张量基计算等, 适合理论物理专业研究生的群论教学需要. 附录中提供了一些供参考和查阅的内容, 与本书配套的《群论习题精解》涵盖了本书中全部习题的解答, 这些资料和表格, 有利于学生自学和年青物理学家查阅.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的群论/马中骐著. —2版. —北京: 科学出版社, 2006
(现代物理基础丛书; 8)

ISBN 7-03-016755-4

Ⅰ.物… Ⅱ.马… Ⅲ.群论-应用-物理学-研究生-教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 000921 号

责任编辑: 胡 凯/责任校对: 张 琪
责任印制: 安春生/封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1998年1月第 一 版 1998年1月第一次印刷
2006年2月第 二 版 开本: B5(720×1000)
2006年2月第6次印刷 印张: 36
印数: 10 601～13 600 字数: 652 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<双青>)

前　言

对称性研究在物理学各个领域都起着越来越重要的作用. 群论是研究系统对称性质的有效工具, 因此群论方法已逐渐成为物理工作者必备的基础知识. 许多物理专业或理论化学专业的研究生把群论课选作学位课或选修课.

《物理学中的群论》(第一版) 由科学出版社于 1998 年出版, 当时作为“中国科学院研究生教学丛书”之一, 中国科学院研究生院和不少高等院校选作物理专业研究生的群论教材或主要参考书. 短短 7 年间此书共印了五次, 总印数 10600 本. 在使用过程中, 作者收到不少教师和同学的来信来电, 除了表达对作者的鼓励外, 也提出不少中肯的意见. 意见归纳起来主要可分三个方面：一是篇幅较大, 不能适合不同情况的教学需要. 必读部分、选读部分和查阅部分混在一起没有区分, 不便作为教材使用; 二是书中有的习题偏难, 不容易找到简洁明了的计算方法, 希望能看到供参考的习题解答; 三是结合科研和教学各种情况的需要, 希望能提供一些供查阅的常用资料和表格, 以及反映近几年在物理学中所应用的群论方法的新发展. 本书就从这三方面着手, 结合作者在这几年科研和教学的新经验, 对原书做了重大的调整. 重新组织李群和李代数的教学体系, 认真选择教材以区别对待各种不同的需要, 增加一些群论方法发展的新内容, 融入科研的新成果和教学的新体会. 希望本书改写后能更适合当前的群论教学需要.

经过调研, 目前各高等院校和科研院所物理专业研究生群论课程的课时很不相同. 多的约 120 学时, 适用于理论物理专业的学生; 少的约 60 学时, 适用于物理学其他专业. 本书中不带星号的章节是必读部分, 适合 60 学时的教学需要. 如果课时多于 60 学时, 可以按学生的具体情况, 灵活选用带星号的章节, 建议首先选用第六章的内容, 其次是第八章的内容, 再其次是第九章的内容. 全部选用则适合 120 学时的教学需要. 附录部分供参考和查阅之用.

2002 年科学出版社出版了《群论习题精解》. 此书涵盖了《物理学中的群论》第一版中全部习题解答, 列出了一些供查阅的常用资料和表格, 同时增加了解题必备知识的简明介绍. 原想把这些简明介绍作为一本群论教材的简写本, 但看来还不够系统, 不能满足需要. 据反映, 此书在帮助读者解题方面起到了一定的作用. 书中列出的一些计算结果和重要结论的证明, 也有利于参考和查阅. 虽然《群论习题精解》是按照《物理学中的群论》第一版的章节安排编写的, 但还基本适合第二版的需要. 在《群论习题精解》中已经列举的一些计算结果和计算方法, 本书不再重复, 如正二十面体中一些结果的计算方法, 置换群不可约表示直乘分解的克莱布施 - 戈登级数, 若干点群和置换群群代数中的正交归一的不可约基的形式, 非紧致李群无

穷维幺正表示的研究方法举例等. 对物理专业的学生来说, 群论是一个数学工具. 要真正掌握一个数学工具, 独立地完成计算练习是必不可少的.《群论习题精解》仅供同学在做完习题后参考, 不应代替学习中必要的独立计算练习.

《物理学中的群论》第一版对第七章以后内容的编排初衷, 是希望学生在接触抽象的李群和李代数理论之前, 对物理上常见的李群 SU(N) 和 SO(N) 先有一个直观的了解, 有了具体实例更便于掌握抽象理论. 但实践证明, 在不了解李群和李代数的一般理论时, 对 SU(N) 群和 SO(N) 群的性质很难有深入的理解, 而且这样的安排在材料上难免有重复. 本书第二版在体系上做了大的调整, 先讲李群和李代数的一般理论, 再分别就 SU(N) 群、SO(N) 群和 USp(2ℓ) 群介绍不可约张量基的计算方法. 对李群和李代数的一般理论, 希望读者把注意力更多投向表示理论, 即计算李代数表示的方块权图方法和计算表示直乘的克莱布施 – 戈登级数的主权图方法.

方块权图方法和主权图方法没有涉及表示空间状态基的波函数性质, 而这些波函数在物理应用中又十分重要. 在波函数的计算方面, 作者这几年有了新的体会, 发展了新的方法. 把波函数的计算放在李群和李代数一般理论的后面讲, 可以讲得更深入更透彻. 对 SO(N) 群来说, 这些状态基的物理意义就是角动量本征函数, 在物理中十分重要. 以前因为计算中所涉及的无迹张量, 很难明显表达出它们的解析形式, 所以很少见到讨论. 作者在把三维空间的广义球谐多项式方法推广到高维空间时, 找到了克服这一困难的方法. 本书从群论角度介绍了高维空间量子三体系统独立的角动量本征函数基的计算方法, 在附录中还详细推导了高维狄拉克方程的径向方程.

对《物理学中的群论》第一版中的其他章节, 再版时在材料选取和教学方法上也做了认真斟酌, 保留了第一版的特点, 提高了教材的可读性, 希望适合各种层面的教学需要. 新版能否达到预期的效果, 还有待实践的检验. 作者诚恳欢迎读者的宝贵意见和批评建议.

本书编写过程中作者得到国家自然科学基金的资助.

马中骐

2005 年于北京

符 号 说 明

$\boldsymbol{a}$	矢量, 三维空间矢量用 $\vec{a}$.
$\hat{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{e}_\mu$	单位矢量.
$\underline{a}$	列矩阵.
Γ	对角矩阵.
$D(R)^{-1}$, $D(R)^T$	矩阵 $D(R)$ 的逆和转置.
$D(R)^*$, $D(R)^\dagger$	矩阵 $D(R)$ 的复共轭和转置共轭.
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$	线性空间或子空间.
$\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$	两线性空间之和.
$\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2$	两线性空间之直和.
AB	数的乘积, 矩阵的乘积或张量, 旋量的直乘.
$\times$	矩阵的直乘, 表示的直乘, 置换群表示的内积.
$\otimes$	两群的直乘, 置换群表示的外积, 杨图的外积.
R, S 等	算符, 变换, 群元素.
$\mathcal{R}$	集合, 复元素.
$\mathcal{C}_\alpha$	类.
$n(\alpha)$	类中元素的数目.
W_α	类中元素之和, 类算符.
g_c	群中包含的类的数目.
$\omega=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}$, $\quad\eta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}$	常用参数.
$\rho=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1),\ \mathrm{mod}\ n$	ρ 取整数, 相差 n 的取值认为相等.
$G'\approx G$	群 G' 和群 G 同构.
$G'\sim G$	群 G' 和群 G 同态.
$D(G)\simeq\overline{D}(G)$	表示 $D(G)$ 和表示 $\overline{D}(G)$ 等价.
$T_a,\ a=1,\ 2,\ 3$	三维转动群自身表示的生成元.
$T_{ab}^{(r)},\ 1\leqslant a\leqslant N,\ r=1,\ 2,\ 3,$	$\mathrm{SU}(N)$ 群自身表示的生成元.
$T_{ab},\ 1\leqslant a\leqslant N$	$\mathrm{SO}(N)$ 群自身表示的生成元.
I_a, I_A, $D(I_A)$	李群表示的生成元.
$C^{jk}_{\mu\nu,JMr}$, $\langle j,\mu,k,\nu\vert J,(r),M\rangle$ 或 $\langle \boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{m}_1;\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{m}_2\vert\boldsymbol{M},(r),\boldsymbol{m}\rangle$	克莱布施 – 戈登系数, 无重表示时 r 可省略.
$\vert j,\mu\rangle\vert k,\nu\rangle$, $\vert\mu\rangle\vert\nu\rangle$, $\vert\boldsymbol{m}_1\rangle\vert\boldsymbol{m}_2\rangle$ 或 $\vert\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{m}_1\rangle\vert\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{m}_2\rangle$	相似变换前的状态基.

$\|\|J,(r),M\rangle$ 或 $\|\|\boldsymbol{M},(r),\boldsymbol{m}\rangle$	相似变换后的状态基, 无重表示时 r 可省略.
$C_{jk}{}^{\ell}$, $C_{AB}{}^{D}$	李群的结构常数.
$\vec{V}(x)=\sum_a \vec{e}_a \boldsymbol{V}(x)_a=\sum_a \vec{e'}_a V(x)_a$	矢量在定坐标系 K 的分量为 $\boldsymbol{V}(x)_a$, 在动坐标系 K' 中的分量为 $V(x)_a$.
$\Psi^j_\mu(x)_\rho$	ρ 是旋量的分量指标, j 和 μ 表此函数基 属 SO(3) 群不可约表示 D^j μ 行.
P_R, $O_R=P_RQ_R$	标量、张量和旋量函数变换算符.
P 和 Q	横向置换和纵向置换.
P_0 和 Q_0	横向对换和纵向对换.
r, t, y_μ	置换的线性组合.
$\mathcal{Y}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$	杨算符、横算符、纵算符.
$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$	协变和逆变张量空间.
$[\lambda]$	杨图或置换群表示.
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_R$	李代数和实李代数.
$\mathcal{H}$	半单李代数的嘉当子代数.
H_j 和 E_α	半单李代数的正则基.
H_μ, E_μ 和 F_μ	半单李代数的谢瓦莱基.
$\boldsymbol{r}_\mu$	素根.
$\boldsymbol{w}_\mu$	基本主权.
$[\lambda]$	SU(N) 群, SO(N) 群和 USp(2ℓ) 群的张量表示.
$[(S)\lambda]$	SO(N) 群自对偶表示.
$[(A)\lambda]$	SO(N) 群反自对偶表示.
$[s]$	SO(N) 群或 SO($2\ell+1$) 群基本旋量表示.
$[\pm s]$	SO(2ℓ) 群不可约基本旋量表示.
$[s(\lambda)]$, $[\pm s(\lambda)]$	SO(N) 群高阶旋量表示.
Δ	单纯李代数全部根的集合.
Δ_+	单纯李代数全部正根的集合.

目　　录

第一章　线性代数复习

群论的主要数学工具是线性代数. 要学好群论, 必须非常熟悉线性代数中的基本概念和运算方法. 虽然我们假定读者已学习过线性代数, 但根据作者的教学经验, 由于读者在过去的学习中所用符号不同, 练习不够, 甚至接受了某些糊涂概念, 有时会给群论学习造成一些不必要的困难. 因此, 在本书之初, 我们先紧密结合物理学, 复习线性代数中的一些基本概念和运算方法, 统一符号, 强调某些容易混淆的概念. 我们愿意提醒读者, 理解这些概念和运算方法, 并不等于能熟练使用它们, 而能熟练使用本章复习的线性代数方法, 必将对以后的群论学习产生很大的帮助.

1.1　线性空间和矢量基

设系统的哈密顿量为 $H(x)$, 它的本征值 E 称为能级或能量. 若 E 是 m 重简并的, 则能找到 m 个线性无关的本征函数 $\psi_\mu(x)$, 满足

$$H(x)\psi_\mu(x) = E\psi_\mu(x) , \qquad \mu = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1.1}$$

其中, x 代表系统所有自由度的坐标. $\psi_\mu(x)$ 的任何线性组合

$$\phi(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x) a_\mu \tag{1.2}$$

仍是 $H(x)$ 的同一本征值的本征函数. 反之, $H(x)$ 的本征值为 E 的本征函数都能表成 $\psi_\mu(x)$ 的线性组合形式 (1.2). $\phi(x)$ 的集合构成 m 维函数空间, 或称线性空间, $\phi(x)$ 称为该空间的矢量; $\psi_\mu(x)$ 称为该空间的函数基, 或称矢量基. 式 (1.2) 中的 a_μ 称为矢量 $\phi(x)$ 在矢量基 $\psi_\mu(x)$ 中的分量.

在线性空间中, 两矢量相加 (减), 则它们的对应分量相加 (减); 矢量和数相乘, 则所有分量都乘此数; 矢量为零必须所有分量都为零. 矢量的这些运算满足线性关系

$$c\left(\sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x) a_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x) b_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x) \left(c a_\mu + c b_\mu\right) \tag{1.3}$$

把这些概念抽象出来, 就形成线性空间和矢量的概念. 对于给定的 m 个客体 e_μ, 定

义它们的加法和与数的乘法, 满足如下线性运算关系

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}_\mu a_\mu + \boldsymbol{e}_\nu a_\nu = \boldsymbol{e}_\nu a_\nu + \boldsymbol{e}_\mu a_\mu \ , \\ & c\left(\sum_\mu \boldsymbol{e}_\mu a_\mu + \sum_\mu \boldsymbol{e}_\mu b_\mu\right) = \sum_\mu \boldsymbol{e}_\mu \left(c a_\mu + c b_\mu\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中, c, a_μ, a_ν 和 b_μ 都是常数. 要求在此线性运算中, 这 m 个客体 $\boldsymbol{e}_\mu$ 是线性无关的, 即不存在 m 个不同时为零的数 c_μ 使下式成立

$$\sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{e}_\mu c_\mu = 0 \tag{1.5}$$

这样的 m 个客体 $\boldsymbol{e}_\mu$ 称为矢量基, 矢量基的复线性组合 $\boldsymbol{a}$ 称为矢量

$$\boldsymbol{a} = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{e}_\mu a_\mu \tag{1.6}$$

a_μ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的第 μ 个分量. 所有这样的矢量的集合构成 m 维线性空间, 记作 $\mathcal{L}$. 如果限制所有分量 a_μ 都是实数, 则此线性空间称为实线性空间. 在线性空间中, 两矢量相等必须 m 个分量全部对应相等, 两矢量相加 (减) 则所有对应分量相加 (减), 数与矢量相乘则该数与矢量的每个分量分别相乘, 所有分量为零的矢量称为零矢量. 在数学上, 线性空间和矢量的概念, 是与作为矢量基的客体的具体物理内容无关的.

从式 (1.6) 可知, 在给定的线性空间和给定的矢量基中, 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与一组有序数 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 存在一一对应的关系, 这组有序数有 m 个分量, 它们作为一个整体完全描写了这个矢量. 通常把这组有序数排成 m 行一列的列矩阵形式

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

矢量基给定后, 列矩阵与矢量有一一对应的关系, 它是矢量的一种描写方式. 在不会引起混淆时, 常把矢量和列矩阵用同一符号描写.

矢量基也是一个矢量, 它只有一个分量不为 0 而等于 1, 即

$$(\boldsymbol{e}_\mu)_\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \mu = \nu \\ 0, & \text{当 } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.8}$$

其中, $\delta_{\mu\nu}$ 称为克罗内克 (Kronecker)δ 函数.

如果存在 n 个不全为零的常数 c_i, 使 n 个矢量 $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(n)}$, 满足线性关系

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}^{(i)} c_i = 0 \tag{1.9}$$

则称此 n 个矢量线性相关. 反之, 如果不存在这样 n 个不同时为零的常数 c_i 使式 (1.9) 成立, 则称此 n 个矢量线性无关. 注意, 式 (1.9) 是一个矢量等式, 它包含 m 个分量等式. m 维线性空间中, 线性无关的矢量数目不能大于 m. 矢量基是线性无关的, 任何 m 个线性无关的矢量都可以作为一组矢量基.

在 $\mathcal{L}$ 中, n 个线性无关矢量的所有线性组合, 构成一个 n 维线性空间, 称为线性空间 $\mathcal{L}$ 的子空间 $\mathcal{L}_1$, 也称由 n 个矢量生成的 n 维空间. 只包含零矢量的子空间称为零空间. 零空间和全空间是任何线性空间都包含的两个平庸的子空间, 通常只讨论非平庸的子空间.

两个子空间 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的所有矢量及其线性组合的集合称为两个子空间的和, 也称并 (union), 记作 $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. 这两个子空间的公共矢量的集合称为两个子空间的交 (intersection), 记作 $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

$\mathcal{L}$ 称为两个子空间 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的直和的充要条件是 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, 且下面等价的三个条件之一成立:

(1) $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的交是零空间.

(2) $\mathcal{L}$ 的维数等于 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的维数之和.

(3) $\mathcal{L}$ 中任一矢量都可唯一地分解为分属 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的矢量之和.

直和记作 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, 其中 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 称为互补 (complement) 的子空间. 与 $\mathcal{L}_1$ 相补的子空间不是唯一的. 直和的概念可以推广到多于两个子空间的情况, $\mathcal{L}$ 可以分解为若干个子空间的直和.

1.2　线性变换和线性算符

所谓变换就是给出一种规则, 每一个函数都能按此规则变成一个确定的新函数. 算符是描写变换的一种数学符号. 满足下述线性关系的算符 $R(x)$ 称为线性算符.

$$R(x)\left[c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\right] = c_1 R(x)\phi_1(x) + c_2 R(x)\phi_2(x) \tag{1.10}$$

其中, c_1 和 c_2 是常系数. 线性算符描写的变换称线性变换. 量子力学中物理量用线性算符来描写, 它作用在波函数上, 将波函数按一定的线性规则变成一个新函数. 本书如无特殊声明, 算符都指线性算符. 线性算符与矩阵有密切关系. 在群论中矩阵的概念用得非常广泛, 这里先简单介绍一下矩阵的基本概念.

把 mn 个数 $X_{\mu\nu}$ 排列成一个长方形, 称为 $m\times n$ 矩阵 X, 简称矩阵

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

μ 和 ν 分别称为 X 的行指标和列指标, $X_{\mu\nu}$ 称为 X 的第 μ 行第 ν 列矩阵元素, 简称矩阵元素, $X_{\mu\mu}$ 称为 X 的对角元素. X 的列数 n 为 1 时, X 称为列矩阵, 而行数 m 为 1 时称为行矩阵. 当 $m=n$ 时 X 称为 m 维方矩阵, 或简称 m 维矩阵. X 中若干行和列的矩阵元素构成的小矩阵称为 X 的子矩阵. m 维矩阵 X 的对角元素之和称为 X 的矩阵迹, 用符号 $\mathrm{Tr}\,X$ 表示. m 维矩阵 X 的行列式定义为

$$\begin{aligned} \det X &= \sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} \epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} X_{1\mu_1}X_{2\mu_2}\cdots X_{m\mu_m}\ , \\ \epsilon_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\det X &= \sum_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} \epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} X_{\nu_1\mu_1}X_{\nu_2\mu_2}\cdots X_{\nu_m\mu_m} \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中, $\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ 称为 m 阶单位完全反对称张量, 简称 m 阶完全反对称张量. 它具有如下性质: 任何一对下标对换, 它改符号, 下标有重数时它为零, 且

$$\epsilon_{12\cdots m}=1 \tag{1.13}$$

两个 m 阶完全反对称张量相乘, 其中有 $m-n$ 个指标相重并求和, 则得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(m-n)!}\sum_{a_{n+1}\cdots a_m} \epsilon_{a_1\cdots a_n a_{n+1}\cdots a_m}\epsilon_{b_1\cdots b_n a_{n+1}\cdots a_m} \\ &\quad = \sum_{p_1\cdots p_n} \epsilon_{p_1\cdots p_n}\delta_{a_1 b_{p_1}}\delta_{a_2 b_{p_2}}\cdots\delta_{a_n b_{p_n}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中, $\epsilon_{p_1\cdots p_n}$ 是 n 阶完全反对称张量. 例如

$$\sum_d \epsilon_{abd}\epsilon_{rsd}=\delta_{ar}\delta_{bs}-\delta_{as}\delta_{br}$$

以后我们会经常用到这一完全反对称张量.

所有矩阵元素都为零的矩阵称为零矩阵. 只有对角元素不为零的矩阵称为对角矩阵, 对角元素都相等的对角矩阵称为常数矩阵, 常数为 1 的常数矩阵称为单位矩阵, 记作 **1**. 只有当矩阵 X 的列数等于矩阵 Y 的行数时, X 才能与 Y 相乘. 一个 $m\times k$ 矩阵 X 和一个 $k\times n$ 矩阵 Y 相乘, 得到一个 $m\times n$ 矩阵, 它的矩阵元素为

$$(XY)_{\mu\nu}=\sum_{\rho=1}^{k} X_{\mu\rho}Y_{\rho\nu} \tag{1.15}$$