

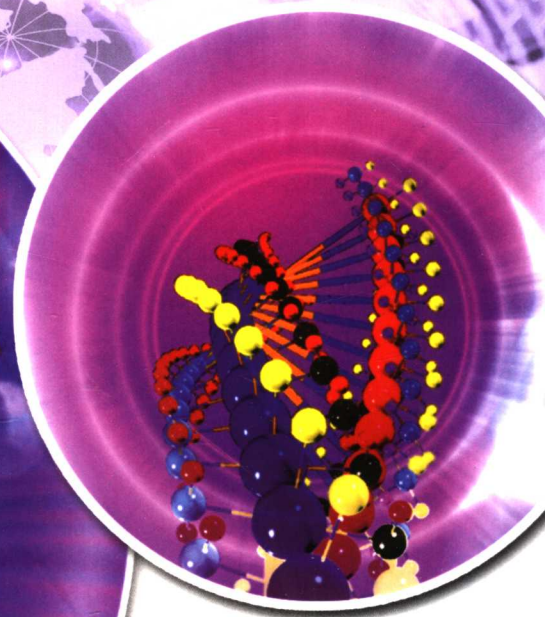
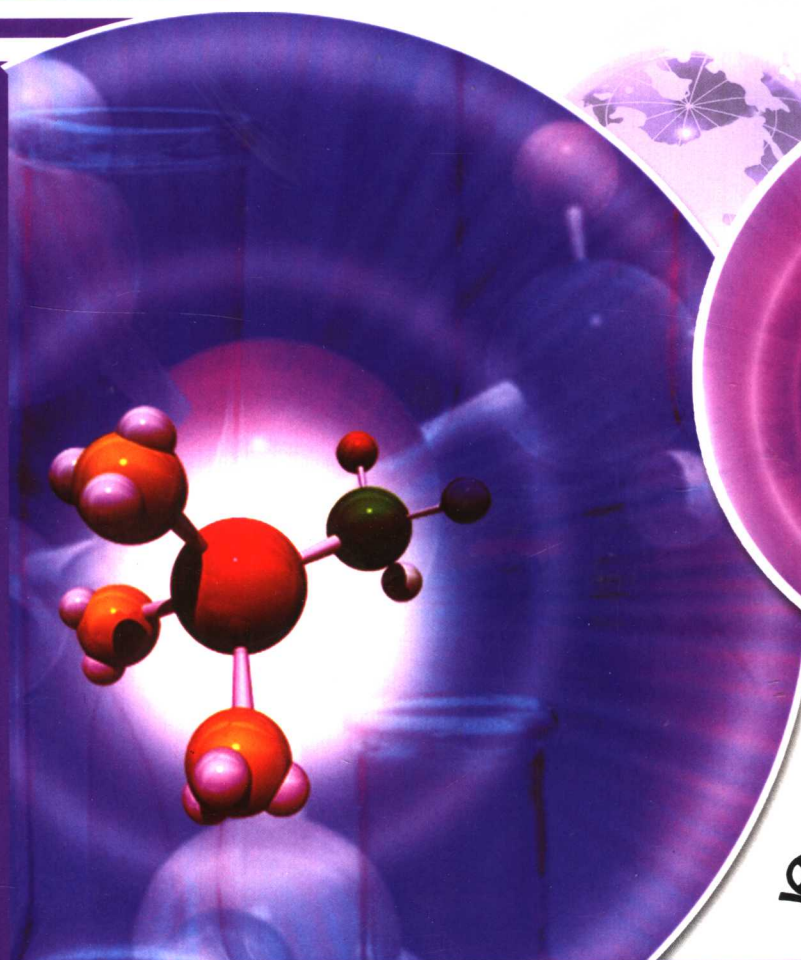


21世纪高职高专新概念教材

复变函数与积分变换

张翠莲 主 编

牛莉 曾大有 副主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21 世纪高职高专新概念教材

复变函数与积分变换

张翠莲 主 编

牛 莉 曾大有 副主编

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育工程数学课程教学基本要求》编写的。主要内容包括：复数与复变函数、复变函数的极限与连续性，复变函数的导数、解析函数、初等解析函数，复变函数的积分，复变函数的幂级数和罗伦级数，留数与留数定理，傅里叶变换和拉普拉斯变换等。

本书依据“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少数学理论的推证，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，强调为学生学习后续专业课提供必备的数学知识。本教材力求叙述简明，深入浅出，分散难点，注重应用。

本教材既可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校工科类各专业的教材，又可作为“专升本”及学历文凭考试的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换 / 张翠莲主编. —北京：中国水利水电出版社，2005
（21 世纪高职高专新概念教材）

ISBN 7-5084-3426-9

I. 复… II. 张… III. ①复变函数—高等学校：技术学校—教材②积分变换—高等学校：技术学校—教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 139127 号

书 名	复变函数与积分变换
作 者	张翠莲 主编 牛 莉 曾大有 副主编
出版 发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号 100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68331835（营销中心）、82562819（万水）
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京市天竺颖华印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16 开本 10 印张 240 千字
版 次	2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—5000 册
定 价	18.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

21 世纪高职高专新概念教材 编委会名单

主任委员 刘 晓 柳菊兴

副主任委员 胡国铭 张栾勤 王前新 黄元山 柴 野

张建钢 陈志强 宋 红 汤鑫华 王国仪

委 员 (按姓氏笔画排序)

马洪娟	马新荣	尹朝庆	方 宁	方 鹏
毛芳烈	王 祥	王乃钊	王希辰	王国思
王明晶	王泽生	王绍卜	王春红	王路群
东小峰	台 方	叶永华	宁书林	田 原
田绍槐	申 会	刘 猛	刘尔宁	刘慎熊
孙明魁	安志远	许学东	闫 菲	何 超
宋锦河	张 晞	张 慧	张弘强	张怀中
张晓辉	张浩军	张海春	张曙光	李 琦
李存斌	李作纬	李珍香	李家瑞	李晓桓
杨永生	杨庆德	杨名权	杨均青	汪振国
肖晓丽	闵华清	陈 川	陈 炜	陈语林
陈道义	单永磊	周杨娣	周学毛	武铁敦
郑有想	侯怀昌	胡大鹏	胡国良	费名瑜
赵 敬	赵作斌	赵秀珍	赵海廷	唐伟奇
夏春华	徐 红	徐凯声	徐雅娜	殷均平
袁晓州	袁晓红	钱同惠	钱新恩	高寅生
曹季俊	梁建武	蒋金丹	蒋厚亮	覃晓康
谢兆鸿	韩春光	詹慧尊	雷运发	廖哲智
廖家平	管学理	蔡立军	黎能武	魏 雄

项目总策划 雨 轩

编委会办公室 主 任 周金辉

副主任 孙春亮 杨庆川

参编学校名单

(按第一个字笔划排序)

三门峡职业技术学院
山东大学
山东交通学院
山东建工学院
山东省电子工业学校
山东农业大学
山东省农业管理干部学院
山东省教育学院
山东商业职业技术学院
山西阳泉煤炭专科学校
山西运城学院
山西经济管理干部学院
广州市职工大学
广州铁路职业技术学院
中华女子学院山东分院
中国人民解放军第二炮兵学院
中国矿业大学
中南大学
天津市一轻局职工大学
天津职业技术师范学院
长沙大学
长沙民政职业技术学院
长沙交通学院
长沙航空职业技术学院
长春汽车工业高等专科学校
北京对外经济贸易大学
北京科技大学职业技术学院
北京科技大学成人教育学院
石油化工管理干部学院
石家庄师范专科学校
辽宁交通高等专科学校
华中电业联合职工大学
华中科技大学

华东交通大学
华北电力大学工商管理学院
华北航天工业学院
江汉大学
江西渝州电子工业学院
江西赣西学院
西安外事学院
西安欧亚学院
西安铁路运输职工大学
西安联合大学
孝感职业技术学院
杨陵职业技术学院
昆明冶金高等专科学校
武汉大学动力与机械学院
武汉大学信息工程学院
武汉工业学院
武汉工程职业技术学院
武汉广播电视大学
武汉化工学院
武汉电力职业技术学院
武汉交通管理干部学院
武汉科技大学工贸学院
武汉商业服务学院
武汉理工大学
武汉铁路职业技术学院
河南济源职业技术学院
郑州工业高等专科学校
陕西师范大学
南昌水利水电高等专科学校
哈尔滨金融专科学校
济南大学
济南交通高等专科学校
济南铁道职业技术学院

荆门职业技术学院
贵州无线电工业学校
贵州电子信息职业技术学院
恩施职业技术学院
黄冈职业技术学院
黄石计算机学院
湖北工学院
湖北丹江口职工大学
湖北交通职业技术学院
湖北汽车工业学院
湖北经济管理大学
湖北药检高等专科学校

湖北经济学院
湖北教育学院
湖北鄂州大学
湖北水利水电职业技术学院
湖南大学
湖南工业职业技术学院
湖南计算机高等专科学校
湖南省轻工业高等专科学校
湖南涉外经济学院
湖南郴州师范专科学校
湖南商学院
湖南税务高等专科学校

序

根据 1999 年 8 月教育部高教司制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)的精神,由中国水利水电出版社北京万水电子信息有限公司精心策划,聘请我国长期从事高职高专教学、有丰富教学经验的教师执笔,在充分汲取了高职高专和成人高等学校在探索培养技术应用性人才方面取得的成功经验和教学成果的基础上,撰写了此套《21 世纪高职高专新概念教材》。

为了编写本套教材,出版社进行了广泛的调研,走访了全国百余所具有代表性的高等专科学校、高等职业技术学院、成人教育高等院校以及本科院校举办的二级职业技术学院,在广泛了解情况、探讨课程设置、研究课程体系的基础上,经过学校申报、征求意见、专家评选等方式,确定了本套书的主编,并成立了编委会。每本书的编委会聘请了多所学校主要学术带头人或主要从事该课程教学的骨干,教学大纲的确定以及教材风格的定位均经过编委会多次认真讨论。

本套《21 世纪高职高专新概念教材》有如下特点:

(1) 面向 21 世纪人才培养的需求,结合高职高专学生的培养特点,具有鲜明的高职高专特色。本套教材的作者都是长期在第一线从事高职高专教育的骨干教师,对学生的基本情况、特点和认识规律等有深入的了解,在教学实践中积累了丰富的经验。因此可以说,每一本书都是教师们长期教学经验的总结。

(2) 以《基本要求》和《培养规格》为编写依据,内容全面,结构合理,文字简练,实用性强。在编写过程中,作者严格依据教育部提出的高职高专教育“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,力求从实际应用的需要(实例)出发,尽量减少枯燥、实用性不强的理论概念,加强了应用性和实际操作性强的内容。

(3) 采用“问题(任务)驱动”的编写方式,引入案例教学和启发式教学方法,便于激发学习兴趣。本套书的编写思路与传统教材的编写思路不同:先提出问题,然后介绍解决问题的方法,最后归纳总结出一般规律或概念。我们把这个新的编写原则比喻成“一棵大树、问题驱动”的原则。即:一方面遵守先见(构建)“树”(每本书就是一棵大树),再见(构建)“枝”(书的每一章就是大树的一个分枝),最后见(构建)“叶”(每章中的若干小节及知识点)的编写原则;另一方面采用问题驱动方式,每一章都尽量用实际中的典型实例开头(提出问题、明确目标),然后逐渐展开(分析解决问题),在讲述实例的过程中将本章的知识点融入。这种精选实例,并将知识点融于实例中的编写方式,可读性、可操作性强,非常适合高职高专的学生阅读和使用。本书读者通过学习构建本书中的“树”,由“树”找“枝”,顺“枝”摸“叶”,最后达到构建自己所需要的“树”的目的。

(4) 部分教材配有实验指导和实训教程,便于学生练习提高。

(5) 部分教材配有动感电子教案。为顺应教育部提出的教材多元化、多媒体化发展的要求,大部分教材都配有电子教案,以满足广大教师进行多媒体教学的需要。电子教案用 PowerPoint 制作,教师可根据授课情况任意修改。相关教案的具体情况请到中国水利水电出版社网站 www.waterpub.com.cn 下载。

(6) 提供相关教材中所有程序的源代码,方便教师直接切换到系统环境中教学,提高教学效果。

总之,本套教材凝聚了数百名高职高专一线教师多年的教学经验和智慧,内容新颖,结构完整,概念清晰,深入浅出,通俗易懂,可读性、可操作性和实用性强。

本套教材适用于高等职业学校、高等专科学校、成人及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校。

新世纪吹响了我国高职高专教育蓬勃发展的号角,新世纪对高职教育提出了新的要求,高职教育占据了全面素质教育中所不可缺少的地位,在我国高等教育事业中占有极其重要的位置,在我国社会主义现代化建设事业中发挥着日趋显著的作用,是培养新世纪人才所不可缺少的力量。相信本套《21 世纪高职高专新概念教材》的出版能为高职高专的教材建设和教学改革略尽绵薄之力,因为我们提供的不仅是一套教材,更是自始至终的教育支持,无论是学校、机构培训还是个人自学,都会从中得到极大的收获。

当然,本套教材肯定会有不足之处,恳请专家和读者批评指正。

21 世纪高职高专新概念教材编委会

2001 年 3 月

前 言

我国高等教育正在快速发展,教材建设也要与之适应,特别是教育部关于“高等教育面向 21 世纪内容与课程改革”计划的实施,对教材建设提出了新的要求。本书编写目的就是为了适应高等教育的快速发展,满足教学改革和课程建设的需求,体现高职高专教育的特点。

本书依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的要求,严格依据教育部提出的高职高专教育“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,精心选择了教材的内容,从实际应用和学生学习后续专业课的需要(实例)出发,加强数学思想和数学概念与工程实际结合的高职高专教学的特点,淡化了深奥的数学理论,每章都配有本章学习目标、本章小结、习题、自测题等,便于学生总结学习内容和学习方法,巩固所学知识。

全书内容包括:复数与复变函数、复变函数的极限与连续性,复变函数的导数、解析函数、初等解析函数,复变函数的积分,复变函数的幂级数和罗伦级数,留数与留数定理,傅里叶变换和拉普拉斯变换等。书后附有傅里叶变换表与拉普拉斯变换表、习题与自测题答案及提示。其中带有*的章节为选修内容。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校各工科专业工程数学教材,也可作为工程技术人员的参考资料。

本书由张翠莲主编并统稿,各章编写分工如下:第 1 章、第 2 章由牛莉编写,第 3 章、第 4 章、第 5 章由曾大有编写,第 6 章、第 7 章及附录由张翠莲编写。参加本书编写工作的还有何春江、王晓威、翟秀娜、邓凤茹、张文治、张钦礼等。

在本书的编写过程中,编者参考了很多相关的书籍和资料,采用了一些相关内容,汲取了很多同仁的宝贵经验,在此谨表谢意。

由于时间仓促及作者水平所限,书中错误和不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正,我们将不胜感激。

编 者

2005 年 10 月

目 录

序
前言

第一篇 复变函数

第 1 章 复数与复变函数.....	3
本章学习目标.....	3
1.1 复数	3
1.1.1 复数的概念.....	3
1.1.2 复数的代数运算.....	4
1.1.3 复数的各种表示、模与辐角.....	5
1.1.4 复数的幂与根.....	8
1.2 区域	10
1.2.1 复平面上的点集与区域.....	10
1.2.2 单连通域与多(复)连通域.....	11
1.3 复变函数.....	13
1.3.1 复变函数的概念.....	13
1.3.2 映射的概念.....	14
1.3.3 反函数与复合函数.....	15
1.4 复变函数的极限与连续性.....	15
1.4.1 复变函数的极限.....	15
1.4.2 复变函数的连续.....	17
本章小结	18
习题 1	19
自测题 1	21
第 2 章 解析函数	23
本章学习目标.....	23
2.1 复变函数的导数与微分.....	23
2.1.1 复变函数的导数.....	23
2.1.2 可导与连续的关系.....	25
2.1.3 复变函数的微分.....	25
2.1.4 导数运算法则.....	26
2.2 解析函数的概念.....	26

2.2.1	解析函数的定义及其性质.....	26
2.2.2	函数解析的充要条件.....	27
2.3	初等函数及其解析性.....	30
2.3.1	指数函数.....	30
2.3.2	对数函数.....	31
2.3.3	幂函数.....	32
2.3.4	三角函数.....	33
2.3.5	反三角函数.....	34
2.3.6*	双曲函数与反双曲函数.....	35
	本章小结.....	36
	习题 2.....	37
	自测题 2.....	38
第 3 章	复变函数的积分.....	40
	本章学习目标.....	40
3.1	复变函数积分的概念.....	40
3.1.1	积分的定义.....	40
3.1.2	积分存在的条件及其计算方法.....	41
3.1.3	积分的性质.....	42
3.2	积分基本定理.....	44
3.2.1	积分与路经无关问题.....	44
3.2.2	柯西—古萨 (Cauchy-Goursat) 基本定理.....	44
3.2.3	几个等价定理.....	45
3.3	基本定理的推广——复合闭路定理.....	47
3.4	柯西积分公式.....	48
3.5	解析函数的高阶导数.....	49
	本章小结.....	51
	习题 3.....	52
	自测题 3.....	52
第 4 章	级数.....	54
	本章学习目标.....	54
4.1	幂级数.....	54
4.1.1	幂级数的概念.....	54
4.1.2	泰勒级数.....	55
4.2	罗伦级数.....	57
	本章小结.....	60
	习题 4.....	61
	自测题 4.....	61

第 5 章 留数	63
本章学习目标	63
5.1 孤立奇点	63
5.1.1 孤立奇点的概念及分类	63
5.1.2 函数的零点与极点的关系	64
5.2 留数	65
5.2.1 留数概念	65
5.2.2 留数定理	66
5.2.3* 在无穷远点的留数	69
5.2.4* 留数在定积分计算上的应用	70
本章小结	72
习题 5	73
自测题 5	74

第二篇 积分变换

第 6 章 傅里叶变换	78
本章学习目标	78
6.1 傅里叶积分	78
6.1.1 主值意义下的广义积分	78
6.1.2 傅氏积分存在定理	79
6.2 傅里叶变换与频谱	80
6.2.1 傅里叶变换的概念	80
6.2.2 傅氏变换的物理意义——频谱	82
6.3 δ 函数及其傅里叶变换	84
6.3.1 δ 函数的定义	85
6.3.2 δ 函数的性质	86
6.3.3 δ 函数的傅里叶变换	87
6.3.4 一些常见函数的傅氏变换和一些傅氏变换对	88
6.4 傅里叶变换的性质	90
6.4.1 线性性质	90
6.4.2 对称性质	90
6.4.3 相似性性质	90
6.4.4 平移性质	91
6.4.5 微分性质	93
6.4.6 积分性质	94
6.4.7 傅氏变换的卷积与卷积定理	94
本章小结	95

习题 6	97
自测题 6	99
第 7 章 拉普拉斯变换	100
本章学习目标.....	100
7.1 拉普拉斯变换.....	100
7.1.1 拉普拉斯变换的概念.....	100
7.1.2 拉普拉斯变换存在定理.....	101
7.1.3 一些常用函数的拉普拉斯变换.....	101
7.1.4 周期函数的拉普拉斯变换.....	102
7.2 拉普拉斯变换的基本性质.....	103
7.2.1 线性性质.....	103
7.2.2 相似性	104
7.2.3 平移性质.....	104
7.2.4 微分性质.....	106
7.2.5 积分性质.....	107
7.2.6 拉氏变换的卷积与卷积定理.....	109
7.3 拉普拉斯逆变换.....	110
7.3.1 利用拉普拉斯变换表和性质求拉普拉斯逆变换	110
7.3.2 利用留数定理求拉氏逆变换.....	112
7.4 拉普拉斯变换的应用.....	113
7.4.1 常系数线性微分方程的拉普拉斯变换解法.....	113
7.4.2 线性系统的传递函数.....	116
本章小结	117
习题 7	118
自测题 7	121
附录 1 复变函数习题与自测题提示与答案	123
附录 2 积分变换习题与自测题提示及答案	133
附录 3 变换简表	138
参考文献.....	146

第一篇 复变函数

复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况。在很长时间里，人们对这类数不能理解。但随着数学的发展，这类数的重要性就日益显现出来。复数的一般形式是： $a+bi$ ，其中 i 是虚数单位。

以复数作为自变量的函数叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论。

复变函数论的发展简况

复变函数论产生于 18 世纪（1774 年）。欧拉在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分导出的两个方程。而比他更早时，法国数学家达朗贝尔在他的关于流体力学的论文中，就已经得到了它们。因此，后来人们提到这两个方程，把它们叫做“达朗贝尔—欧拉方程”。到了 19 世纪，上述两个方程在柯西和黎曼研究流体力学时，作了更详细的研究，所以这两个方程也被叫做“柯西—黎曼条件”。

复变函数论的全面发展是在 19 世纪，就像微积分的直接扩展统治了 18 世纪的数学那样，复变函数这个新的分支统治了 19 世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且称为这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。

为复变函数论的创建做了最早期工作的是欧拉、达朗贝尔，法国的拉普拉斯也随后研究过复变函数的积分，他们都是创建这门学科的先驱。

后来为这门学科的发展作了大量奠基工作的要算是柯西、黎曼和德国数学家维尔斯特拉斯。20 世纪初，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生，瑞典数学家列夫勒、法国数学家彭加勒、阿达玛等都作了大量的研究工作，开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献。

复变函数论在应用方面，涉及的面很广，有很多复杂的计算都是用它来解决的。比如物理学上有很多不同的稳定平面场，所谓场就是每点对应有物理量的一个区域，对它们的计算就是通过复变函数来解决的。

比如俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候，就用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题，他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献。

复变函数论不但在其他学科得到了广泛的应用，而且在数学领域的许多分支也都应用了它的理论。它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展很有影响。

复变函数论的内容

复变函数论主要包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数论、留数理论、广义解析函数等方面的内容。

如果当函数的变量取某一定值的时候，函数就有一个惟一确定的值，那么这个函数就叫做单值解析函数，多项式就是这样的函数。

复变函数也研究多值函数，黎曼曲面理论是研究多值函数的主要工具，由许多层面放在一起而构成的一种曲面叫做黎曼曲面。利用这种曲面，可以使多值函数的单值枝和枝点概念在几何上有非常直观表示和说明。对于某一个多值函数，如果能作出它的黎曼曲面，那么，函数在黎曼曲面上就变成单值函数。

黎曼曲面理论是复变函数域和几何间的一座桥梁，能够使我们把比较深奥的函数的解析性质和几何联系起来。近来，关于黎曼曲面的研究还对另一门数学分支拓扑学有比较大的影响，逐渐地趋向于讨论它的拓扑性质。

复变函数论中用几何方法来说明、解决问题的内容，一般叫做几何函数论，复变函数可以通过共形映像理论为它的性质提供几何说明。导数处处不是零的解析函数所实现的映像就都是共形映像，共形映像也叫做保角变换。共形映像在流体力学、空气动力学、弹性理论、静电场理论等方面都得到了广泛的应用。

留数理论是复变函数论中一个重要的理论。留数也叫做残数，它的定义比较复杂。应用留数理论对于复变函数积分的计算比起线积分计算方便。计算实变函数定积分，可以化为复变函数沿闭回路曲线的积分后，再用留数基本定理化为被积分函数在闭合回路曲线内部孤立奇点上求留数的计算，当奇点是极点的时候，计算更加简洁。

把单值解析函数的一些条件适当地改变和补充，以满足实际研究工作的需要，这种经过改变的解析函数叫做广义解析函数。广义解析函数所代表的几何图形的变化叫做拟保角变换。解析函数的一些基本性质，只要稍加改变后，同样适用于广义解析函数。

广义解析函数的应用范围很广泛，不但应用在流体力学的研究方面，而且像薄壳理论这样的固体力学部门也在应用。因此，近年来这方面的理论发展十分迅速。

从柯西算起，复变函数论已有 170 多年的历史了。它以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分。它曾经推动过一些学科的发展，并且常常作为一个有力的工具被应用在实际问题中，它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程。现在，复变函数论中仍然有不少尚待研究的课题，所以它将继续向前发展，并将取得更多应用。

第 1 章 复数与复变函数

本章学习目标

- 熟练掌握复数的各种表示方法、模、辐角及其运算
- 明确平面点集、区域等的有关概念
- 理解复变函数的概念
- 掌握复变函数的极限和连续的概念

高等数学和复变函数研究的对象都是变量，所不同的是高等数学中的变量来自于实数集合，而复变函数中的变量来自于复数集合。本章先介绍复数的概念、运算、表示法以及复数的模与辐角公式等，最后介绍复变函数的概念、复变函数的极限与连续性。

1.1 复数

1.1.1 复数的概念

设 x, y 为两个任意实数，称形如 $x+iy$ 的数为复数，记为 $z = x + iy$ ，其中 i 满足 $i^2 = -1$ ，称为虚数单位。实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

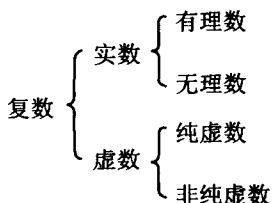
当 $x = 0, y \neq 0$ 时，复数 $z = iy$ 称为纯虚数；当 $y = 0$ 时，复数 $z = x$ 为一个实数（实数可看作是复数的特殊情形）；例如，复数 $z = 3 + i \cdot 0$ 就是实数 3。当 $x = y = 0$ 时，复数 $z = 0$ ，它既可看作实数也可看作纯虚数。全体复数构成的集合称为复数集，记作 C ，即

$$C = \{z = x + iy \mid x, y \in R\}$$

设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 是 C 中任意两个复数，当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ 时，称 z_1 与 z_2 相等，记作 $z_1 = z_2$ ，即 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ 。

称复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 互为共轭复数，复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$ ，若 $z = x + iy$ ，则 $\bar{z} = x - iy$ 。

各数集之间的关系可表示为：



1.1.2 复数的代数运算

设复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 定义 z_1 与 z_2 的四则运算如下:

加法: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

减法: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

乘法: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

注意: 复数 z_1 与 z_2 相乘, 按多项式乘法法则, 并利用 $i^2 = -1$.

除法: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$

注意: 复数 z_1 与 z_2 相除时, 先将它写成分数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的形式, 然后分子、分母分别乘以分母 z_2 的共轭复数 $\bar{z}_2$, 再进行化简即得上述结果.

复数四则运算规律:

(1) 加法交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(2) 乘法交换律 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(3) 加法结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

(4) 乘法结合律 $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$

(5) 乘法对于加法的分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

复数运算的其他结果:

(1) $z + 0 = z$, $0 \cdot z = 0$

(2) $z \cdot 1 = z$, $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

(3) 若 $z_1 z_2 = 0$, 则 z_1 与 z_2 至少有一个为零, 反之亦然.

共轭复数的运算性质:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$

(5) $z\bar{z} = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2$

(6) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

(7) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ 为实数.

例 1 化简 $\frac{(2+3i)^2}{2+i}$.

解
$$\begin{aligned} \frac{(2+3i)^2}{2+i} &= \frac{4-9+12i}{2+i} = \frac{(-5+12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{-10+12+29i}{4+1} = \frac{2+29i}{5} \end{aligned}$$

例 2 设 $z = \frac{1-2i}{3-4i} - \left(\frac{2+i}{-5i}\right)$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 及 $z\bar{z}$.