21世纪高等院校创新教材

线性代数及其应用

XIANXINGDAISHUJIQIYINGYONG

李小刚　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校创新教材·

线性代数及其应用

李小刚　主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

线性代数是大学理工科和经管类学生的必修课程，在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用。本书以线性方程组为出发点，逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念，并引入许多实例供读者了解线性代数在实际应用中的独特作用，每章后还附有 Matlab 实验，供读者学习使用数学软件解决线性代数问题。

本书为高等院校理工科和经管类各专业线性代数课程教材，也可供相关教研人员和工程技术人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/李小刚主编. –北京：科学出版社，2006
（21 世纪高等院校创新教材）
ISBN 7-03-017697-9

I.线… II.李… III.线性代数–高等学校–教材 IV.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 082065 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：王望荣
责任印制：高 嵘／封面设计：曹 刚 周金丹

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 8 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2006 年 8 月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1~10 000 字数：286 000

定价：22.00 元

前　言

线性代数是大学理工科和经管类学生的必修课程，它在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用.本教材的编写，借鉴和吸收了国内外同类型优秀教材的长处，结合编者多年的教学经验，在内容组织上，依据教育部工科数学课程委员会对线性代数课程提出的基本要求，本着加强基础，注重计算与应用的原则，安排了一些选学内容，供教师和读者灵活选用.

对线性代数课程，学生普遍感到内容抽象、计算复杂，加上非数学专业的线性代数课程的学时数偏少，学习这门课程较为吃力，而学习后又不知道如何应用.其实，多数抽象的概念，是来源于一些简单的实例，本书通过逐步剖析实例中所包含的普遍原理，引导和建立矩阵、向量、线性方程组及线性问题的一些基本概念，让学生掌握和了解这些理论，学会使用这些理论解决实际问题，因此，我们不宜过份强调抽象而严格的逻辑体系，应该引导学生在应用的背景下，逐步掌握基本概念。本书将以线性方程组为出发点，逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念，还引入了许多应用实例，让读者了解线性代数在解决实际问题中的独特作用，另外还安排了一个应用章节，供有关专业的学生选学.每章都附有实验内容，目的是让读者学会用Matlab软件做线性代数的计算.因为在实际问题中，所面临的数据往往是大量的，单靠做练习的笔头功夫是难以解决实际问题的，Matlab 软件在解决线性代数的计算问题上，具有独特的优越性，花一点时间粗略了解这个软件将会受益匪浅.

本书的主要内容及主要特点：

第 1 章　介绍解线性方程组的高斯消元法，以此初步引入了线性方程组、矩阵及初等变换的概念，为以后的进一步理论学习建立了一个基础.

第 2 章　对矩阵作了比较详尽的讨论.矩阵是线性代数的核心内容，较早建立矩阵的理论，有利于利用矩阵的概念引入线性代数中其他的概念.

第 3 章　用递归的方法定义了 n 阶行列式，这比用逆序方法定义行列式更便于学生理解和掌握.本章还介绍了利用行列式解线性方程组的克拉默法则.

第 4 章　介绍矩阵的秩和 n 维向量及 n 维向量空间.向量组的线性相关性是一个难点，通过向量组合成的矩阵进行初等变换可求得矩阵的秩，从而较好地解决了向量组的线性相关性的判断.

第 5 章　讨论的线性方程组的可解性及解的结构.本书将线性方程组视为一个向量被另一组向量线性表示的问题，利用上一章的结论，能很容易地建立线性方程组的基本理论.

第 6 章　建立了特征值与特征向量的理论，介绍矩阵对角化的方法，并介绍如何应用这些方法将二次型化为标准型.

第 7 章　为选学内容，介绍了线性空间与线性变换理论，对这些抽象理论的掌握，有利于将前面章节中的理论在更广泛的领域里得到应用.

第 8 章　是为某些专业的学生编写的选学内容，介绍了最小二乘法与线性规划这两个应用十分广泛的概念.

本书每一章都配置了大量的习题，习题分(A)、(B)两类，(A)类为基本题，(B)类的题较难，供读者选做.

附录中的 1987～2006 年历届研究生入学考试题可供读者选做，读者可通过做这些题目来测试自己的水平.

本教材由李小刚主编，参编者有刘吉定、杨建华、罗进. 第 1 章、第 3 章及每章的实验部分由李小刚编写，第 2 章、第 4 章由刘吉定编写，第 5 章、第 6 章由杨建华编写，第 7 章、第 8 章由罗进编写. 全书由李小刚统稿. 在本书的编写过程中，得到了相关教学管理部门的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者批评指正.

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第1章　线性方程组的消元法

求解线性方程组是线性代数的一个基本问题,线性代数的许多理论是从解线性方程组的过程中发展起来的.本章介绍用消元法解简单的线性方程组,并引入 n 元线性方程组与矩阵的概念.

1.1　二元和三元线性方程组的求解

对于二元和三元线性方程组的求解,我们通常是用消元法求解.

例 1.1　解方程组$\begin{cases} x+\ \ y=\ \ \ 3 \\ x-3y=-1 \end{cases}$.

解　将两个方程相减,得 $4y=4$,即 $y=1$.带入第一个方程,得 $x+1=3$,解得 $x=2$.所以的方程的解为$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

例 1.2　解方程组

$$\begin{cases} x-2y+2z=-1 & (1) \\ 3x+2y+2z=\ \ 9 & (2) \\ 2x-3y-3z=\ \ 6 & (3) \end{cases}$$

解　(2)−(1)×3,得 $8y-4z=12$,化简为

$$2y-z=3 \tag{4}$$

(3)−(1)×2,得

$$y-7z=8 \tag{5}$$

(5)×2−(4),得

$$-13z=13 \tag{6}$$

解得 $z=-1$.带入(5),解得 $y=1$.再将 $y=1$, $z=-1$ 带入(1),解得 $x=3$.所以方程的解为

$$\begin{cases} x=\ \ 3 \\ y=\ \ 1 \\ z=-1 \end{cases}$$

以上两例,均是将方程组进行等价变形,逐步消去方程中未知变元的个数.当方程中未知变元只剩一个时,便可直接得到解,再将解依次代入方程,从而求得其他变元的解.

1.2 n 元线性方程组简介

对于 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

是否同样可以用消元法求解？

如果 n 元线性方程组具有如下的形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1}+a_{n-1,n}x_n=b_{n-1} \\ \qquad a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-2}$$

其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{n-1,n-1},a_{nn}$ 均不为零，则可以由下到上求得方程的解：

$$x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}-\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1=b_1-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

形如式(1-2)的方程组称为三角型方程组，这是 n 元线性方程组的一种特殊形式，求解比较容易. 但对一般的形如式(1-1)的 n 元线性方程组，是否可以化为三角形方程组？在例 1.2 中，把一个三元线性方程组化成三角形方程组，从而得到方程组的解，这种方法启发我们用某些变换将方程组化为三角形方程组以便于求解. 但必须保证，对方程的变换而得到的新方程组，必须和原方程组有同样的解. 以下变换能保持方程的解不变：

(1) 将第 i 个方程与第 j 个方程交换位置，方程组的解不变.

(2) 将第 i 个方程乘一个非零常数 k，方程组的解不变.

(3) 将第 j 个方程乘上一个非零常数 k 再加到第 i 个方程中去，方程组的解不变(读者自己证明).

对方程组实施上述变换时，方程组改变的仅仅是未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的系数与常数项. 因此，可以用方程(1-1)的系数与常数项列一个表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这个表和方程组(1-1)是对应的，称为对应方程组(1-1)的矩阵，方程组的特性都可以在这个矩阵中得到体现. 当对方程组做出以上三种变换时，方程组所对应的矩阵也会有相应的变换. 变换(1)相当于矩阵第 i 行与第 j 行对换，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；变换(2)相当于矩阵第 i 行的每一个元都乘以 k，记作 kr_i；变换(3)相当于矩阵第 i 行所有元与相应的第 j 行元乘一个非零常数 k 再相加，记作 $r_i + kr_j$. 矩阵的这三种变换称为矩阵的行初等变换，其对方程组的变换就可视为对矩阵做初等变换，而矩阵通过有限次初等变换得到的矩阵所对应的方程组，与原矩阵所对应的方程组是同解方程组.

方程组(1-2)所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$ 均不为零. 这种矩阵所对应的方程组是很容易求解的. 由此推想，一般线性方程组所对应的矩阵，能否通过初等变换化为上面的矩阵形式？或者得到其他所对应的方程组容易求解的矩阵形式？用高斯消元法，我们可以将方程组化为最简形式，下面通过例题介绍高斯消元法.

例 1.3 用高斯消元法求解方程组 $\begin{cases} x-3y+7z=20 \\ 2x+4y-3z=-1 \\ -3x+7y+2z=7 \end{cases}$.

解 方程组对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \overset{r_2-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{r_3+3r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+\frac{1}{5}r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & 0 & \frac{98}{5} & \frac{294}{5} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{98}r_3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 7 & 20\\0 & 10 & -17 & -41\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+17r_3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 7 & 20\\0 & 10 & 0 & 10\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}r_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 7 & 20\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 23\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+7r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_2$$

变换所得的矩阵对应的方程组为$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}$，这就是原方程组的解.

例中形如 $\boldsymbol{A}_1$ 的矩阵，称为行阶梯型矩阵，其特点是矩阵中每一行的第一个非零元同列下面的元素都为零；形如 $\boldsymbol{A}_2$ 的矩阵称为行最简型矩阵，其特点是非零行的第一个非零元为 1，所在列的其他元素为零.

用高斯消元法解线性方程组，就是用行初等变换将方程组所对应的矩阵化为行最简形矩阵，从而得到方程的解.

事实上，对于线性方程组(1-1)，我们并不能保证它一定有解，即使有解，也不能保证解是唯一的.

例 1.4 解方程组

(1) $\begin{cases}x-2y=-1\\-x+3y=3\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-2y=-1\\-x+2y=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-2y=-1\\-x+2y=1\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\\-x+2y=-3\end{cases}$

解 二元方程组的解的几何意义是直线的公共交点，分别绘出 4 个方程的直线图(图 1-1).

从图中可以看出，方程(1)对应的两条直线有唯一交点，从而有唯一解 $x=3$，$y=2$；方程(2)对应的两条直线平行，无交点，因而没有解；方程(3)对应的两条直线重合，直线上的点都是解，因而有无穷多个解；方程(4)对应的 3 条直线没有共同的交点，也没有解.

方程(1)对应矩阵为$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\-1 & 3 & 3\end{pmatrix}$，$r_2+r_1$，得$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$；$r_1+2r_2$，得$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，所以，方程组的解为$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$.

方程(3)对应矩阵为$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$r_2+r_1$，得$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 变换后的矩阵只对应一个方程 $x-2y=-1$，即 $x=2y-1$，y 可取任意值. 故方程(3)有无穷个解. 方程(2)，(4)无解.

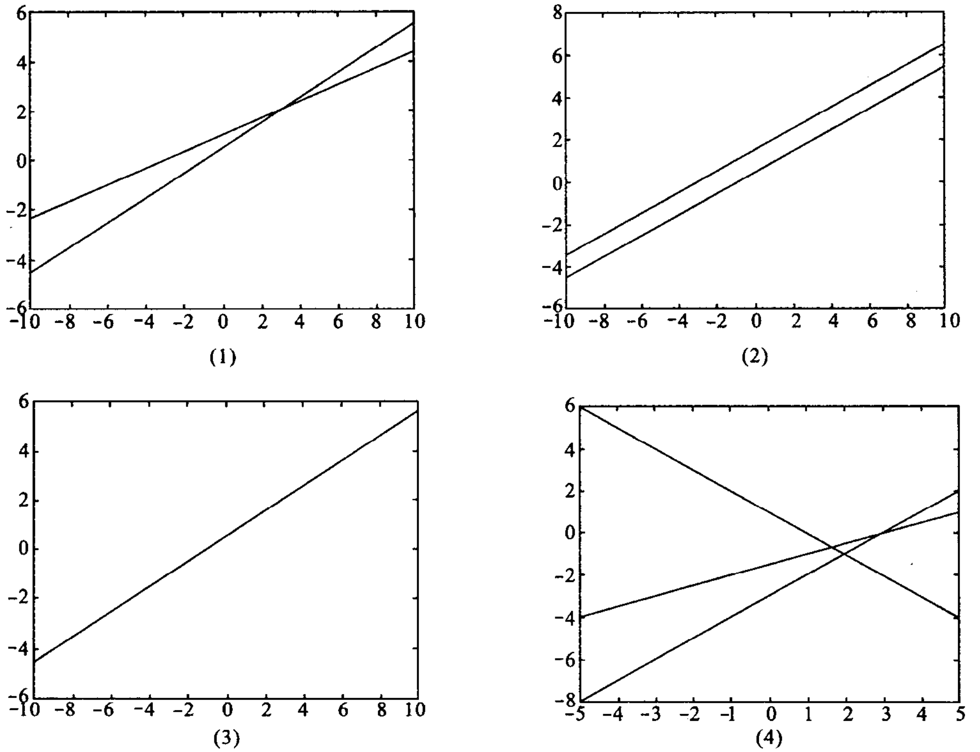

图 1-1

如果线性方程组(1-1)有唯一的解，称线性方程组是适定的；如有无穷个解，称线性方程组是欠定的；如没有解，称线性方程组是超定的. 在第五章中，我们将解决线性方程组在什么样的情况下是适定的、欠定的或超定的.

1.3 高斯消元法解方程的 Matlab 实验

1. Matlab 简介

Matlab 是美国 The MathWorks 公司出品的计算机科学计算软件，自 1984 年推出以来，受到广泛的推崇. 在很多领域里，Matlab 已成为科技人员首选的计算机数学语言. Matlab 语言简洁，功能强大，几乎涵盖了所有的数学计算内容，人机交互性能好，其表达方式符合科技人员的思维习惯和书写习惯，使用简短的语句便能完成许多复杂的计算. Matlab 是“矩阵实验室”(matrix laboratory)的缩写，它是一种以矩阵运算为基础的交互式程序语言，因此特别适于线性代数求解. 线性代数是一门理论比较抽象、计算强度很大的数学学科，并具有广泛的应用. 在传统教材给出的线性代数的计算方法，如用手工计算，只能解决一些低阶、变量较少的问题，而在实际中出现的大量的线性问题，都是高阶的和有很多变量. 使用 Matlab 语言辅

助线性代数的教学，近几年来已成为较为流行的教学模式. 本书将对 Matlab 语言作简单的介绍，并在各章中都安排了使用 Matlab 语言的实验，以解决相应章节的计算问题. Matlab 是科技工作者得力的科学计算工具，读者可查阅有关的书籍对其进一步了解.

2. 矩阵的表示

当运行 Matlab 程序后，会出现一个命令窗，Matlab 语句可在命令窗中提示符≫后键入.

如要在 Matlab 中输入一个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，可在 Matlab 提示符"≫"后面键入：

```
≫ A=
     [1  2  3
      4  5  6
      7  8  9]
```

按回车键屏幕显示：

```
A=
   1  2  3
   4  5  6
   7  8  9
```

也可以键入：

```
≫ A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9];
```

或

```
≫ A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9];
```

按回车键，屏幕显示同上. 变量 A 在程序中就代表所输入的矩阵.

3. 线性方程组的高斯消元法

线性方程组的高斯消元法，等价于对相应的矩阵做行初等变换，将其化为行最简型矩阵.

在 Matlab 语言中，调用一个函数 rref()，可将矩阵化为行最简型矩阵.

如要将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&4&7\\1&2&3&4&3\\-1&3&-2&4&9\\6&-2&7&1&2\end{pmatrix}$ 化为阶梯矩阵，先键入矩阵：

```
≫ A=[1 2 -1 4 7;1 2 3 4 3;-1 3 -2 4 9;6 -2 7 1 2]
```

屏幕显示为

```
A=
```

```
 1   2  -1  4  7
 1   2   3  4  3
-1   3  -2  4  9
 6  -2   7  1  2
```

再调用函数,将 **A** 化为行最简型矩阵:

```
≫ rref(A)
```

结果显示为:

```
ans=
    1.0000   0        0        0         13.3333
    0        1.0000   0        0         27.6667
    0        0        1.0000   0         -1.0000
    0        0        0        1.0000   -15.6667
```

例 1.5 求解方程组 $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x-z=3 \end{cases}$.

(1) 键入方程矩阵:

```
≫ A=
   1   2   3  9
   2  -1   1  8
   3   0  -1  3
```

(2) 化为行最简矩阵:

```
≫ rref(A)
ans=
   1  0  0   2
   0  1  0  -1
   0  0  1   3
```

所以 $x=2, y=-1, z=3$.

例 1.6 求解方程组 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-3y-z=7 \\ 5x-8y-z=20 \end{cases}$.

```
≫ A=[1 -2 1 3;2 -3 -1 7;5 -8 -1 20];
≫ rref(A)
    ans=
        1  0  -5  0
        0  1  -3  0
        0  0   0  1
```

对应的方程为$\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \\ 0=1 \end{cases}$.显然,方程无解.

例 1.7 求解方程组$\begin{cases} 3x+4y-3z=-6 \\ -x-y+2z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$.

```
≫ A=[3 4 -3 -6; -1 -1 2 4; 1 2 1 2];
≫ rref(A)
ans= 1  0  -5  -10
     0  1   3    6
     0  0   0    0
```

故对应的方程为:$\begin{cases} x=5z-10 \\ y=-3z+6 \\ z=z \end{cases}$. z 取任意值,得到的 x,y,z 都是方程的解,所以方程有无穷多个解.

习　题　一

1. 写出下列方程组对应的矩阵.

(1) $\begin{cases} x_1+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=k \end{cases}$

2. 用高斯消元法解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3+2x_1=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2-8x_3=8 \\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$

第2章 矩　　阵

2.1 矩阵的基本概念

在第1章中，我们对矩阵有了一个初步印象，在线性代数里，矩阵是研究的主要对象. 矩阵是数量关系的一种表现形式，矩阵将一个有序数表作为一个整体研究，使问题变得简洁明了. 矩阵有着广泛的应用，是研究线性方程组和线性变换的有力工具，也是研究离散问题的基本手段.

2.1.1 矩阵的定义

定义 2.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的矩形数表称为 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}=(a_{ij})\quad 或\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，或称为 n 阶方阵. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记作 $\boldsymbol{A}_n$.

只有一行的距阵称为行距阵，或称为行向量. 记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵称为列矩阵，或称为列向量. 记作

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

两个矩阵的行数相等、列数也相等，称为同型矩阵. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.1.2 几种特殊矩阵

零矩阵 所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

对角矩阵 主对角线以外的元全为零的矩阵（即 $a_{ij}=0\ (i\neq j)$，方阵中元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$所示的位置称为主对角线）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

称为对角矩阵，记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

单位矩阵 n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，简称单位阵.

数量矩阵 矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$$

称为数量矩阵.

上三角矩阵 主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为上三角矩阵.

下三角矩阵 主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为下三角矩阵.

矩阵的应用十分广泛，许多实际问题都可以化为矩阵来研究.

例如，一个公司有 3 个销售点甲、乙、丙销售 5 种产品 A,B,C,D,E，每天的销