丛书主编　卜月华

高二分册

从高考到竞赛

高中数学竞赛专题 A+B

吕峰波　主编

浙江大學出版社

高中数学竞赛专题 A + B

（高二分册）

丛书主编　卜月华
本书主编　吕峰波
副 主 编　周建峰　朱建华　黄茂福
编　　委　（按姓氏笔画顺序）
卜月华　朱建华　余建新　吕峰波　吴文广
吴伟文　吴国建　沈新权　何晓远　张金良
季诚胜　郑红政　周建峰　陶文强　徐元根
黄茂福　舒林军

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题 A + B. 高二分册/卜月华主编.
杭州:浙江大学出版社,2005.7
ISBN 7-308-04319-3

Ⅰ.高... Ⅱ.卜... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 075165 号

出版发行	浙江大学出版社
	(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
	(E-mail:zupress@ mail. hz. zj. cn)
	(网址:http://www. zjupress. com)
责任编辑	杨晓鸣 冯慈璜
经 销	浙江省新华书店
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	德清县第二印刷厂
开 本	787mm × 1092mm 1/16
印 张	15
字 数	360 千字
版 印 次	2005 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 3 次印刷
书 号	ISBN 7-308-04319-3/G · 912
定 价	19.00 元

前　言

从事数学工作离不开浓厚的兴趣，尤其是辅导奥林匹克数学竞赛更需要对数学深深的热爱。正是由于共同的兴趣和爱好，一批年轻的中学数学教师走到了一起，在浙江师范大学数理学院的牵头下，连续几年组织了数学爱好者夏令营。这项活动为广大中学生提供了进一步系统学习数学，掌握奥林匹克数学知识与方法的平台。《高中数学竞赛专题 A+B》丛书正是在各位教练员讲稿的基础上整理而成，贴近中学生实际，与现行教材同步，适合课堂专题讲座。这也是本书的一大特点。

目前各种出版社出版的教辅用书繁多，大致可以分为高考和竞赛两类，无论是内容、方法与难度，都大相径庭，这就容易造成一种误解，即高考和竞赛是根本矛盾的。但是，中学的实际情况告诉我们，两者是密不可分的，即绝大多数同学接受一点奥林匹克数学的熏陶大有益处。部分在数学学习方面有特长的同学也需要有扎实的基础。因此，本丛书立意在从高考向奥数过渡方面形成自己的一点特色。丛书 A 部分为高考要求，B 部分在内容上略有拓展，在难度上略有提高。本书既是高考专题复习的辅助教材，又是奥数活动的素材资源。综合训练更是为学习的检查和反馈提供了样卷。丛书内容充实，注重方法介绍，重视总结归纳，例题突出典型性、示范性，练习体现原创性和实用性，在编排上深入浅出，由易到难，更适合于学生学习。

《高中数学竞赛专题 A+B》丛书由浙江师范大学卜月华教授主编，高一分册由浙江省东阳中学数学高级教师、数学教育硕士吴国建主编，高二分册由浙江省嘉兴一中数学高级教师、数学教育硕士吕峰波主编，参加丛书编写的还有：朱建华（东阳中学）、余建新（衢州二中）、吴文广（永康中学）、吴伟文（武义中学）、沈新权（嘉兴一中）、张金良（元济高级中学、特级教师）、何晓远（杭州四中）、季诚胜（义乌中学）、郑红政（浦江中学）、周建峰（浙师大附中）、陶文强（金华一中）、徐元根（浙江师范大学副教授）、黄茂福（常山中学）、舒林军（兰溪中学）。每位编写者都有多年的从事高考和奥数辅导的经验，他们成熟的数学思想与教育教学方法充分体现在字里行间。

尽管我们的书稿是在多年授课讲义基础上整理而成，尽管在成书过程中我们近乎苛刻，精益求精，但是由于我们水平有限，丛书中难免会有纰漏和错误之处。我们衷心希望各位专家同仁批评指正，更希望得到使用本书的广大中学师生的意见和建议。我们相信，有你的关心与帮助，本书会越来越成熟，我们从高考走向奥赛的目标也会越来越接近。

目　录

A－1　不等式的解法

知识归纳

在熟练掌握一元一次不等式、一元二次不等式解法的基础上，再初步掌握简单的高次不等式、分式不等式、无理不等式、指数与对数不等式的解法，掌握绝对值不等式的解法，会用不等式$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$解决一些复杂问题.

1. 有理不等式的解法

有理不等式主要指一元一次不等式、一元二次不等式、高次不等式和分式不等式.

2. 无理不等式的解法

解无理不等式，一般是通过移项，对不等式两端乘方等方法变形为有理不等式（组）来解. 为保持变形的等价性，应注意未知数的取值范围和不等式两端乘方的条件. 例如：

(1) $\sqrt{f(x)}\geqslant g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)\geqslant0,\\f(x)\geqslant g^2(x);\end{cases}$ 或$\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)\leqslant0.\end{cases}$

(2) $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)>0,\\f(x)<g^2(x).\end{cases}$

3. 指数和对数不等式的解法

解指数与对数不等式，一般是将其转化为代数不等式，主要方法是通过指数函数和对数函数的定义域及性质进行等价变形.

4. 绝对值不等式的解法

解绝对值不等式的关键是将其化为等价的不含绝对值符号的不等式（组）. 例如：

(1) $|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$或$f(x)\leqslant-g(x)$;

(2) $|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$;

(3) $|f(x)|\geqslant|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\geqslant g^2(x)$;

(4) $|f(x)|\leqslant|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\leqslant g^2(x)$.

5. 恒成立不等式问题的最值解法

解决在指定范围内不等式恒成立问题时，通常用到下面的结论：

(1) 不等式$f(x)\geqslant\lambda$对$x\in D$恒成立的充要条件是$\lambda\leqslant\min\limits_{x\in D}f(x)$;

(2) 不等式$f(x)\leqslant\lambda$对$x\in D$恒成立的充要条件是$\lambda\geqslant\max\limits_{x\in D}f(x)$;

(3) 若存在$x_0\in D$使$f(x_0)\geqslant\lambda$成立的充要条件是$\lambda\leqslant\max\limits_{x\in D}f(x)$;

(4) 若存在$x_0\in D$使$f(x_0)\leqslant\lambda$成立的充要条件是$\lambda\geqslant\min\limits_{x\in D}f(x)$.

以上结论，当最值不存在时，结论中的最小值换成下确界，最大值换成上确界.

例题精析

例1 解关于 x 的不等式 $ax^2+2x+a>0$.

解 当 $a=0$ 时,原不等式的解为 $x>0$.

当 $a\neq0$ 时,其判别式 $\Delta=4(1-a)(1+a)$,分类讨论如下:

(1)当 $-1<a<0$ 或 $0<a<1$ 时,$\Delta>0$,对应二元方程 $ax^2+2x+a=0$ 的两根为

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$.

当 $-1<a<0$ 时,原不等式的解为 $x_2<x<x_1$.

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解为 $x<x_1$ 或 $x>x_2$.

(2)当 $a=-1$ 或 $a=1$ 时,$\Delta=0$.

当 $a=-1$ 时,原不等式无解;当 $a=1$ 时,原不等式的解为 $x\neq-1$.

(3)当 $a<-1$ 或 $a>1$ 时,$\Delta<0$.

当 $a<-1$ 时,原不等式无解;当 $a>1$ 时,原不等式的解为一切实数.

综上所述,当 $a>1$ 时,原不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

当 $a=1$ 时,原不等式的解集为 $\{x|x\neq-1\}$;

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集为 $\left\{x|x<\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}\text{或}x>\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$;

当 $a=0$ 时,原不等式的解集为 $\{x|x>0\}$;

当 $-1<a<0$ 时,原不等式的解集为 $\left\{x|\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$;

当 $a\leqslant-1$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$.

说明 解含参数的不等式时,应注意正确地分类.

例2 已知 $c>0$,设 P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;Q:不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$;如果 P 和 Q 有且仅有一个正确,求 c 的取值范围.

解 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, x\geqslant2c;\\2c, x\leqslant2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果 P 正确,且 Q 不正确,则 $0<c\leqslant\dfrac{1}{2}$;如果 P 不正确,且 Q 正确,则 $c\geqslant1$.

所以,c 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

例3 解不等式 $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|(\sin x+\cos x)$.

解 由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,知 $\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|\cdot\sqrt{2}=2|\tan x|$.

而由不等式的性质知 $\tan^2 x+1\geqslant 2|\tan x|$.

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{|x|+|y|}{\pi}=0,\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\\ |\tan x|=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|+|y|=\pi,\\ x=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}(n,k\in\mathbf{Z}),\\ x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$$

又$\because -\pi\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore$ 原不等式的解为$(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$或$(x,y)=\left(\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

说明 解三角、反三角不等式，应注意到三角函数和反三角函数的有界性，不等式成立的条件.

例 4 函数$f(x)=\dfrac{(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)}{(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)}$的定义域用 D 表示，则使$f(x)>0$，对于任意 $x\in D$ 均成立的实数 k 的集合是什么？

解 若 $k+1=0$，即 $k=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{10-2x}{3x^2+5}$，易知 $D=\mathbf{R}$. 但当 $x>5$ 时，$f(x)<0$，所以 $k=-1$ 不符合条件.

若$(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 有两根 x_1、x_2. 如果$f(x)>0$ 对 $x\in D$ 均成立，则 x_1、x_2一定是$(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)=0$ 的根. 于是有

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{k+3}{k+1}=-\dfrac{k+1}{2k-1},\\ x_1x_2=\dfrac{2k-8}{k+1}=\dfrac{k-4}{2k-1},\\ \Delta=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow k=1.$$

事实上，当 $k=1$ 时，$f(x)=2>0$，其中 $D=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.

若$(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 无实根，则题意的等价条件为

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0,\\ \Delta_1=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)<0,\Delta_2=(k+1)^2-4(2k-1)(k-4)\leqslant 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>\dfrac{1}{2}\text{或 }k<-1,\\ k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7},\\ k\geqslant 5\text{ 或 }k\leqslant\dfrac{3}{7}.\end{cases}\Rightarrow k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}.$$

所以 k 的取值集合是$\left\{k\,|\,k=1\text{ 或 }k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{或 }k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}\right\}$.

例 5 不等式$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{12}\log_a(a-1)+\dfrac{2}{3}$对一切大于 1 的自然数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

解 设$f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2)$.

由$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$,得$f(n)$为$\mathbf{N}^*$的增函数. 故$f(n)\geqslant f(2)=\frac{7}{12}$. 由题意得$\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}<\frac{7}{12}$,解得$1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

说明 本题通过构造数列,利用数列的单调性求出数列的最值,从而使问题得以解决.

例 6 不等式$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0, x\in[0,1]$恒成立,试求$\theta$的取值范围.

解 (1)当$x=0$时,原不等式即为$\sin\theta>0$;当$x=1$时,原不等式即为$\cos\theta>0$,所以θ是第一象限角.

(2)当$x\in(0,1)$时,原不等式$\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cos\theta+\frac{1-x}{x}\sin\theta>1$

$\Leftrightarrow\min\limits_{x\in(0,1)}\left\{\frac{x}{1-x}\cos\theta+\frac{1-x}{x}\sin\theta\right\}>1$.

令$f(x)=\frac{x}{1-x}\cos\theta+\frac{1-x}{x}\sin\theta$, $\because\sin\theta>0,\cos\theta>0,x,1-x\in(0,1)$.

$\therefore f(x)\geqslant 2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{2\sin2\theta}$. 等号成立,当且仅当$\frac{x}{1-x}\cos\theta=\frac{1-x}{x}\sin\theta$,即$x=\frac{\sqrt{\tan\theta}}{1+\sqrt{\tan\theta}}\in(0,1)$. 于是$f(x)_{min}=\sqrt{2\sin2\theta}$. 所以$\sin2\theta>\frac{1}{2}$,注意到$\sin\theta>0,\cos\theta>0$. 解得$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

说明 有关恒等不等式的求解,可先构造函数,再利用函数的性质进行研究.

例 7 求实数a的取值范围,使得对任意实数x和任意$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$恒有

$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.

解 易知原不等式$\Leftarrow(3+2\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta-a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{4}$,由$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,解得

$$a\geqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}\text{或 }a\leqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}.$$

令$t=\sin\theta+\cos\theta$,得$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(t^2-1)$,且$t\in[1,\sqrt{2}]$. 于是有$a\geqslant t+\frac{5}{2t}$或$a\leqslant t+\frac{3}{2t}$,对$t\in[1,\sqrt{2}]$恒成立$\Rightarrow a\geqslant\max\limits_{t\in[1,\sqrt{2}]}\left\{t+\frac{5}{2t}\right\}$或$a\leqslant\min\limits_{t\in[1,\sqrt{2}]}\left\{t+\frac{3}{2t}\right\}\Rightarrow a\geqslant\frac{7}{2}$或$a\leqslant\sqrt{6}$,即为所求.

例 8 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$满足条件:

(1)当$x\in\mathbf{R}$时,$f(x-4)=f(2-x)$,且$f(x)\geqslant x$;

(2)当$x\in(0,2)$时,$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3)$f(x)$在$\mathbf{R}$上的最小值为0.

求最大的 $m(m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

解 由(1)知，函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$. 所以 $b=2a$， ①

由(3)知，$x=-1$ 时，$y=0$，即 $a-b+c=0$， ②

由(1)、(2)知 $f(1)=1$，即 $a+b+c=1$， ③

联立①、②、③得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$. 所以 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

假设存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$，即 $\frac{1}{4}(x+t+1)^2\leqslant x$ 恒成立. 取 $x=1$，有 $\frac{1}{4}(t+2)^2\leqslant 1$，解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$. 取 $x=m$，有 $\frac{1}{4}(m+t+1)^2\leqslant m$，即 $m^2-2(1-t)m+t^2+2t+1\leqslant 0$. 解得 $1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$.

$\therefore m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$. $\because 0\leqslant -t\leqslant 4$，$\therefore m\leqslant 1+4+4=9$. 故当 $t=-4$ 时，$m_{\max}=9$.

例 9 若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值 $2b$，求 $[a,b]$.

解 分三种情况讨论区间 $[a,b]$：

(1)若 $0\leqslant a<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，故 $f(a)=2b$，$f(b)=2a$. 于是 $2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$，$2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}$. 解之得 $[a,b]=[1,3]$.

(2)若 $a<0<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,0]$ 上单调递增，在 $[0,b]$ 上单调递减，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 $2b$，在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$. 故 $2b=\frac{13}{2}$，$b=\frac{13}{4}$.

由于 $a<0$，又 $f(b)=-\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\right)^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$，故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$，即 $2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$. 解之得 $a=-2-\sqrt{17}$. 于是 $[a,b]=\left[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}\right]$.

(3)若 $a<b\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故 $f(a)=2a$，$f(b)=2b$，即 $2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$，$2b=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}$. 由于方程 $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$ 的两根异号，故满足 $a<b\leqslant 0$ 的区间不存在.

综上所述，所求区间为 $[1,3]$ 或 $\left[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}\right]$.

例 10 设函数 $f(x)=ax^2+8x+3\ (a<0)$，对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立.

问：a 为何值时 $l(a)$ 最大？求出这个最大的 $l(a)$，证明你的结论.

解法一 由 $f(x)=ax^2+8x+3=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+3-\frac{16}{a}$.

(1)若 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，$l(a)$ 为方程 $f(x)=5$ 的较小根，由 $ax^2+8x+3=5$ 得 $l(a)=\frac{-4+\sqrt{16+2a}}{a}=\frac{2}{4+\sqrt{16+2a}}<\frac{1}{2}$.

(2)若$3-\frac{16}{a}\leqslant 5$,即$a\leqslant -8$时,$l(a)$为方程$f(x)=-5$的较大根,由$ax^2+8x+3=-5$得$l(a)=\frac{-4-2\sqrt{4-2a}}{a}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,此时$a=-8$.

因此,$a=-8$时,$l(a)$最大值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

解法二 由$|f(x)|\leqslant 5\Rightarrow\begin{cases}f(x)\leqslant 5\\ f(x)\geqslant -5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ax^2+8x-2\leqslant 0\\ ax^2+8x+8\geqslant 0.\end{cases}$

由第二个式子得$-\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}\leqslant x\leqslant -\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}$, ①

对于第一个式子,判别式$\Delta=\left(\frac{8}{a}\right)^2-4\left(-\frac{2}{a}\right)$.

(1)若$\Delta\leqslant 0$,即$a\leqslant -8$时,$l(a)=-\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}$

$\leqslant\frac{4}{\sqrt{4-2\times(-8)}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

(2)若$\Delta>0$,即$-8<a<0$时,得$x\geqslant -\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16+2a}{a^2}}$或$x\leqslant -\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16+2a}{a^2}}$与①求交集,则得到从0开始的非负连续区间,只有$0\leqslant x\leqslant -\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16+2a}{a^2}}<\frac{1}{2}$.

因此$a=-8$时,$l(a)$最大值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

注意 有关二次函数问题,可充分利用二次函数的性质进行研究.

达标巩固

一、选择题

1. 边长为a,b,c的三角形,其面积等于$\frac{1}{4}$,而外接圆半径为1.若$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$,$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,则$s$与$t$的大小关系是(　　).

(A)$s>t$　　(B)$s=t$　　(C)$s<t$　　(D)不确定

2. 设$x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$,以下三个数:$a_1=\cos(\sin x\pi)$,$a_2=\sin(\cos x\pi)$,$a_3=\cos(x+1)\pi$的大小关系是(　　).

(A)$a_3<a_2<a_1$　　(B)$a_1<a_3<a_2$　　(C)$a_3<a_1<a_2$　　(D)$a_2<a_3<a_1$

3. 已知方程$|x-2n|=k\sqrt{x}(n\in\mathbf{N})$在区间$(2n-1,2n+1]$上有两个不相等的实根,则$k$的取值范围是(　　).

(A)$k>0$　　(B)$0<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(C) $\frac{1}{2n+1}<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$　　(D)以上都不是

4. 若 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right]$，则函数 $y=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值是(　　)

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

5. 已知 x、y 都在区间 $(-2,2)$ 内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是(　　).

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

6. 平面上整点(纵、横坐标都是整数的点)到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是(　　).

(A) $\frac{\sqrt{34}}{170}$　　(B) $\frac{\sqrt{34}}{85}$　　(C) $\frac{1}{20}$　　(D) $\frac{1}{30}$

二、填空题

7. 函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值是________.

8. 设 x,y,z 为非负实数，且满足方程 $4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0$，那么 $x+y+z$ 的最大值与最小值的乘积等于________.

9. 设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$，记 a,b,c 中的最大数为 M，则 M 的最小值为________.

10. 已知 95 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{95}$，每个都只能取 $+1$ 或 -1 两个值之一，那么它们的两两之积的和 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{94}a_{95}$ 的最小正值是________.

11. 记 $\min\{a,b\}$ 为 a、b 两数的较小值，当正数 x、y 变化时，$t=\min\left\{x,\frac{y}{x^2+y^2}\right\}$ 也在变化，则 t 的最大值为________.

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$. 若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2002)=$________.

三、解答题

13. 设函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0)$ 对任意非零的实数 x_1、x_2 满足 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 且 $y=f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数，解不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant0$.

14. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{Z})$，已知方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-2,0)$ 内有两个不相等的实数根，且对任意实数 x 恒有 $4x+2\leqslant f(x)\leqslant8x^2+12x+4$，求 a,b,c 的值.

15. 实系数方程 $x^2+px+q=0$ 的两实根 α,β，满足不等式 $|\alpha+p|+|\beta+p|\leqslant1$，试求 $\omega=p^2+2q$ 的最大值和最小值.

16. 设正整数 a,b,c,d 满足 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$，及 $a+c=20$，求 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ 的最大值.

A-2 不等式的证明

知识归纳

掌握不等式的性质及其证明,掌握证明不等式的几种常用方法,掌握两个(或多个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理,并能运用上述性质、定理和方法解决一些实际问题.

1. 比较法

作差比较法:欲证 $A\geqslant B$,只须证 $A-B\geqslant 0$.

作商比较法:欲证 $A\geqslant B(A>0,B>0)$,只须证$\frac{A}{B}\geqslant 1$,常用于证明指数、对数不等式.

用比较法证明不等式的关键在于变形,变形应有目的地进行,常用变形技巧是通分、配方等,将其化成几个因式的积或一常数等形式.

2. 分析综合法

分析法的证明过程是从求证的不等式出发,层层推出使它成立的充要条件,直到得到一个显然成立的不等式或一个比较易证明的不等式为止,这种方法在探求不等式的证明思路时是最有效的方法之一.

利用题设和某些证明过的不等式作为基础,再运用不等式的性质推导出欲证的不等式,这种证明方法称为综合法、综合法的思路是"由因导果",也就是从已知的不等式出发,不断地用必要条件代替前面的不等式,直接推导出欲证的不等式.

3. 数学归纳法

通常运用数学归纳法证明与自然数 n 有关的不等式.

4. 放缩法

为了证明不等式 $A\leqslant B$,我们可找一个或多个中间量 C 作比较,即若能断定 $A\leqslant C$、$C\leqslant B$ 同时成立,那么 $A\leqslant B$ 显然正确. 所谓"放"即把 A 放大到 C,再把 C 放大到 B;反之,由 B 缩小经过 C 而变到 A,则称为"缩",统称为放缩法. 放缩是一种技巧性较强的不等变形,必须时刻注意放缩的跨度,做到"放不能过头,缩不能不及".

5. 构造法

通常将要证明的不等式构造成相应的图形、函数及数列等加以证明.

6. 向量法

利用向量不等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ 可以证明一些非向量不等式.

例题精析

例 1 设 x、y、$z\in\mathbf{R}^{+}$,求证:$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\leqslant\frac{3}{4}$.

证法一 (作差比较法)

$$右边-左边=\frac{y+z-2x}{4(2x+y+z)}+\frac{z+x-2y}{4(x+2y+z)}+\frac{x+y-2z}{4(x+y+2z)}$$

$$=\frac{x-y}{4}\left(\frac{1}{x+2y+z}-\frac{1}{2x+y+z}\right)+\frac{y-z}{4}\left(\frac{1}{x+y+2z}-\frac{1}{x+2y+z}\right)+\frac{z-x}{4}\left(\frac{1}{2x+y+z}-\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

$=\frac{1}{4}\frac{(x-y)^2}{(2x+y+z)(x+2y+z)}+\frac{1}{4}\frac{(y-z)^2}{(x+2y+z)(x+y+2z)}+\frac{1}{4}\frac{(z-x)^2}{(x+y+2z)(2x+y+z)}\geqslant 0$,当且仅当 $x=y=z$ 时取到等号,故原不等式得证.

注 作差比较法是证明不等式的常用方法,利用元素之间的对等性进行合理的猜想,然后对常数进行恰当的分解.我们也可对分母进行换元,就容易用基本不等式证明.

证法二 令 $2x+y+z=a$,$x+2y+z=b$,$x+y+2z=c$,则

$x=\frac{3a-b-c}{4}$,$y=\frac{3b-a-c}{4}$,$z=\frac{3c-b-a}{4}$,则左边 $=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\leqslant\frac{3}{4}$. 当且仅当 $a=b=c$,即 $x=y=z$ 时取等号.

例 2 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$k\in[-2,2]$. 求证:

$$(x^2+kxy+y^2)(y^2+kyz+z^2)(z^2+kzx+x^2)\geqslant\left(\frac{k+2}{3}\right)^3(xy+yz+zx)^3.$$

证明 由 $(x+y+z)(xy+yz+zx)-(x+y)(y+z)(z+x)=xyz=\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx}\leqslant\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}$,得 $(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

$$\because x^2+kxy+y^2=\left(1-\frac{k}{2}\right)(x^2+y^2)+\frac{k}{2}(x+y)^2\geqslant\left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{k}{2}(x+y)^2,$$

$$\therefore x^2+kxy+y^2\geqslant\frac{k+2}{4}(x+y)^2.$$

同理 $y^2+kyz+z^2\geqslant\frac{k+2}{4}(y+z)^2$,$z^2+kzx+x^2\geqslant\frac{k+2}{4}(z+x)^2$.

又 $k\in[-2,2]$,

$$\therefore (x^2+kxy+y^2)(y^2+kyz+z^2)(z^2+kzx+x^2)$$

$$\geqslant\left(\frac{k+2}{4}\right)^3[(x+y)(y+z)(z+x)]^2$$

$$\geqslant\left(\frac{k+2}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$$

$$\geqslant\left(\frac{k+2}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 3(xy+yz+zx)(xy+yz+zx)^2$$

$=\left(\frac{k+2}{3}\right)^3(xy+yz+zx)^3$. 当且仅当 $x=y=z$ 时取到等号.

注 本题通过正、逆运用重要不等式,并进行合理的分解,从而使不等式得证.

例 3 若 $a,b,c\in(0,1)$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $(1-a)b^n$,$(1-b)c^n$,$(1-c)a^n$ 不可能同时大于 $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

证明 (用反证法)假设 $(1-a)b^n>\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$,$(1-b)c^n>\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$,$(1-c)a^n>$

$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$，则$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<n(1-a)b^n\leqslant\left[\frac{(n-na)+nb}{n+1}\right]^{n+1}$，即得$\frac{n}{n+1}<\frac{(n-na)+nb}{n+1}\Rightarrow b>a$.

同理 $c>b,a>c$. 三式相加，得 $a+b+c>a+b+c$ 矛盾. 原结论成立.

注 本题先运用平均不等式，然后构造矛盾不等式，从而使问题得以解决.

例 4 设 a,b,A,B 均是已知实数，且对任何实数 x，不等式 $A\cos2x+B\sin2x+a\cos x+b\sin x\leqslant1$ 恒成立.

求证：① $a^2+b^2\leqslant2$，② $A^2+B^2\leqslant1$.

证明 （构造函数法）令 $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos2x-B\sin2x$，则 $f(x)$ 可变形为 $f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\cos2(x-\varphi)$，

依题设有 $f\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{A^2+B^2}\cos2\left(\theta-\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=1-\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{A^2+B^2}\sin2(\theta-\varphi)\geqslant0$，

$f\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(\theta-\varphi)\geqslant0$，把这两个不等式相加，即得 $a^2+b^2\leqslant2$. 同理，由 $f(\varphi)+f(\pi+\varphi)\geqslant0$，可得 $A^2+B^2\leqslant1$.

注 在证明不等式的过程中，通过构造函数并结合赋值法，也是解决某些不等式问题的一种策略.

例 5 设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$a,b\in\mathbf{Q}^+$，求证：$a^ab^b(x+y)^{a+b}\geqslant(a+b)^{a+b}x^ay^b$.

证明 （1）当 a,b 为正整数时，有

$$(x+y)^{a+b}=\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{a}+\cdots+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{y}{b}+\cdots+\frac{y}{b}\right)^{a+b}$$

$$\geqslant\left[(a+b)\sqrt[a+b]{\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b}\right]^{a+b}=(a+b)^{a+b}\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b,$$

即得要证不等式. 由以上证明过程知，当且仅当$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$时取等号.

（2）当 a,b 为正有理数时，可通过通分使得 $a=\frac{c}{k}$，$b=\frac{d}{k}$，其中 c,d,k 为正整数. 则有

$$(x+y)^{a+b}=[(x+y)^{c+d}]^{\frac1k}\geqslant\left[(c+d)^{c+d}\left(\frac{x}{c}\right)^c\left(\frac{y}{d}\right)^d\right]^{\frac1k}$$

$$=\left\{[k(a+b)]^{k(a+b)}\left(\frac{x}{ka}\right)^{ka}\left(\frac{y}{kb}\right)^{kb}\right\}^{\frac1k}$$

$$=(a+b)^{a+b}\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b.$$

由此也得到要证明的不等式，取等号的条件同上. 所以命题获证.

注 本题通过把正有理数分成正整数和正分数两类，同时结合平均不等式使问题得以解决.

例 6 设 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}^+$，$0<x,y,z<\frac{\lambda}{\mu}$，$3\lambda-\mu>0$ 且 $x+y+z=1$.

求证：$\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{3}{3\lambda-\mu}$.

证明 构造 $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{\frac{x}{\lambda-\mu x}},\sqrt{\frac{y}{\lambda-\mu y}},\sqrt{\frac{z}{\lambda-\mu z}}\right)$,

$\boldsymbol{b}=(\sqrt{x(\lambda-\mu x)},\sqrt{y(\lambda-\mu y)},\sqrt{z(\lambda-\mu z)})$, $\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+y+z=1$,

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x(\lambda-\mu x)+y(\lambda-\mu y)+z(\lambda-\mu z)}$

$=\sqrt{\lambda-\mu(x^2+y^2+z^2)}$, 而且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,

$\therefore 1\leqslant\sqrt{\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}}\cdot\sqrt{\lambda-\mu(x^2+y^2+z^2)}$,

即得 $\frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{1}{\lambda-\mu(x^2+y^2+z^2)}$,

又 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$, 得 $0<\lambda-\mu(x^2+y^2+z^2)\leqslant\lambda-\frac{\mu}{3}$,

$\therefore \frac{x}{\lambda-\mu x}+\frac{y}{\lambda-\mu y}+\frac{z}{\lambda-\mu z}\geqslant\frac{3}{3\lambda-\mu}$. 当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时取到等号.

例 7 设 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

证明 (增量方法)首先不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$, 令 $a=c+\delta_1$, $b=c+\delta_2$, 则 $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant0$, 于是 $abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$=(c+\delta_1)(c+\delta_2)c-(c+\delta_2-\delta_1)(c+\delta_1-\delta_2)(c+\delta_1+\delta_2)$

$=(c^2+\delta_1c+\delta_2c+\delta_1\delta_2)c-[c^2-(\delta_1-\delta_2)^2][c+(\delta_1+\delta_2)]$

$=c\delta_1\delta_2+(\delta_1-\delta_2)^2(c+\delta_1+\delta_2)\geqslant0$,

$\therefore abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

注:利用实数的有序性,通过引进增量,根据增量的非负性,从而使不等式获证.

例 8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数,如果它们之中任意两数的和为非负数,那么对于满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2.$$

证明 由题设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 之中任意两数的和为非负数,所以它们之中至多有一个负数,而且其绝对值不超过其余任一数.

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为非负数,由 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数知 $0\leqslant x_i\leqslant1(i=1,2,\cdots,n)$, 所以 $x_i\geqslant x_i^2$, 故所证不等式显然成立.

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中恰有一个为负数,不妨设 $a_1<0$, 而 $a_j\geqslant|a_1|>0(j=1,2,\cdots,n)$, 且 $x_1+x_j\leqslant1$. 从而

$(a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n)-(a_2x_2^2+a_3x_3^2+\cdots+a_nx_n^2)$

$=a_2x_2(1-x_2)+a_3x_3(1-x_3)+\cdots+a_nx_n(1-x_n)$

$\geqslant a_2x_2x_1+a_3x_3x_1+\cdots+a_nx_nx_1$

$\geqslant|a_1|\cdot x_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)=|a_1|\cdot x_1(1-x_1)$

$\geqslant -a_1x_1(1-x_1)$.

于是,移项可得需证不等式成立.

例 9 设 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant5$, 证明: $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

证法一 由于$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$,

因此$a+b+c+d\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$(当且仅当$a=b=c=d$时取等号).则$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant 2\sqrt{(x+1)+(x+1)+(2x-3)+(15-3x)}$

$=2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{5+14}=2\sqrt{19}$.

因为$\sqrt{x+1}$,$\sqrt{2x-3}$,$\sqrt{15-3x}$不能同时相等,所以原不等式成立.

证法二 由二元基本不等式和$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$,得

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{15-3x})$$

$$<2\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{2x-3})^2}{2}}+2\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{15-3x})^2}{2}}$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3x-2}+\sqrt{16-2x})<2\sqrt{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{3x-2})^2+(\sqrt{16-2x})^2}{2}}$$

$$=2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{5+14}=2\sqrt{19}.$$

证法三 由四元基本不等式,得

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{20-4x}$$

$$\leqslant\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{20-4x}$$

$$<4\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{2x-3})^2+(\sqrt{20-4x})^2}{4}}=2\sqrt{19}.$$

证法四 由柯西不等式,得

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}=2\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\sqrt{x-\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{10-2x}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(4+2+\frac{3}{2}\right)\left[(\sqrt{x+1})^2+\left(\sqrt{x-\frac{3}{2}}\right)^2+(\sqrt{10-2x})^2\right]}=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{19}{2}}<2\sqrt{19}.$$

注 本题运用二元平均不等式及其变式、四元平均不等式和柯西不等式,多个角度、多层面对题目进行了分析、证明,拓宽了题目的知识辐射面.

例 10 在平面直角坐标系 xOy 中,y 轴正半轴上的点列$\{A_n\}$与曲线 $y=\sqrt{2x}(x\geqslant 0)$上的点列$\{B_n\}$满足$|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$,直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n,点 B_n 的横坐标为 b_n,$n\in\mathbf{N}^*$.

证明:(1)$a_n>a_{n+1}>4$,$n\in\mathbf{N}^*$;

(2)存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$,使对一切 $n>n_0$ 都有$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$.

证法一 (1)由于$|OB_n|=\frac{1}{n}$,有 $b_n^2+2b_n=\frac{1}{n^2}$.解得 $b_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1$.故对 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_n>b_{n+1}>0$.