运筹学

张正西 编著

中国发明创造者基金会
中国预测研究会

运　筹　学

张正西 编 著

中国发明创造者基金会

中 国 预 测 研 究 会

一九八五年三月

前　言

运筹学是一门新兴的应用性科学。因为“新”，所以较难确定其确切的内容和范围。本教材只是按国际上和我们在国内的实践，尽可能向读者系统地介绍运筹学中的几个重要的分支，希望能使读者对运筹学的全貌有一个概括的了解。

作为运筹学的入门向导，本教材的编写尽可能结合国内外企业管理的实例，对运筹学的基本理论和计算方法作了简要的介绍。

考虑到目前企业管理中大量运用的是“线性规划”，所以，在本教材中对线性规划作了较详细地叙述。

本教材是以编著者在学院的教学心得，并酌量采用国际上目前较新的参考资料，按理论与实际并重的方式编写，期望能适用于工科院校的各管理工程专业、财经院校的企业管理专业的运筹学课程，并希望对于从事企业管理的干部和技术人员有所好处。

本教材是由张正西同志编著。出版时，得到霍俊同志的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

本书稿作为建筑工业经济、组织与计划专业的讲义，曾受到多方面的鼓励，并收到了很多宝贵的意见，之后，又进行了修改与补充。由于水平有限，错误与缺点难免，望读者批评指正。

西安冶金建筑学院管理工程系

目录

第一章　总　论

§1·1 运筹学的研究对象

运筹学是一门应用科学，它的主要内容是利用近代数学的成就，特别是概率论、数理统计和计算数学方面的成就，来研究能够用数学语言表达的某些有关运筹活动的数量关系。它研究这些问题的着眼点，主要有以下几个方面：1）在一定的条件和准则下，使整个活动系统达到最优的活动效果，由于从整个系统考虑问题，系统中个体的局部效益必须和整个系统的总体效益相结合，个体效益服从于总体效益；2）对于随着时间而发生状态变化的活动系统，在一定的条件和准则下，照顾到近期效益，使系统从长远考虑能够达到最优的活动效果，就是说，近期效益必须和远期效益相结合；3）影响整个系统的活动，可以包括许多相互联系和互相制约的因素，这些因素中也包含有互相对立的因素，这时运筹学的目标就要寻求在一定的条件和准则下，从系统的活动效益考虑，达到这些相互制约、对立而又统一的因素的最优平衡；4）对于很多活动，未来的状态取决于许多复杂的因素，这些因素本身的出现及其对系统的未来状态的影响往往不是完全确定的，这时运筹学就要对这些情况给以预先估计，并以此作为采取决策的根据之一。

运筹学是从量的方面去研究一个"工作系统"的合乎一定目标的"活动"，从量的关系去研究"活动"之间，"工作系统"和管理决策之间的各种关系。

运筹学的方法是多种多样的，依所研究的运筹活动的类型不同，其主要分支有：规划论（或称数学规划）、排队论、对策论、信息论、更新论、存储论、质量控制论、统筹方法和国民经济计划中的数学方法等等。但是，在运筹学研究的领域中，所运用的数学方法大体可分为下面两个类型：一类是求各式各样的条件极值问题——数学规划；另一类主要是研究随机现象的过程和状态的数学方法，如排队论和质量控制论等。当然，这两种类型不是完全严格地分开的。相互交错的地方很多，例如动态规划和马氏过程密切联系着，它是带有随机因素的线性规划等等。

数学规划，由于约束条件和对象的不同，可分为静态和动态，决定性和非决定性，连续和离散的等等。它们分别应用了数学中的不同的分支，从而本身也发展和形成了规划问题的不同分支。但从数量关系的角度看来，实际上，主要应区别为线性的和非线性的两类。

静态规划中最简单的一个模型是线性规划。把系统的效益看作各种作用的函数，这个函数在规划问题中一般称为目标函数。如果目标函数是线性的，换句话说，如果系统所得的效益与对系统各组成部分所加作用的关系是正比例的（即线性的）关系，此外，对系统所加的要求和限制也可用作用的线性不等式表示，问题就可以归结成线性规划的模型。从数学方面看，这个问题是在线性不等式的约束下求线性函数的条件极值问题。对于这样的问题，在各种不同的特殊情况下，已经得到许多有效的计算方法。

线性规划方法在一定的条件下是可以用来解决一系列实际问题的数学方法。确定函数极大或极小的问题通常用数学分析方法是可以很容易的解决，但是在寻求对于所研究的变量取决于许多因素的许多组织计划问题，即所谓条件极值问题则不能用数学分析方法来解决，因此，为了解决这些问题需要特殊的方法——线性规划方法。

如果在所要考虑的数学规划问题中，约束条件或目标函数不全是线性的，就叫做非线性规划问题。非线性规划就是求解这类问题的数学理论和方法。

非线性规划的计算方法，早期有人利用函数梯度的特性构造了综合梯度法，分别对目标函数及约束条件进行处理。这时难免考虑到目标函数下降就照顾不到约束条件是否破坏，着眼于约束条件的不被破坏就又忽视了目标函数的是否下降；又有人把非线性规划问题转化成鞍点问题，对鞍点问题给出了算法。虽然这个算法不很被人注意，但那个基本定理确实对于方法的研究，乃至理论研究都有很大意义。其后又有人建立了容许方向法，投影梯度法等。近些年来一个很引人注目的工作是把非线性规划转化成无约束极值问题求解。这样一来，就是这个古典分析也处理过的无约束极值问题竟然被人们重新重视起来，而且所给出的算法也是名目繁多的。

从1956年到现在，规划论的发展，可用深、大、广三字来概括。所谓深，就是在理论上进行了一些本质性的深入研究；所谓大，就是能实际求解的线性规划的规模愈来愈大；所谓广，就是说规划论和其他数学分支的联系，愈来愈多，应用面愈来愈广。

§1·2 数学模型概论

运筹学的内容一般被分成两个方面，第一个方面是由实际的生产或科技问题形成为运筹学的数学模型，第二个方面是对形成的数学模型作数学加工及求解。关于计算方法目前还有一些参考书可以参考，但是怎样由实际问题形成数学问题较为系统的材料就很少见了。但是，怎样从实际问题形成出数学模型来，这确实是一件十分重要的工作。没有这部分工作，运筹学将成为无源之水，无本之木，很难健康发展。

模型化，它是对真实系统加以抽象化和形象化。模型之代表实际有点像绘画之代表照片，所以，模型可以理解为：现实的一个代表。它是以足够的精确性预言来说明真实系统。所以，建立模型有两个含义，一个含义就是抽象化，“物质的抽象、自然规律的抽象、价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然”。抽象化有助于抓住问题的本质。第二个含义是形象化，形象化有助于掌握全貌，有助于看清彼此之间的有机联系。从系统观点出发，使用建立模型的方法，就是运筹学和系统工程在处理问题时的特征之一。

一般对模型的要求是：（1）有足够的精确度，（2）简单，（3）有标准的形式。

构成模型是一种创造性劳动。企图用一些条条和框框规定死，就限制了创造的可能性。

利用“人工的现实”的思路，建立模型的步骤见图1.2—1。

借用人工的现实，把现实情况适当的简化，然后将人工的现实适当分解成一些较为初等的情况，它们的过去已经有过研究，或者比较容易形成模型，以后再返回到人工现实，以形成人工现实的一个较满意的模型称之为M_1，然后人工的现实再根据现实的情况适当修改，使得更精确一些，这样又得到广一些的模型M_2，它比M_1要更细一些，这样反复迭代形成模型 M_1，

M_2, ……M_n，每一个比前一个复杂，更具一般性，也更接近现实的情况。

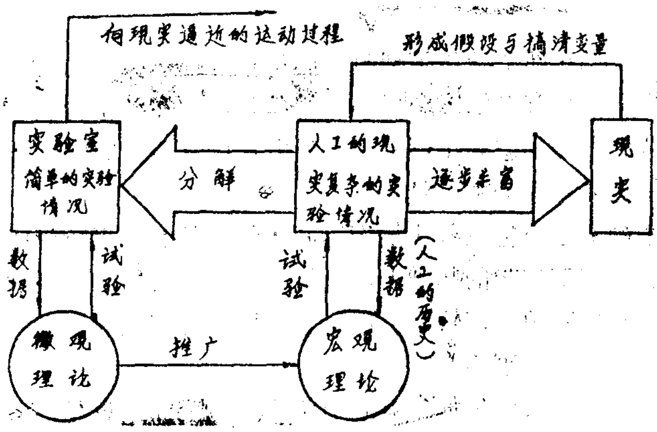

图1.2—1 按人工的现实构造模型

为了建立一个良好的数学模型，必须具备对被研究系统的全部知识，而这些知识的获得是基于实践，基于对事物的详细观察和具备一定数量的统计资料。

建立数学模型，可以有，而且应当有以下几个步骤：

1.**搜集资料，分析因素。**科学的抽象，是对于客观事物的科学反映。对于马克思主义说来，它既承认科学抽象在认识中的重大意义，又反对那种唯心主义和形而上学的抽象。马克思主义的科学抽象，是建立在辩证唯物主义的反映论的基础上的，这种方法，就是毛泽东同志所说的"将丰富的感觉材料加以去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里的改造制作功夫"*①因此，对于这种科学的概括法来说，首先就在于必须详细地，十分丰富地占有关于对象的合乎实际的材料，根据这样的材料，才能概括出科学的观点。马克思说："研究必须搜集丰富的材料，分析它的不同的发展形态，并探寻出各种形态的内部联系"。*②所以在马克思主义的辩证逻辑中，概念的形成过程，判断的形成过程，以及推理的过程，同时就是一个调查研究的过程。

任何一个具体事物，都可以有许多属性、特征或方面等等，因此，科学抽象的任务，不是随便去列举现象中的一般东西，而是要概括出本质的一般。这种一般，必须是关于事物的质的规定性的东西。为了要揭示事物中的本质的一般就要依据考察的对象、范围和目的，把那些与分析对象无关的关系抽出去，从而把本质的一般暴露出来，这也就是说，必须对所研究的问题作系统地具体分析，分析时，要抓住问题的主要矛盾及对其影响的主要因素，去掉偶然的次要的因素。主要因素可以分为两类：一类称为不可控制的因素，所谓不可控制是不能由运筹工作者所控制；另外一类称为可控制的因素，所谓可控制是意味着能由运筹工作者调节控制。

应该分析所研究系统的目标、边界条件和可能选择的行动方案，同时，与这个系统的目标、边界条件和可能选择的行动方案有关的一些因素也应进行了解和分析，

运筹学研究问题的基本观点之一就是总体最优化，也就是说要有全局观点。但是，对于具体问题来说，要找出一个总体最优方案往往甚为复杂，有时变得无从下手。因此，在深入

*①毛泽东：《毛泽东选集》第一卷，人民出版社第一版，第290页。

*②马克思：《资本论》第一卷，人民出版社第一版，第17页。

进行调查研究时，与问题有关的领导、各种专业人员和群众共同努力，才能把问题分析得正确而切合实际。

根据量纲理论，我们在建立数学模型时，必须正确地选择量度单位，同时，避免以下这些情况发生：1、可能错误地没有选择表示现象特性的量；2、在关系方程中，时常遇到有量纲的常数，但对这些常数的物理量忽略了；3、在关系方程中有着不同物理意义的量，但未能区别量纲的不同；4、未能控制量纲为零的量。

在因素分析的基础上，应把一些主要因素间"量"的关系用数学语言表达出来。

2.**构造数学模型**。在第一步的基础上，构造一个能代表所研究系统的数量变换的数学模型。利用模型来研究具体问题或事物是各门科学常用的方法之一，尤其对于一些不能直接触及的事物，或不宜随意变动的事物。

在构造数学模型时，不仅要依据马克思列宁主义和毛泽东思想，而且要依据与所研究问题有关的自然、技术科学的原理。其次，数理逻辑应成为将企业现象和企业经济过程的量的规定性和量的联系概括成为数学语言（即数学模型）的有力工具。

3.**对模型试求解**。将所研究的问题概括成经济数学模型后，求问题的最优解这一任务就变成了可能的事。对经济数学模型求解纯粹是一个数学和计算问题。求解之法，目前主要有二种：解析方法和数值方法，而以数值方法最常用。

数值方法是给可以控制的变数以各种组的数值，然后比较其结果，从而在其中选择一个最好的解；或者逐步逼近，经过有限步骤而最终求得其最优解，数学中常用的迭代法是一种典形的数值解法。

有时，数学模型特别比较复杂，求解和计算也都比较复杂；有些特殊问题，只能证明最优解或极值存在，但如何求解尚须研究。虽然如此，利用现代数学的最新成就，给出这些特殊而复杂的数学模型的近似解，一般的说，是肯定的可以办得到的。

4.**检验数学模型及其解的正确性**。正如任何理论和假设进行检验时一样，检验数学模型及其解的标准是社会实践和客观实际。

检验数学模型的目的在于肯定模型是否足够正确地反映了所研究的问题。检验主要着重在以下三个方面：1）看看所有的因素（包括可控制的和不可控制的因素在内）是否全部包括无遗；2）检查各个因素的定义、含义是否明确；3）检查模型是否正确地反映了因素互相间的质和量的关系。这三方面的任何一个方面不合要求，都会使模型产生"失真"或"歪曲"的现象，利用这种失真的模型当然得不出正确的结论。对于通过数学模型所求得的解，必须利用实践检验它的合理性。有时从模型可以推算得出的解，在数学上是存在的，但在实际中却是不合理的。检验的目的，正在于防止我们把这类解误认为是实际可行的。因此检验时要注意把不实际的解摒弃掉，或对模型加以修正。检验的方法可以比较利用和不利用模型求解的两种结果；此时，也可以利用过去的资料进行鉴定，但同时必须注意这些资料的有效性和可靠程度。

5.**建立对解的控制**。我们知道：世界上的事物总是不断发展变化的，在发展变化的过程中，主要的因素和次要的因素，必然的因素和偶然的因素往往会互相转化。作为运筹学研究对象的系统也不是始终就一定不变的，系统中参数值或参数间的关系有时都会发生变动，因此模型所概括了的问题的最优解决方案的有效程度就要受到这种变动的影响。所以参数值与参数间的关系，需要随时重新决定，并且在求解时，所依据的模型假设也要随时重新考虑。

这样，对解就产生了控制的必要，以免因为上述因素变动而不会陈旧失效。

为了建立对解的控制，就必须采用一些工具，这些工具能帮助我们鉴定客观条件的变化程度是否对模型和解需要进行修正。抽样理论、统计检定法和质量控制的理论方法常常是解决这类问题的有效工具。

6.付之使用。为了保证运算过程迅速简便，在将数学模型交给实际工作者使用之前，对其求解过程必须进行一番加工：把运算方法加以简化。如创造近似值的计算方法；创造一套图表和一些数表；附注必要的说明等等。

数学方法虽然在社会主义企业经济问题的研究中，起着重要的作用，但它毕竟是研究社会主义企业经济问题的一种辅助工具。它的利用必须建立在马克思主义政治经济学基本原理和毛泽东思想的基础上，必须以对所研究问题的质的分析为前提。只要所依据的根本前提和质的分析正确无误，在研究方法上，利用数学工具作为辅助手段，就能够收到清晰、准确的良好效果。

§1·3 学习运筹学　应用运筹学

1956年，我国科学院力学研究所成立时，建立了运筹学运用组，不久以后就正式成立了运筹学研究室，当时，该室主要做了些推广工作，而内容都是欧美的：象线性规划只有单纯形法和表上作业法。以后，翻译了康托洛维奇的“生产组织与计划中的数学方法”，也就是把线性规划四大方法之一——解乘数法介绍到我国来。在提出向群众学习，理论联系实际的过程中，该研究室首先发现了另一方法——图上作业法，并且在理论上作了证明。由于这门科学数学性比较强，在1957年——1958年，数学研究所也成立了运筹研究室，对于图上作业法从另一角度作了证明和整理，也就是在“线性规划的理论及应用”（高等教育出版社，1959年）一书中所介绍的。在1959年底，为了更充分地使用力量，力学研究所运筹学研究室合并到数学研究所运筹学研究室，研究工作扩大到排队论、动态规划、非线性规划、对策论和国民经济计划中的数学方法等方面。1958年——1959年，在实际应用方面，获得了巨大的成就，收效更为卓著。1961年——1963年，工学院和财经学院各经济专业相继开设了“运筹学”一课，运筹学的研究和应用才得到迅速的发展。

运筹学的发展将和电子计算机及其应用结合起来，同时，目前许多国家已把一些数学工具，象组合分析、图论、射影几何和拓扑学用到运筹学解题方法中去，另一方面又用机械、电或图形模拟来解决运筹学问题。

几年来，我国开展运筹学的情况证明：运筹学能够为社会主义建设服务，能为社会主义建设节省大量财富，减少必要的耗费，发挥物资资源的最大效用，因而，我们必须学习运筹学。但是，也应该看到，英美运筹学中，采用的某些工具及其基本观点是为资产阶级政治经济学辩护的，是为垄断资本家榨取高额利润服务的，因而，在学习英美运筹学资料时，必须要有正确的立场、观点和方法，也就是说，要以无产阶级的立场，马克思列宁主义和毛泽东思想的观点和方法，一方面要彻底的批判英美运筹学中反动的一面，另一方面又应该吸取其中经过改造，可以为社会主义企业经济服务的有用东西。“学习有两种态度。一种是教条主义的态度，不管我国情况，适用的和不适用的，一起搬来。这种态度不对。另一种态度，学习的时候用脑筋想一下，学那些和我国情况相适合的东西，即吸取对我们有益的经验，我们需要的是这样一种态度”。·①

·①毛泽东：《毛泽东著作选读（甲种本）》下册，人民出版社第一版，第493页。

运筹学是一门与生产实践有着密切联系的学科，所以在学习运筹学的同时，必须与生产实践取得密切的结合。

目前，尽管运筹学是未曾完全确定边界和方法的新的科学领域，还缺乏充分发展的特有的科学理论，但是它的迅速发展和应用经验，证明了运筹学思想的丰富内容。毫无疑问，在一定条件下对于解决在企业中各种组织和计划问题，运筹学应该有其一定的作用和地位。我们相信：在党的领导和毛泽东思想指导下，随着社会主义建设的不断深入和发展，经过运筹学工作者、数学工作者和企业经济工作者的共同努力，将使这门新的科学逐步完善和早日成熟。

第二章　图上作业法

§2.1　线性规划的任务

线性规划所考虑的问题是如何按最优的方式来计划一个各种互相关联的运筹活动的集合体，也就是说，为了达到希望的目标如何最有效的使用和分配有限的资源，有着满足其基本条件的多个解乃是这类问题的基本特征。选择个别的最优解与提出的任务的希望目标有关。满足问题的约束条件和相应的希望目标的解叫最优解。

线性规划所研究的问题主要有两类，一类是已给定了一定数量的人力和物力资源，问题是如何运用这些资源才能完成最大量的任务；另一类是已给定一项任务，问题是如何统筹安排，才能以最小量的资源去完成这项任务。事实上这两方面的问题不过是一个问题的两种提法而已，因此，在这两方面问题的解答间必然会存在着定一的关系。这种关系就象数学中的对偶性关系一样，只要其中一方面的问题有了解答，其另一方面的问题也就不难同时解出。

现在来具体谈谈，究竟需要有什么条件才能应用线性规划的方法，一般地说，必须有：1)一定要能够将目标表为最大化和最小化的要求，例如：求最小成本或人力，材料储备的最大利用；2)一定要有达到目标的不同方法，即必须要有选择的可能；3)要求的目标是有限制条件的；4)必须将约束条件用数学表示成为线性等式或线性不等式，并将目标函数表示成为线性函数(一次齐项式)。

线性规划问题可归结为如下一般形式：

求x_1，x_2，……，x_n，满足方程

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (2 \cdot 1—1)$$

$$\begin{aligned} &x_1 \geqslant 0 \\ &x_2 \geqslant 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &x_n \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (2.1—2)$$

且使

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (2 \cdot 1—3)$$

的值为最小或最大。从而可以说，问题是：在条件(2・1—1)，(2・1—2)下使(2・1—3)最大或最小。

为了方便，上述一般线性规划问题，可以写成以下形式：

求满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , \ b_i \geqslant 0 \ , \ i = 1, 2, \cdots, m; \tag{2.1—4}$$

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ 2, \ \cdots, \ n, \tag{2.1—5}$$

的解，使目标函数

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{2.1—6}$$

取极值(最大值或最小值)。

还可能有这样的情形，用方程式代替了线性不等式，而得到上述方程式的全部或一部。这时，不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \ , \ i = 1, 2, \cdots, m;$$

或者

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ , \ i = 1, 2, \cdots, m,$$

当条件

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ 2, \ \cdots, \ n + m$$

时，可以换为相等价的方程式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \ , \ i = 1, \cdots, \ m,$$

$$x_{n+i} \geqslant 0, \ i = 1, \ \cdots, \ m;$$

或者

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \ , \ i = 1, \ \cdots, \ m,$$

$$x_{n+i} \geqslant 0, \ i = 1, \ \cdots, \ m$$

在这个情况下，新的x_{n+i}称为附加变数。此时，上述规划问题：

求满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \ , \ b_i \geqslant 0 \ , i = 1, \cdots, \ m,$$

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ \cdots, \ n + m,$$

的解，使目标函数

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$$

取极值。

或者

求满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \ , \ b_i \geqslant 0 \ , \ i = 1, \ \cdots, \ m,$$

$x_j \geqslant 0$, $j = 1$, …, $n + m$,

的一个解，使目标函数

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$$

取极值。

在以后的章节中，研究线性规划问题时，我们将会遇到以下三种情况：

1.约束条件组(2·1—4)和(2·1—5)是不相容的，即方程组(2·1—4)和(2·1—5)没有一个彼此不相矛盾的解；

2.约束条件组(2·1—4)和(2·1—5)是相容的，即方程组(2·1—4)和(2·1—5)存有彼此不相矛盾的解，但此时目标函数(2·1—6)的极值等于$+\infty$或$-\infty$；

3.目标函数(2·1—6)的极值(极大或极小)位于约束条件组(2·1—4)和(2·1—5)的解的集合中。

§2.2 图上作业法

无论地区范围内的运输或者工地范围内的运输，在进行组织时，必须选择合理的物资调运方案，选择合理的物资调运方案是运输工作组织中十分重要的问题，特别是当物资的需要地点(收点)及供应地点(发点)较多，而需要的供应数量又各不相同时，如何根据具体条件、各个收点及发点的分布、交通运输线路的位置及其他条件等，科学地确定最为合理、经济的调运方案，对于充分发挥运输工具的潜力，降低运输成本，保证建设任务的完成有着极为重要的作用。图上作业法是线性规划中解决交通运输和物资调拨等问题的一个简单而有效的方法。

所谓图上作业法，就是在一张交通图上通过一定步骤的规划和计算来完成物资调运计划的编制工作，以便使物资运行的总吨—公里数为最小。由于总吨—公里数最小可使物资运费降低，并缩短了运输时间，所以，在一定条件下称这样的方案为最优方案。

表2.2-1　　调运砂的物资平衡表

收点 发点	一工地	二工地	三工地	四工地	发量(吨)
采砂场甲					50
采砂场乙					20
采砂场丙					30
采砂场丁					70
收量(吨)	80	10	30	50	170

制定一个物资调运方案时，首先要编制物资平衡表(如表2·2—1)。在物资平衡表中列出需要调出物资的地点(即发点)和调进物资的地点(收点)，以及调出调进物资的数量，各发点调出物资数量的总和应等于各收点调进物资数量的总和。

第二步，便是根据物资平衡表和各收点、发点间的相互位置绘制交通图。所谓交通图就是表明收点和发点间的相互位置以及联结这些点之间的交通线路的简要地图(如图2·2—1)。在图上要注明各收点和发点之间的距离。

交通图绘好后，即可在其上进行物资调运规划，以求得最优方案。

我们用箭头(起点是发点，终点是收点)表示流向，沿着前进方向划在线的右侧。在流向旁的数字表示流量的吨数，若在图中每个发点吨数全部运完，每个收点所需吨数均已满足，则称此图为流向图。

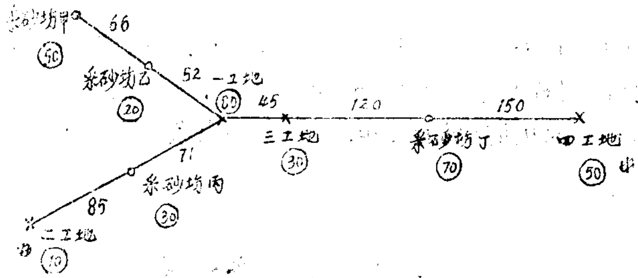

图2·2—1　调运砂的交通图

○—发点；×—收点；

收发点旁带圈的数字表示调进或调出的物资数量(吨)。

规划时对于形状不同的交通线路，应符合不同的法则。这些法则是：

当交通线路不呈环状时应无对流现象。所谓对流，就是在同一段线路上，同时有同种物资互相朝相反方向的调运。

当交通线路呈环状时，应满足以下二个条件：

1.各段路程上无对流现象；

2.在环状闭合线路中，对每圈而言，内圈流向长和外圈流向长都小于或等于该全圈长的一半。

为了贯彻以上法则，则应采用逐步逼近法，即我们可以先设法作一个流向图，然后来检查它是不是最优的，如果是的话，问题就解决了；如果不是，就把这个流向图稍微变化一下，这样的变化称为调整。调整后的新流向图所花费的吨公里数比原来流向图的要少一些。然后再检查新流向图是不是最优的，如果仍旧不是，就再进行调整，一直到找到最优流向图为止。

因此，要用图上作业法来找最优流向图，就应解决下面三个问题：

(1)怎样做第一个流向图；

(2)怎样检查一个流向图是不是最优的，这要根据前述法则进行。这个法则也可以简述如下：在一个没有对流的流向图上，如果每一个圈上的内圈流向和外圈流向的总长度都不超过圈长的一半，这个流向图就是最优的。如果图上没有圈，这个流向图只要没有对流，就一定是最优的。反过来，在一个没有对流的流向图上只要有一个圈上的内圈流向或者外圈流向的总长度超过了圈长的一半，这个流向图就一定不是最优的；

(3)如果一个流向图不是最优的，怎样把它调整成一个较好的新流向图。

以下分别举例谈谈解决这三个问题的方法。

〔例一〕求表2·2—1中，砂的最优调运方案，其交通图如图2·2—1。

此例道路不成圈，只要按口诀“抓各端、各端供需归邻站”办事，就能找到最优方案。为此，可先在图2·2—1各个支线上进行平衡，然后再在各支线间进行平衡。

首先看采砂场甲→采砂场乙→一工地支线。采砂场甲及采砂场乙共70吨砂需要调出。显然在调出时必然先经过一工地，而一工地又需要调入80吨，所以最好将此70吨砂全部给一工点。根据前述，在图上可在沿着线路前进的方向的右侧用箭头来表示流向，并将按此流向调运的数量写在箭头的旁边(图2·2—2a)，为了简便起见，对于同方向的两个流向可合并成一条(图2·2—2b)。

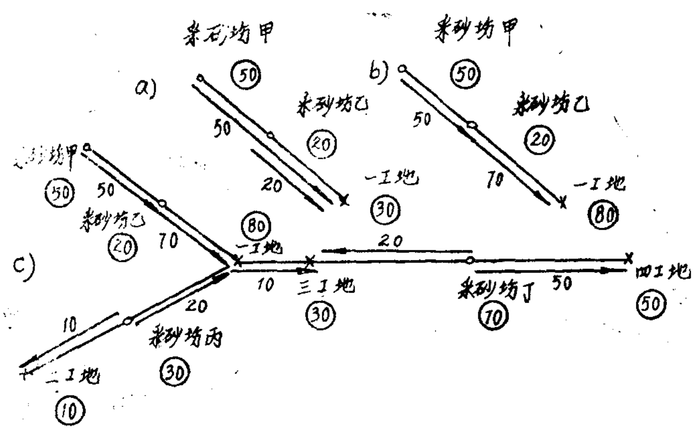

图2·2—2　调运砂的流向图

a）采砂场甲→采砂场乙→一工地支线平衡后的流向；

b）同上，两个流向合并成一条；

c）最后的流向图。

再看二工地→采砂场丙→一工地支线。采砂场丙需调出30吨，二工地需调入10吨，本着先平衡支线的原则从采砂场丙调给二工地10吨，余下20吨须调给其他工地。由于自采砂场丙调出时必经过一工地，而一工地还少10吨，因此从采砂场丙调给一工地10吨，余下10吨调给另外工地。

最后看四工地→采砂场丁→三工地→一工地支线。为了避免对流，采砂场丙调出的10吨只能给三工地，而三工地还需要20吨，则由采砂场丁供应，采砂场丁余下的50吨全部给四工地。这样便最后得到流向图(如图2·2—2c)。

图2·2—2c所示的流向图没有对流现象，所以对应的调运方案显然是最好的。相应于这个流向图的调运方案显然不是唯一的，可以给出二个调运方案(表2·2—2)。

总吨—公里数就是每一段线路的公里数与该段线路上运输吨数乘积的总和。

根据表2·2—2和图2·2—1，对于第一个方案运行的总吨—公里数是

$$f(x) = 50(66+52) + 20\times 52 + 10\times 71 + 10\times 85 + 10(71+45) + 20\times 120 + 50\times 150$$
$$= 19560\text{吨—公里；}$$

表2.2-2　　　　　　　　　　砂的调运方案

收点 发点	一工地		二工地		三工地		四工地		发量(吨)
	方案1	方案2	方案1	方案2	方案1	方案2	方案1	方案2	
采砂场甲	50	45				5			50
采砂场乙	20	15				5			20
采砂场丙	10	20	10	10	10				30
采砂场丁					20	20	50	50	70
收量(吨)	80		10		30		50		170

对于第二个方案运行的总吨一公里数是

$$f(x) = 45(66+52) + 15\times52 + 20\times71 + 10\times85 + 5(66+52+45) + 5(52+45) + 20\times120 + 50\times150$$

$$= 19560 \text{吨一公里。}$$

〔**例二**〕求物资平衡表(表2·2—3)中水泥的最优调运方案。对应于该表的交通图如图2·2—3所示。

表2.2-3　　　　　　　　　　调运水泥的物资平衡表

收点 发点	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	发量(吨)
A_1									6.0
A_2									6.5
A_3									4.5
A_4									3.5
收量(吨)	3.5	2.5	2.0	1.5	5.0	1.0	1.5	3.5	20.5

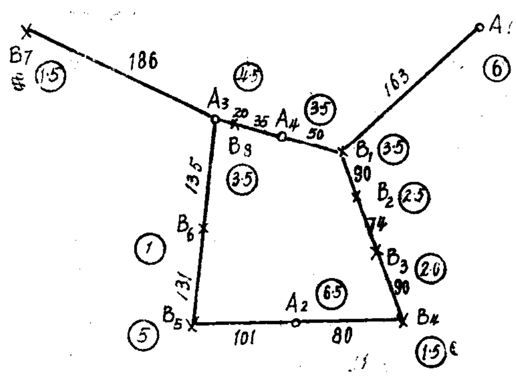

图2·2—3　调运水泥的交通图

○—发点　×—收点