丛书主编　许康华
本册主编　许康华

高中预备班

初高中衔接教材

数学

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中预备班

初高中衔接教材

数学

本册主编　许康华

丛书主编　许康华

副 主 编　闻雪洪　毛　文

编　　委　（以下排名不分先后）

毛　文　王斌杰　许康华　沈学功

宋胜生　吴瑛翰　廖　红　闻雪洪

裘明惠　施小琴　吴　斌　曹关明

徐献灿　高振华

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中预备班. 数学：初高中衔接教材/许康华主编.
杭州：浙江大学出版社，2006.6
ISBN 7-308-04772-5

Ⅰ.高... Ⅱ.许... Ⅲ.数学课—初中—升学参考
资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 062629 号

责任编辑 张 明
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
经 销 浙江省新华书店
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 浙江省良渚印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.5
字 数 260 千字
版 印 次 2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-308-04772-5/G・1077
定 价 12.00 元

[redacted]

“忽如一夜春风来，千树万树梨花开。”目前，初中新课程改革已在全国全面铺开，高中新课程改革也在浙江省等十一个省份实施。在这新旧教材交替之际，一直来没有得到很好解决的初高中教材衔接问题，显得尤为突出。正是出于这样的考虑，我们编写了本套衔接教材。

初中教学与高中教学，在教学要求、教学进度与教学方式、知识体系、学习方法、思维层次、能力要求等诸方面都有较大的变化。受这些变化影响，有相当的学生不能一下子适应高中学习，学习积极性受到一定的挫伤。因此，如何采取有效的措施做好衔接，是摆在我们师生面前的一个共同的课题。我们希望通过本书的使用能使衔接变得更自然一些，使学生在高中起始阶段的学习中少走弯路，从而能使新课程改革变得更为顺利。

本丛书具有以下一些特点：

基础性　充分体现新课程标准的精神，既强化与高中知识密切相关的初中知识模块，又不是对这些知识模块的简单回顾与复习，而是同时渗透高中学科的知识与方法，化解高中教学中的一些难点，为高中学习做好必要的铺垫。

针对性　力图避免衔而不接的毛病，系统介绍在高中起始阶段教学中的主干内容，希望通过这些内容的学习，使学生在心理上逐渐适应高中学科的教法、学法。

前瞻性　撷取各学科中的一些主要方法和思想，以这些思想方法的介绍为经，以知识的介绍为纬，经纬交叉，形成一个知识网络。希望以此启迪学生的思维，培养学生学习的兴趣，提高学生的综合素质与创新能力。

创新性　体现素质教育的理念，强调培养学生的创新精神、探究能力和实践能力，安排了许多探索性问题和来自实际生活的应用题。

实用性　内容编排由浅入深，层次分明，例题习题丰富，覆盖面广，且同步配套、解答详细，使本书既便于教师教学，又便于学生自学。事实上，培养自学能力是学好每门功课的一个重要方面。

“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。”囿于水平所限和时间仓促，书中纰漏及不当之处在所难免，恳请专家读者不吝赐教，以便在日后再版时完善提高，同时也预祝同学们能顺利完成高中三年的学业。

目录 Contents

知 识 篇

第1讲 简单的整数性质

知识要点

1. 奇数与偶数

假设 m 为整数，则可以表示为 $2m+1$ 或 $2m-1$ 的整数称为奇数，大于 0 的奇数叫单数. 可以表示为 $2m$ 的整数称为偶数，大于 0 的偶数叫双数.

奇偶数性质：

(1) 奇数≠偶数.

(2) 两个连续的整数中，必有一个奇数，一个偶数；三个连续的整数中，至少有一个奇数，一个偶数.

(3) 奇数与偶数的加、减、乘法运算，有如下法则：

±	偶数	奇数
偶数	偶数	奇数
奇数	奇数	偶数

×	偶数	奇数
偶数	偶数	偶数
奇数	偶数	奇数

(4) 若干个奇数之积是奇数，偶数与任意整数之积是偶数，偶数个奇数的和为偶数，若干个偶数的和为偶数.

(5) $a+b$ 与 $a-b$ 同奇偶性.

(6) a 与 a^n 同奇偶性.

2. 整除

设 a，b 是任意两个整数，其中 $b\neq0$，如果存在一个整数 q，使等式 $a=bq$ 成立，则称 b 整除 a，或称 a 能被 b 整除，记作 $b|a$. 此时，我们把 b 叫做 a 的约数(或因数)，把 a 叫做 b 的倍数. 如 a 不能被 b 整除，记作 $b\nmid a$.

显然，$1|a$，$b|0$，$a|a$ 成立.

除 1 以外，任何整数的约数至少有两个，即 1 和该整数本身. 一个大于 1 的整数，如果它的约数只有 1 与它本身，我们称这样的整数为质数；如果它的约数的个数超过两个，即它有不同于 1 与它本身的约数，我们称这样的整数为合数；正整数可分为质数、合数和 1 三类.

$$\text{即}\quad \text{正整数}\begin{cases}\text{质数}\\ \text{合数}\\ 1\end{cases}$$

1 既不是质数也不是合数，2 是唯一的既是质数又是偶数的整数，大于 2 的质数必为奇数. 两个整数只有一个公共的约数 1 时，就称这两个整数互质.

整数的基本性质：

(1) 若 $a\mid b$,则 $(-a)\mid b, a\mid(-b), (-a)\mid(-b)$. 反之亦真.

(2) 若 $a\mid b, b\mid c$,则 $a\mid c$.

(3) 若 $a\mid b$,k 为整数,则 $a\mid kb$.

(4) 若 $a\mid b, a\mid c$,x、y 为任意整数,则 $a\mid(bx+cy)$. 反之亦真.

(5) 若 $a\mid bc$,且 a 与 c 互质,则 $a\mid b$.

(6) 若 $b\mid a, c\mid a$,且 b 与 c 互质,则 $bc\mid a$.

带余(数)除法定理：

设 a,b 是两个整数,其中 $b>0$,则一定存在唯一的一对整数 q 和 r,使得 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$,称 q,r 分别为被除数 a 除以除数 b 的商和余数,它是一个十分重要的基本定理.

特别地,当 $r=0$ 即 $a=bq$ 时,就是 a 被 b 整除的情况.

3. 整数整除的特征

设正整数 $N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+a_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+a_1\times 10+a_0$,其中 a_i 是十进数码,$a_n\neq 0$,i 为自然数. 有时为方便起见,用 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}$ 表示 N.

(1) 被 2 整除的数：个位数字是偶数；

(2) 被 5 整除的数：个位数字是 0 或 5；

(3) 被 4 整除的数：末两位组成的两位数被 4 整除；

(4) 被 25 整除的数：末两位组成的两位数被 25 整除；

(5) 被 8 整除的数：末三位组成的三位数被 8 整除；

(6) 被 125 整除的数：末三位组成的三位数被 125 整除；

(7) 被 3 整除的数：数字和被 3 整除；

(8) 被 9 整除的数：数字和被 9 整除；

(9) 被 11 整除的数：奇数位数字和与偶数位数字和的差被 11 整除；

(10) 被 6 整除的数：既被 2 又被 3 整除,即若 $2\mid N, 3\mid N$,则 $6\mid N$；

(11) 被 7,11,13 整除的数：设 $N_1=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}-\overline{a_2a_1a_0}$,

若 $7\mid N_1$,则 $7\mid N$;若 $11\mid N_1$,则 $11\mid N$;若 $13\mid N_1$,则 $13\mid N$.

典型例题解析

例 1　两个整数相除,得商数是 12 和余数是 26,另外,被除数、除数、商数及余数的和等于 454,被除数是多少?

解　设被除数、除数分别为 a,b,根据带余除法和已知条件得：

$a=12b+26$,

$a+b+12+26=454$,

则有 $12b+26+b+12+26=454$, $13b=390$, $b=30$,

$a=30\times 12+26=386$,

故被除数是 386.

例 2 30 个饺子用 5 个碗装，只许逢单不逢双，请问应该如何装？

解 无论如何装，都不可能满足题目的要求，理由如下：

设 5 个碗中分别装有 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 个饺子，则

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=30.$$

而若 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 都为奇数，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 应为奇数，但 30 显然不是奇数，故满足题意的装法是不存在的.

说明 本题用了反证法的思想，它是解决数学问题的一种常用方法，它通过作出与命题结论相反的假设，经过正确推理，导出矛盾，从而肯定原来命题结论的正确性.

例 2 试判断两类数 $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$（$k$ 为整数），$y=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}$（$k$ 为整数）之间的关系.

分析 把这两类数按共同标准来表示，再作出判断.

解 $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$，$y=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}$；

由于 k 为整数，故对于相同的 k，$2k+1$ 所取的实数个数少于 $k+2$ 所取实数的个数，所以 x 类内的数必是 y 类内的数. 但 y 类内的数不一定是 x 类内的数.

例 2 已知 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数，求证 $(x+1)(y+2)(z+3)$ 一定是偶数.

证法一 因为 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数，则 $x+y+z$ 是偶数，从而 $(x+1)+(y+2)+(z+3)=(x+y+z)+6$ 为偶数，所以 $x+1,y+2,z+3$ 中至少有一个是偶数，则 $(x+1)(y+2)(z+3)$ 一定是偶数.

证法二 因为 x,y,z 中有两个奇数和一个偶数，则 x 和 z 中至少有一个是奇数. 当 x 是奇数时，$x+1$ 是偶数，则 $(x+1)(y+2)(z+3)$ 是偶数；当 z 是奇数时，$z+3$ 是偶数，则 $(x+1)(y+2)(z+3)$ 是偶数，故 $(x+1)(y+2)(z+3)$ 一定是偶数.

注 意 弄清“至少有一个”的含义.

例 2 设五位数 $\overline{x679y}$ 被 72 整除，求数字 x 与 y.

分析 因为 $72=8\times 9$，而 8 和 9 是互质的，要五位数 $\overline{x679y}$ 被 72 整除，只要 $\overline{x679y}$ 既被 8 整除，又被 9 整除即可.

解 因为 $72=8\times 9$，所以 $\overline{x679y}$ 被 8 和 9 整除.

一个数被 8 整除，它最后三位组成的三位数一定被 8 整除，所以 $\overline{79y}$ 被 8 整除，通过除法运算，可得 $y=2$.

一个数被 9 整除时，它的数字和被 9 整除，所以 $x+6+7+9+y=x+6+7+9+2=x+24$ 能被 9 整除，注意到 $0\leqslant x\leqslant 9$，因此，x 只能为 3.

所以 $x=3,y=2$.

例 2 在小于 100 的正整数中共有多少个数被 3 除余 2？这些数的和是多少？

分析 被 3 除余 2 的正整数可以写成 $3n+2$（n 为自然数）的形式.

解 由 $3n+2<100$，得 $n<32\frac{2}{3}$. 即 $0,1,2,3,\cdots,31,32$，所以在小于 100 的正整数中

共有 33 个数被 3 除余 2，把这些数从小到大排列出来就是 2，5，8，…，95，98，它们组成一个等差数列，其和 $S_{33}=\dfrac{33\times(2+98)}{2}=1650$.

说明 本题运用了等差数列前 n 项的求和公式解题：总和 $S_n=[($首项$+$末项$)\times$项数$]\div 2$. 关于等差数列在高中学习时会详细介绍.

例 7 当 n 是整数时，请证明 $12\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

证明 因为 n 为整数，所以 $n,n+1,n+2,n+3$ 是四个连续整数，故在这四个数中至少有一个是 3 的倍数，有一个是 4 的倍数，由整除的性质可得

$3\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ 且 $4\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$，

由于 3 和 4 互质，所以 $12\mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

说明 上例中的 $n,n+1,n+2,n+3,\cdots$，称为连续整数.

连续整数有以下三个基本性质：

1. 任何两个连续整数中，一定是一奇一偶.
2. 任何三个连续整数中，恰有一个数是 3 的倍数，且这三个连续整数之积能被 6 整除.
3. 任何两个连续整数都是互质的.

例 7 一位小学生不懂指数，把 $2^x\cdot 9^y$ 误写成一个四位数 $2x9y$，结果恰好有 $2^x\cdot 9^y=2x9y$，求 x^y.

解 由 $2^x\cdot 9^y=\overline{2x9y}$，可知$\overline{2x9y}$是 2 的倍数，因此 y 应是偶数，又知$\overline{2x9y}$是 9 的倍数，因此 $2+x+9+y=11+x+y$ 也是 9 的倍数，又因为 $9^4=6561>\overline{2x9y}$，所以 $y<4$.

显然 y 不能为 0，故 $y=2$，

于是，$11+x+y=13+x$ 是 9 的倍数，由 $0\leqslant x<9$ 可知，$x=5$，

从而 $x^y=5^2=25$.

说明 由 $2^x\cdot 9^y$ 得$\overline{2x9y}$是 2 的倍数，也是 9 的倍数，是解决本题的突破口.

例 9 已知 x,y 为整数，且 $x^2-4y=1$，试讨论 x,y 的奇偶性.

分析 分类讨论 x,y 的奇偶性与制约条件 $x^2-4y=1$ 的关系.

解 (1) 若 x 是奇数，则 $x=2k+1$.

$\because x^2-4y=1$，

$\therefore y=\dfrac{1}{4}(x^2-1)=\dfrac{1}{4}(x-1)(x+1)=\dfrac{1}{4}\cdot 2k\cdot(2k+2)=k(k+1)$.

而 $2\mid k(k+1)$，故 y 是偶数.

(2) 若 x 是偶数，则 $x=2k$，此时

$y=\dfrac{1}{4}(x^2-1)=\dfrac{1}{4}(4k^2-1)=k^2-\dfrac{1}{4}$，不是整数，故 x 不能是偶数.

由(1)(2)知，x 是奇数，y 是偶数.

例 9 求满足$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$的所有正整数 x,y.

分析 这是一个不定方程，先去分母后因式分解，再作讨论.

解 原方程 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ 变形为：$4(y-x)=xy$.

因式分解,则有$(4-x)(y+4)=16$,

因x,y均为正整数,所以$1\leqslant 4-x\leqslant 3$,

从而$4-x=1,2$,即$x=3,2$;

于是有$x=3$时,$y=12$;$x=2$时,$y=4$.

故满足题中条件的x,y分别为$x=3,y=12$;$x=2,y=4$.

▶▶▶▶ 习 题 ◀◀◀◀

1. 若n是大于1的整数,则$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$的值 ( )

   A. 一定是偶数　　B. 一定是奇数

   C. 是偶数但不是2　　D. 可以是偶数也可以是奇数

2. 2006年3月23日是星期四,那么2006年元旦是 ( )

   A. 星期五　　B. 星期六

   C. 星期日　　D. 星期一

3. 若$\frac{8}{6-x}$是正整数,则自然数x的取值为 ( )

   A. 1,2,3,4　　B. $-2,2$　　C. $-2,2,4,5$　　D. 2,4,5

4. 试判断两类数$M=2n+1$(n为整数)和$N=4r\pm 1$(r为整数)之间的关系.

5. 某次数学竞赛,若有40道题目,规定答对一题给5分,不答给1分,答错倒扣1分.请说明,不论多少人参赛,全体学生的得分总和一定是偶数.

6. 求在200以内同时被3,4,5整除的正整数的个数.

7. 试证明:任一奇数的平方减1恒是8的倍数.

8. 有一个五位数$\overline{a679b}$能被 72 整除，试求 a 和 b，并写出该五位数.

9. 设 $x = 1 \times 2006 + 2 \times 2006 + 3 \times 2006 + \cdots + 2006 \times 2006$，求 x 除以 9 余几?

10. 7 只杯子，3 只杯口朝上，4 只杯口朝下，每次可翻转杯子 4 只，问几次翻转能出现 7 只杯口皆朝下?

11. 求一个最小 6 位数，使这个 6 位数的各数位上数字不同，且这个 6 位数既能被 5 整除，又能被 11 整除.

12. 5 个连续自然数，中间的一个是 n.

① 用代数式表示这 5 个自然数的平方和 S.

② 当 $n=10$ 时，求 S 的值.

③ 试说明 S 的个位数一定是 5 或 0.

第 2 讲 代数式及恒等变形(一)

1. 数的开方

(1) 平方根　如果 $x^2 = a(a \geqslant 0)$，那么 x 叫做 a 的平方根，记作 $x = \pm\sqrt{a}(a \geqslant 0)$. 正数 a 的正的平方根与 0 的平方根叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$.

运算性质：(ⅰ) $(\sqrt{a})^2 = a$；

(ⅱ) $\sqrt{a^2} = |a|$.

(2) 立方根　如果 $x^3 = a$，那么 x 叫做 a 的立方根，记作 $x = \sqrt[3]{a}$，任何实数都有一个与之同号的立方根.

运算性质：(ⅰ) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$；

(ⅱ) $\sqrt[3]{a^3} = a$；

(ⅲ) $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

(3) n 次方根　如果 $x^n = a$（n 是大于 1 的整数），那么 x 叫做 a 的 n 次方根. 当 n 为奇数时，a 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{a}$.

当 n 为偶数时，a 的 n 次方根，记作 $\pm\sqrt[n]{a}(a \geqslant 0)$.

正数 a 的正的 n 次方根与 0 的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根，记作 $\sqrt[n]{a}$（$a \geqslant 0$，n 为大于 1 的整数）.

性质：正数有一个正的奇次方根；负数有一个负的奇次方根，零的奇次方根为零.

正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，零的偶次方根是零，负数没有偶次方根.

运算性质：(ⅰ) 当 $a \geqslant 0$，n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$；

(ⅱ) 当 $a < 0$，n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = -a$.

2. 二次根式

(1) 定义　形如 $\sqrt{a}$ ($a \geqslant 0$) 的式子叫做二次根式，化简后被开方数相同的二次根式叫同类二次根式.

(2) 性质　(ⅰ) $\sqrt{a} \geqslant 0$；

(ⅱ) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

(3) 运算　乘法运算 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geqslant 0, b \geqslant 0$)；

除法运算$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$.

(4) 分母有理化$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}\ (a\geqslant 0,b>0)$.

(5) 最简二次根式：满足①被开方数的因数是整数，因式是整式；② 被开方数中不含开得尽方的因数或因式的二次方根，叫做最简二次根式.

在进行二次根式的运算时，常先将二次根式化成最简二次根式后再进行计算.

3. 幂的运算

(1) 正整数指数幂 $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}a}$；

(2) 零指数幂 $a^0=1\ (a\neq 0)$；

(3) 负整数指数幂 $a^{-p}=\left(\frac{1}{a}\right)^p(a\neq 0,p$ 是正整数).

整数指数幂的运算性质

(ⅰ) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}(m,n$ 是整数)；

(ⅱ) $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m(m,n$ 是整数)；

(ⅲ) $(ab)^n=a^nb^n(n$ 是整数)；

(ⅳ) $a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0,m,n$ 是整数).

(4) 正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n$ 是正整数，$n>1)$；

负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a>0,m,n$ 是正整数，$n>1)$.

上述的整数指数幂的运算性质，对于有理数指数幂也同样适用，即

(ⅰ) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,s,r$ 是有理数)；

(ⅱ) $(a^r)^s=a^{rs}=(a^s)^r(a>0,s,r$ 是有理数)；

(ⅲ) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r$ 是有理数).

典型例题解析

例1 $\sqrt[3]{8}$的平方根是________.

分析 本题要求弄清立方根、平方根的定义，∵ $\sqrt[3]{8}=2$，∴ 本题的实质为求 2 的平方根是多少.

解 ∵ $\sqrt[3]{8}=2$，而 2 的平方根是$\pm\sqrt{2}$，∴ $\sqrt[3]{8}$的平方根是$\pm\sqrt{2}$.

说明 本题容易错误地理解为求$\sqrt[3]{8}$的值而得结果 2，或由$\sqrt[3]{8}=2$ 得$\sqrt[3]{8}$的平方根是$\sqrt{2}$.

例1 设 $A=\sqrt[4a-b]{a+2}$是 $a+2$ 的算术平方根，$A=\sqrt[3a+2b]{2-b}$是 $2-b$ 的立方根，求 $A+B$ 的 n 次方根(n 为整数).

分析 本题从算术平方根、立方根、n 次方根的概念入手，间接地转化为求 a,b 值，从而求得 $A+B$ 和 $A+B$ 的 n 次方根.

解 根据题意得 $\begin{cases}4a-b-3=2\\3a+2b-9=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$.

$\therefore\ A=\sqrt{4}=2, B=\sqrt[3]{-1}=-1$，$\therefore\ A+B=1$.

又 n 为整数，所以，当 n 为偶数时 $A+B$ 的 n 次方根为 ±1；当 n 为奇数时 $A+B$ 的 n 次方根为 1.

说明 正确理解平方根、立方根、n 次方根的意义是解决问题的关键.

例 3 画出函数 $y=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}$ 的图像.

分析 根据方根的性质，将函数进行化简，再作图.

解 $\because\ \sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$$=\begin{cases}x+1 & x\geqslant-1\\-x-1 & x<-1\end{cases},$$

$\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$,

$\therefore\ y=\begin{cases}2x & x\geqslant-1\\-2 & x<-1\end{cases}$，它的图像是两条射线(如图 2-1).

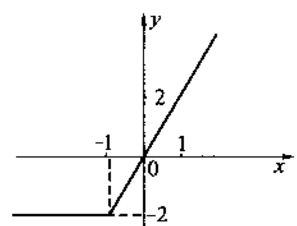

图 2-1

注 意 由于 x 的取值范围影响着函数的解析式，故应讨论. 这样的函数我们称为分段函数.

例 3 已知 $\sqrt{2y-24}+\sqrt{ax-y-3x}=0$. 问 a 为何值时，x 为负数？

分析 根据非负数的性质，原方程转化为 $2y-24=0$ 且 $ax-y-3x=0$，进而考察解的情况.

解 原方程等价于方程组

$$\begin{cases}2y-24=0\\ax-y-3x=0\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}y=12\\x=\dfrac{12}{a-3}\end{cases}\quad(a\neq3)$$

$\therefore$ 当 $a<3$ 时，$x<0$；即 $a<3$ 时，x 为负值.

说明 去根式是解决问题的关键. 通过去根式，用 a 去表示 x，从而得到关于 a 的不等式，求出 a 的取值范围.

例 5 求值 $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\ \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

分析 这种形式较复杂的计算，往往有关键之处，要善于发现并解决它. 本题有一处为一个三次根式与六次根式之积，可以看看是否有方法先将它们变成次数一样的根式，方法有增次、配方等，可得 $\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}=\sqrt[6]{9+6\sqrt{2}}$ 或将 $\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}$ 化为一个三次根式.

解 $9-6\sqrt{2}=6-6\sqrt{2}+3=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$,

$\therefore\ \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$,

这样

原式 $=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\ \sqrt[3]{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{9}\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[3]{3}(1-\sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}.$

例 6 已知 $0<m<1$ 且 $m+m^{-1}=6$，求 $\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ 的值.

分析 寻找所求与已知之间的关系是解题的突破口，易知 $\left(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)^2=m+\dfrac{1}{m}-2=m+m^{-1}-2$，则可先求得 $\left(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)^2$ 的值，再求出 $\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ 的值.

解 $\because \left(\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)^2=m+\dfrac{1}{m}-2=m+m^{-1}-2=6-2=4$，

又 $\because 0<m<1$，$\therefore 0<\sqrt{m}<1$，$\dfrac{1}{\sqrt{m}}>1$，

则 $\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}<0$，$\therefore \sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}=-2$.

说明 本题不是直接求 m 的值，而是将 $m+m^{-1}$，即 $\sqrt{m}-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ 当作一个整体，将要求值的式子转化为含 $m+m^{-1}$ 的式子，再求值，这种整体处理的思想方法一定要掌握好.

例 7 已知 $a>0$，$a^{2x}=3$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 的值.

分析 由立方和公式，将分子分解因式，化简后代值.

解 原式 $=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}=3+\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{7}{3}.$

说明 此题除上述解法外，还可直接由条件 $a^{2x}=3$，解出 $a^x=\sqrt{3}$，再代入求值.（注意 $a^x\neq-\sqrt{3}$）

例 6 若有理数 x,y,z 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$，确定 $(x-yz)^3$ 的值.

分析 由已知等式先将其配方，即可求出 x,y,z 的值.

解 原方程变形为 $x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$，

配方得 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$，

$\therefore \sqrt{x}-1=0$，$\sqrt{y-1}-1=0$，$\sqrt{z-2}-1=0$.

即 $x=1$，$y=2$，$z=3$. 则 $(x-yz)^3=(1-2\times3)^3=-125$.

说明 在此题的配方中，关键要抓住 $x=\sqrt{x^2}$，$y-1=(\sqrt{y-1})^2$，$z-2=(\sqrt{z-2})^2$.

例 6 化简 $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-2\sqrt{a}}+\dfrac{1-\sqrt{a}}{a-4\sqrt{a}+4}\right)\div\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{a}}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-4}\right)^2$.