

经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-4

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

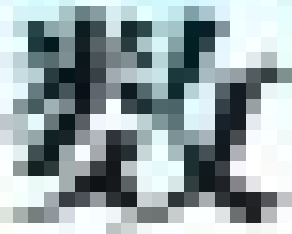


人民教育出版社

A 版

2014年12月

第 10 卷 第 12 期



现代设计

现代设计中的绿色设计

作者姓名 单位



普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社
A版

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-4

A 版

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张: 3.25 字数: 64 000

2005 年 6 月第 1 版 2006 年 7 月第 6 次印刷

ISBN 7-107-18674-4 定价: 3.16 元
G·11764 (课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究
如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

本册主编：吕伟泉

主要编者：郭慧清 张文韬 黄智军 李 鸿

责任编辑：王 嵘

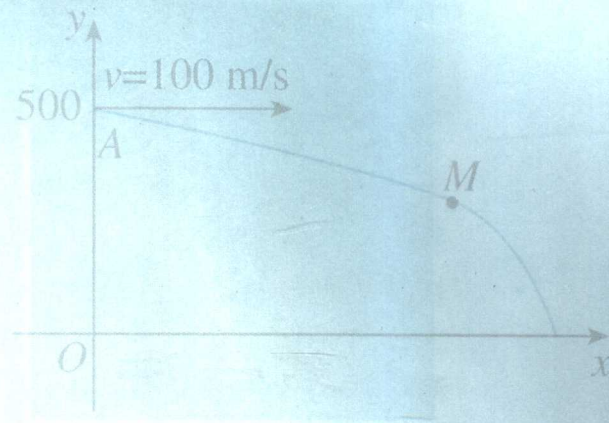
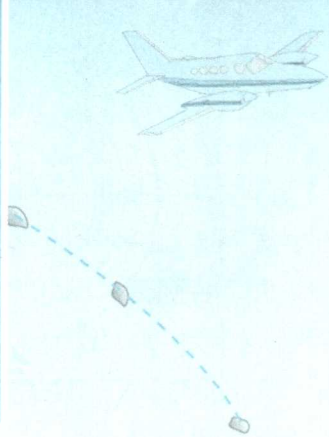
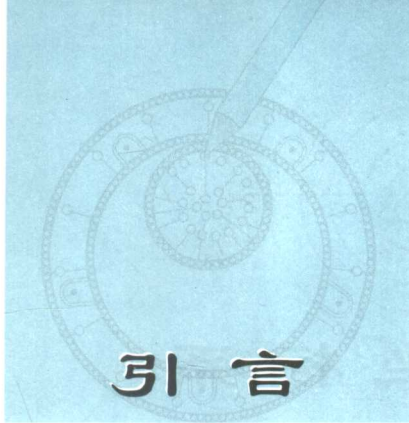
美术编辑：王俊宏 王 艾

封面设计：吴 敬

目 录

引言	1
第一讲 坐标系	2
一 平面直角坐标系	2
二 极坐标系	9
三 简单曲线的极坐标方程	12
四 柱坐标系与球坐标系简介	16
第二讲 参数方程	21
一 曲线的参数方程	21
二 圆锥曲线的参数方程	27
三 直线的参数方程	36
四 渐开线与摆线	41
学习总结报告	47





本专题是高中数学课程选修系列4中的第4个专题，包括“坐标系”“参数方程”两个部分的内容。

坐标法思想是17世纪的数学家笛卡儿、费马提出的。坐标法思想为牛顿、莱布尼茨创立微积分奠定了基础，它是近代数学发展的开端，已成为现代数学最重要的基本思想之一。坐标系是联系几何与代数的桥梁，是数形结合的有力工具，利用它可以使数与形相互转化。

同学们已学过数轴、平面直角坐标系、空间直角坐标系的初步知识。在此基础上，本专题将进一步介绍极坐标系、空间柱坐标系、球坐标系等，展示不同坐标系在刻画几何图形或描述自然现象中的作用，拓广坐标系的知识；通过介绍简单曲线的极坐标方程等知识，使同学们更全面地理解坐标法思想。

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的另一种表示形式。本专题通过实例展示了在建立曲线方程过程中，引进参数的意义和作用。某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便。根据曲线的特点，选取适当曲线方程的表示形式，体现了解决问题中数学方法的灵活性。

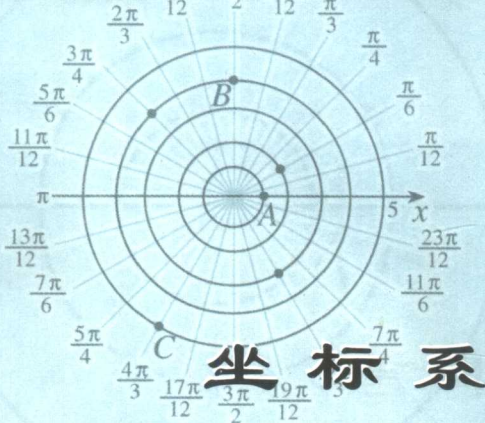
作为参数方程的应用实例，本专题介绍了渐开线与摆线，为同学们提供欣赏各种曲线（如心脏线、螺线、玫瑰线、叶形线、平摆线、渐开线等）的机会，从中体会参数对研究这些曲线的作用。

使用信息技术研究本专题的内容，例如用计算机软件认识参数意义，观察渐开线与平摆线的生成过程等，可以使同学们更直观、有效地认识各种曲线的生成过程、性质和实际应用。

本专题力求通过实际问题，深入浅出地帮助同学们理解数学概念；通过“思考”“探究”“信息技术应用”等，启发和引导同学们的数学思维，养成主动探索，积极思考的好习惯。

祝愿同学们通过本专题的学习，不仅对数学产生更大的兴趣，学到更多的数学知识，提高自己利用数学知识解决实际问题的能力，形成对数学更加全面的了解，而且逐步认识到科学的科学价值、应用价值和文化价值。

第一讲



我们知道，通过直角坐标系，平面上的点与坐标（有序实数对）、曲线与方程建立了联系，从而实现了数与形的结合。根据几何对象的特征，选择适当的坐标系，建立它的方程，通过方程研究它的性质及与其他几何图形的关系，这就是研究几何问题的坐标法。

由于现实问题的复杂性，有时在直角坐标系下建立几何图形的方程并不方便。为便于用代数方法研究几何图形，需要建立不同的坐标系。在建立某些几何图形的方程时，用极坐标系、柱坐标系和球坐标系会更加方便。

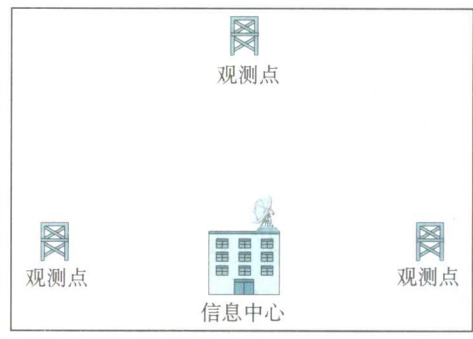
下面我们先回顾直角坐标系中解决实际问题的过程。

一 平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

思考

某信息中心接到位于正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到一声巨响，正东观测点听到巨响的时间比它们晚4 s。已知各观测点到中心的距离都是1 020 m。试确定巨响发生的位置。（假定声音传播的速度为340 m/s，各观测点均在同一平面上。）



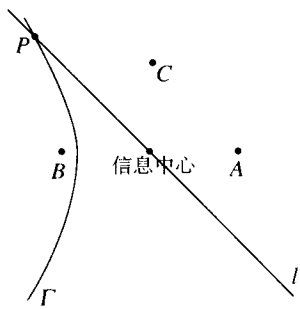


图 1-1

如图 1-1, 将三个观测点记为 A, B, C . 由于 B, C 同时听到由点 P 发出的响声, 因此 $|PB| = |PC|$, 说明点 P 在线段 BC 的垂直平分线 l 上; 由于 A 听到响声的时间比 B, C 晚 4 s, 因此 $|PA| - |PB| = 4 \times 340 = 1\,360 < |AB|$, 说明点 P 在以点 A, B 为焦点的双曲线 Γ 上. 所以, 点 P 就是直线 l 与双曲线 Γ 的交点.

下面利用问题的几何特征, 通过建立适当的直角坐标系, 具体确定点 P 的位置.



怎样建立直角坐标系才有利于我们解决这个问题?

由于点 P 是直线 l 与双曲线 Γ 的交点, 因此, 直角坐标系的选取应尽量使直线 l 和双曲线 Γ 的方程简单, 以便于解方程组求点 P 的坐标.

如图 1-2, 以信息中心为原点 O , 直线 BA 为 x 轴, 建立直角坐标系. 由已知, 点 A, B, C 的坐标分别为

$$A(1\,020, 0), B(-1\,020, 0), C(0, 1\,020),$$

于是, 直线 l 的方程为

$$y = -x.$$

设双曲线 Γ 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0),$$

由已知得 $a = 680, c = 1\,020$, 于是

$$b^2 = c^2 - a^2 = 1\,020^2 - 680^2 = 5 \times 340^2,$$

所以, 双曲线 Γ 的方程为

$$\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{5 \times 340^2} = 1.$$

将 $y = -x$ 代入上述方程, 解得 $x = \pm 680\sqrt{5}, y = \mp 680\sqrt{5}$.

由已知, 响声应在双曲线 Γ 的左半支, 所以点 P 的坐标为 $(-680\sqrt{5}, 680\sqrt{5})$. 从而

$$|PO| = 680\sqrt{10}(\text{m}).$$

所以, 巨响在信息中心的西偏北 45° 方向, 距离 $680\sqrt{10}$ m 处.

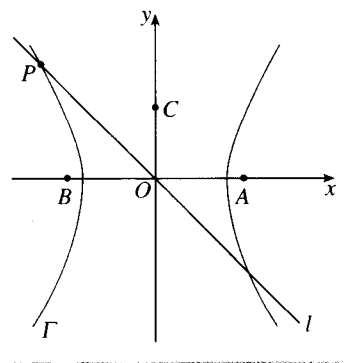


图 1-2



我们以信息中心为基点,用角和距离刻画了点 P 的位置.这种方法与用直角坐标刻画点 P 的位置有什么区别和联系?你认为哪种方法更方便?

上述问题的解决充分体现了坐标法思想.

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $b^2 + c^2 = 5a^2$, BE, CF 分别为边 AC, AB 上的中线,建立适当的平面直角坐标系探究 BE 与 CF 的位置关系.

解:如图 1-3,以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点 O ,边 AB 所在的直线为 x 轴,建立直角坐标系.由已知,点 A, B, F 的坐标分别为

$$A(0, 0), B(c, 0), F\left(\frac{c}{2}, 0\right).$$

设点 C 的坐标为 (x, y) ,则点 E 的坐标为 $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

由 $b^2 + c^2 = 5a^2$,可得到 $|AC|^2 + |AB|^2 = 5|BC|^2$,即

$$x^2 + y^2 + c^2 = 5[(x-c)^2 + y^2].$$

整理得

$$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 5cx = 0.$$

因为

$$\overrightarrow{BE} = \left(\frac{x}{2} - c, \frac{y}{2}\right), \overrightarrow{CF} = \left(\frac{c}{2} - x, -y\right),$$

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} &= \left(\frac{x}{2} - c\right)\left(\frac{c}{2} - x\right) - \frac{y^2}{2} \\ &= -\frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 5cx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此, BE 与 CF 互相垂直.

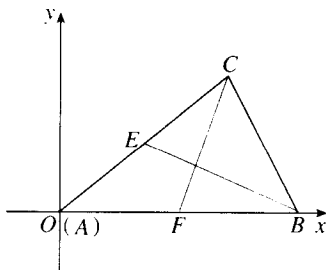


图 1-3

探究

你能建立与上述解答中不同的直角坐标系解决这个问题吗?比较不同的直角坐标系下解决问题的过程,你认为建立直角坐标系时应注意些什么?

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

在三角函数图象的学习中，我们研究过下面一些问题：

(1) 怎样由正弦曲线 $y = \sin x$ 得到曲线 $y = \sin 2x$?

如图 1-4，在正弦曲线 $y = \sin x$ 上任取一点 $P(x, y)$ ，保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$ ，那么正弦曲线 $y = \sin x$ 就变成曲线 $y = \sin 2x$ 。

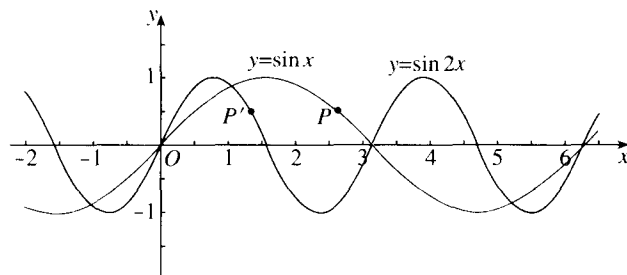


图 1-4

思考

从平面直角坐标系中的点的对应关系出发，你认为“保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$ ”的实质是什么？

实际上，“保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$ ”是一个坐标的压缩变换，即

设 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$ ，得到点 $P'(x', y')$ ，那么

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = y. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

我们把①式叫做平面直角坐标系中的一个坐标压缩变换。

(2) 怎样由正弦曲线 $y = \sin x$ 得到曲线 $y = 3\sin x$?

如图 1-5，在正弦曲线 $y = \sin x$ 上任取一点 $P(x, y)$ ，保持横坐标 x 不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍，那么正弦曲线 $y = \sin x$ 就变成曲线 $y = 3\sin x$ 。

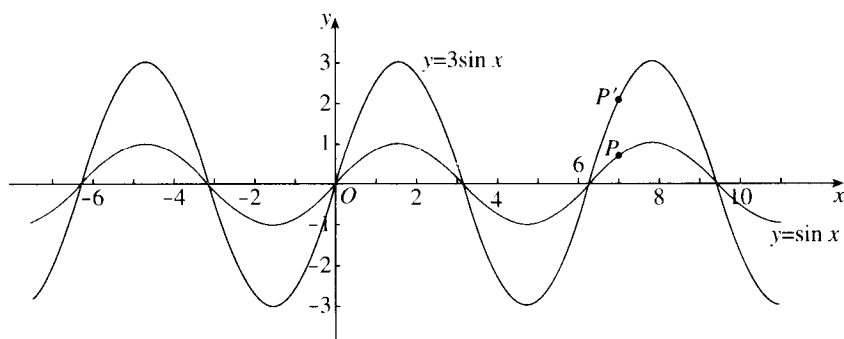


图 1-5



从平面直角坐标系中的点的对应关系出发,你认为“保持横坐标 x 不变,将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍”的实质是什么?

实际上,“保持横坐标 x 不变,将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍”是一个坐标的伸长变换,即

设 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点,保持横坐标 x 不变,将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍,得到点 $P'(x', y')$, 那么

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 3y. \end{cases} \quad (2)$$

我们把②式叫做平面直角坐标系中的一个坐标伸长变换.

(3) 怎样由正弦曲线 $y = \sin x$ 得到曲线 $y = 3\sin 2x$?

实际上,这是上述(1)(2)的“合成”:如图 1-6,先保持纵坐标 y 不变,将横坐标 x 缩为原来的 $\frac{1}{2}$;在此基础上再将纵坐标 y 变为原来的 3 倍,就可以由正弦曲线 $y = \sin x$ 得到曲线 $y = 3\sin 2x$.

与上述讨论一样,设平面直角坐标系中的任意一点 $P(x, y)$ 经过上述变换后变为点 $P'(x', y')$, 那么

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = 3y. \end{cases} \quad (3)$$

我们把③式叫做平面直角坐标系中的坐标伸缩变换.

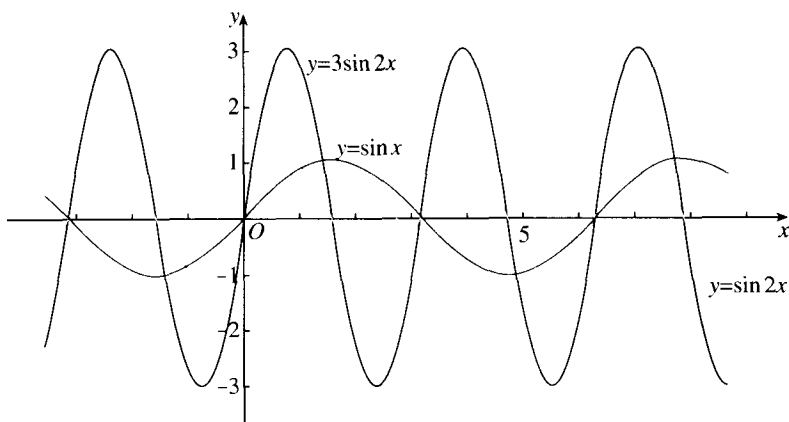


图 1-6

下面给出平面直角坐标系中坐标伸缩变换的定义.

定义 设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点, 在变换

$$\varphi: \begin{cases} x' = \lambda \cdot x, & (\lambda > 0), \\ y' = \mu \cdot y, & (\mu > 0). \end{cases} \quad (4)$$

的作用下, 点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$, 称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换, 简称伸缩变换.

上述①②③都是坐标伸缩变换. 在它们的作用下, 可以实现平面图形的伸缩. 例如, 在伸缩变换③的作用下, 正弦曲线 $y = \sin x$ 变换为曲线 $y = 3\sin 2x$. 因此, 平面图形的伸缩变换可以用坐标伸缩变换来表示.

例 2 在平面直角坐标系中, 求下列方程所对应的图形经过伸缩变换

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y \end{cases}$$

后的图形.

$$(1) 2x + 3y = 0; \quad (2) x^2 + y^2 = 1.$$

解: (1) 由伸缩变换 $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y \end{cases}$ 得到

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x', \\ y = \frac{1}{3}y'. \end{cases} \quad (5)$$

将⑤代入 $2x + 3y = 0$, 得到经过伸缩变换后的图形的方程是

$$x' + y' = 0.$$

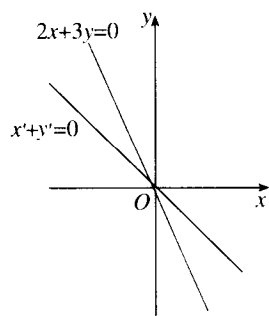


图 1-7

所以, 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=2x, \\ y'=3y \end{cases}$ 后, 直线 $2x+3y=0$ 变成直

线 $x'+y'=0$ (图 1-7).

(2) 将⑤代入 $x^2+y^2=1$, 得到经过伸缩变换后的图形的方程是

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

所以, 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=2x, \\ y'=3y \end{cases}$ 后,

圆 $x^2+y^2=1$ 变成椭圆 $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$ (图 1-8).

由上所述可以发现, 在伸缩变换④下, 直线仍然变成直线, 而圆可以变成椭圆.

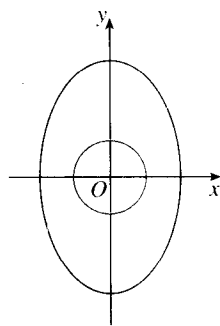


图 1-8



在伸缩变换④下, 椭圆是否可以变成圆? 抛物线、双曲线变成什么曲线?



1. 两个定点的距离为 6, 点 M 到这两个定点的距离的平方和为 26, 求点 M 的轨迹.
2. 已知点 A 为定点, 线段 BC 在定直线 l 上滑动, 已知 $|BC|=4$, 点 A 到直线 l 的距离为 3, 求 $\triangle ABC$ 的外心的轨迹方程.
3. 用两种以上的方法证明: 三角形的三条高线交于一点.
4. 在同一平面直角坐标系中, 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=y \end{cases}$ 后, 曲线 C 变为曲线 $x'^2+9y'^2=9$,

求曲线 C 的方程并画出图象.

5. 在同一平面直角坐标系中, 求满足下列图形变换的伸缩变换:

(1) 直线 $x-2y=2$ 变成直线 $2x'-y'=4$;

(2) 曲线 $x^2-y^2-2x=0$ 变成曲线 $x'^2-16y'^2-4x'=0$.

二 极坐标系

在解决本节开头的问题时，我们用“在信息中心的西偏北 45° 方向，距离 $680\sqrt{10}$ m 处”描述了巨响的位置. 实际上，这是以信息中心为基点，以正西方向为参照，用与信息中心的距离和与正西方向所成的角来刻画巨响的位置. 这是日常生活中常用的刻画位置的方法，体现了极坐标思想.

1. 极坐标系的概念

思考

图 1-9 是某校园的平面示意图. 假设某同学在教学楼处，请回答下列问题：

- (1) 他向东偏北 60° 方向走 120 m 后到达什么位置？该位置惟一确定吗？
- (2) 如果有人打听体育馆和办公楼的位置，他应如何描述？

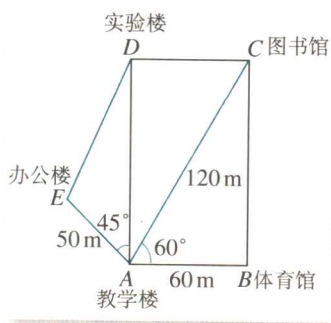


图 1-9

以 A 为基点，射线 AB 为参照方向，利用与 A 的距离、与 AB 所成的角，就可以刻画平面上点的位置. 有时它比直角坐标更方便，如在台风预报、地震预报、测量、航空、航海中就主要采用这种方法.

思考

类比建立平面直角坐标系的过程，怎样建立用距离与角度确定平面上点的位置的坐标系？

如图 1-10，在平面内取一个定点 O，叫做**极点**；自极点 O 引一条射线 Ox，叫做**极轴**；再选定一个长度单位、一个角度单位（通常取弧度）及其正方向（通常取逆时针方向），这样就建立了一个**极坐标系**.

设 M 是平面内一点, 极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径, 记为 ρ ; 以极轴 Ox 为始边, 射线 OM 为终边的角 $\angle xOM$ 叫做点 M 的极角, 记为 θ . 有序数对 (ρ, θ) 叫做点 M 的极坐标, 记作 $M(\rho, \theta)$.

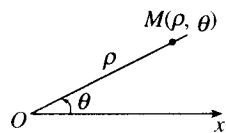


图 1-10

例 1 如图 1-11, 在极坐标系中, 写出点 A, B, C 的极坐标, 并标出点 $D(2, \frac{\pi}{6})$, $E(4, \frac{3\pi}{4})$, $F(3.5, \frac{5\pi}{3})$ 所在的位置.

解: 由图 1-11, 可得点 A, B, C 的极坐标分别为

$$(1, 0), (4, \frac{\pi}{2}), (5, \frac{4\pi}{3}).$$

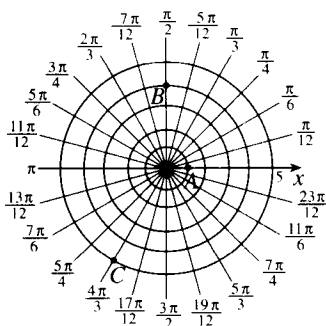


图 1-11

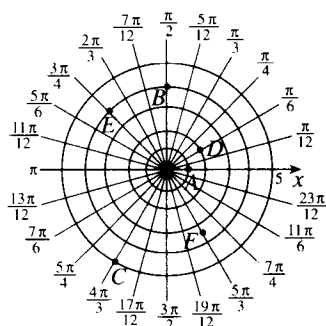


图 1-12

点 D, E, F 的位置如图 1-12 所示.

例 2 在图 1-9 中, 用点 A, B, C, D, E 分别表示教学楼, 体育馆, 图书馆, 实验楼, 办公楼的位置. 建立适当的极坐标系, 写出各点的极坐标.

解: 以点 A 为极点, AB 所在的射线为极轴 (单位长度为 1 m), 建立极坐标系 (图 1-13). 点 A, B, C, D, E 的极坐标分别为 $(0, 0)$, $(60, 0)$, $(120, \frac{\pi}{3})$, $(60\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$, $(50, \frac{3\pi}{4})$.

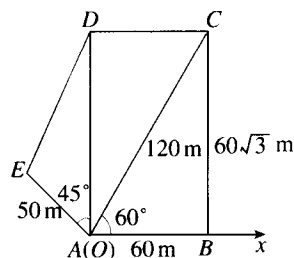


图 1-13

建立极坐标系后, 给定 ρ 和 θ , 就可以在平面内惟一确定点 M ; 反过来, 给定平面内任意一点, 也可以找到它的极坐标 (ρ, θ) .



在极坐标系中, $(4, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{\pi}{6} + 2\pi)$, $(4, \frac{\pi}{6} + 4\pi)$, $(4, \frac{\pi}{6} - 2\pi)$ 表示的点有什么关系? 你能从中体会极坐标与直角坐标在刻画点的位置时的区别吗?

由终边相同的角的定义可知, 上述极坐标表示同一个点. 实际上, $(4, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 都表示这个点.

一般地, 极坐标 (ρ, θ) 与 $(\rho, \theta + 2k\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 表示同一个点. 特别地, 极点 O 的坐标为 $(0, \theta)$ ($\theta \in \mathbf{R}$). 和直角坐标不同, 平面内一个点的极坐标有无数种表示.

如果规定 $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, 那么除极点外, 平面内的点可用惟一的极坐标 (ρ, θ) 表示; 同时, 极坐标 (ρ, θ) 表示的点也是惟一确定的.

2. 极坐标和直角坐标的互化



平面内的一个点既可以用直角坐标表示, 也可以用极坐标表示. 那么, 这两种坐标之间有什么关系呢?

把直角坐标系的原点作为极点, x 轴的正半轴作为极轴, 并在两种坐标系中取相同的长度单位. 设 M 是平面内任意一点, 它的直角坐标是 (x, y) , 极坐标是 (ρ, θ) . 从图 1-14 可以得出它们之间的关系:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad ①$$

由①又可得到下面的关系式:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

这就是极坐标与直角坐标的互化公式.

例 3 将点 M 的极坐标 $(5, \frac{2\pi}{3})$ 化成直角坐标.

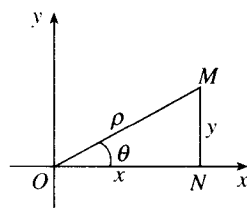


图 1-14