朗曼 1+1

北京朗曼教学与研究中心教研成果

高一数学同步讲解与测试

(代数)

张秀杰 主编

中学数学 1+1

宋伯涛 总主编

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1+1

——高一数学同步讲解与测试

（代　数）

主编　张秀杰

中国青年出版社

责任编辑：李 培 广
封面设计：Paul Song

图书在版编目（CIP）数据

高一数学同步讲解与测试/宋伯涛主编．—北京：中国青年出版社，1999
（中学1+1丛书）
ISBN 7—5006—3450—1

Ⅰ．高…　Ⅱ．宋…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第11178号

中学数学1+1

高一数学同步讲解与测试（代数）

主编　张秀杰

*

中国青年出版社出版 发行
社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
北京市昌平长城印刷厂印刷　新华书店总经销

*

850×1168　1/32　12.5印张　360千字
1999年7月北京第1版　2000年7月北京第2次印刷
定价：14.80元
ISBN 7-5006-3450-1/G·1036

再 版 前 言

本书是由北京朗曼教学与研究中心根据高一数学教材最新出版的《中学1+1》系列丛书之一。其特点在于结合教材对各单元重点、难点、疑点、易混淆点、考点逐条进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，例题丰富。所涉及内容主要是各单元所应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题思想、技巧等。同步测试部分根据各单元特点对基础知识、重点难点、知识应用进行巩固性的训练。其中采用了目前各地较为常用的题型，题目丰富，综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中，应结合教科书，认真学习重点难点部分，努力掌握重点、难点、知识点的各种用法及注意事项，对某些重点难点要进行仔细的研究、分析和理解，结合例题，努力掌握其用法。做同步练习时要独立思考，结合教科书及讲解认真解题，然后对照题解，弄通弄懂为什么用这个答案而不用那个答案，为什么要这样说而不那样说，还可以怎样说，怎样才对，从一个点进行散发性联想思维。课后还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再理解。有问题主动询问，及时解决。本中心答疑信箱就是为这一目的而开设的。

出版前，作者对书中许多地方作了较为合理的修改，但仍难免存有不尽人意之处，谨请广大读者及听众批评指正。凡需要本书以及本系列其它丛书的读者可与本中心联系，联系电话：010－64962054，64985587。

宋伯涛

2000年7月于北师大

目 录

第一章　集合与简易逻辑

【本章教材分析】

一、内容分析

本章主要讲述集合的初步知识与简易逻辑知识两部分内容．集合的初步知识包括集合的有关概念、集合的表示及集合同集合之间的关系．简易逻辑主要介绍命题的基本知识（其中包括逻辑联结词“或”、“且”、“非”）、四种命题及其相互关系和充要条件的有关知识．

本章共分两大节．

第一大节是“集合”．学生在小学和初中数学中，已经接触过集合，对于诸如数集（整数的集合、有理数的集合）、点集（直线、圆）等，都有了一定的感性认识．在此基础上，这一大节首先结合实例引出集合与集合的元素的概念，并介绍了集合的表示方法．然后，从讨论集合与集合之间的包含与相等的关系入手，给出子集的概念，此外，还给出了与子集相联系的全集与补集的概念．接着，又讲述了属于集合运算的交集、并集的初步知识．鉴于不等式的内容目前初中数学只讲述一元一次不等式与一元一次不等式组，考虑到集合知识的运用与巩固，又考虑到下一章讨论函数的定义域与值域的需要，第一大节最后安排的是绝对值不等式与一元二次不等式的解法．

第二大节是“简易逻辑”．学生在初中数学中，学习过简单的命题（包括原命题与逆命题）知识，掌握了简单的推理方法（包括对反证法的了解）．由此，这一大节首先给出命题和含有“或”、“且”、“非”的复合命题的意义，介绍了判断含有“或”、“且”、“非”的复合命题的真假的方法．接下来，讲述四种命题及其相互关系，并且在初中的基础上，结合四种命题的知识，进一步讲解反证法．然后，通过若干实例，讲述了充分条件、必要条件和充要条件的有关知识．

二、教材重点、难点、关键

1. 集合之间的关系及集合运算,四种命题的关系及充要条件

2. 第一个难点是元素与集合,集合与集合之间的关系,第二个难点是充要条件的判断,第三个难点是对“简易逻辑”中“或”字的理解

3. 关键是分清元素与集合,集合与集合之间的关系;分清命题的条件和结论;理解“或”、“且”、“非”的意义.

三、本章的知识结构

- 集合→
  - →集合及其有关概念→子集、全集、补集、交集、并集.
  - →含绝对值的不等式解法
  - →一元二次不等式解法
- 简易逻辑→
  - →命题及其表示形式
  - →四种命题及其之间关系、反证法
  - →充要条件及其判断

一、集　合

1.1　集　合

【学习目标】

1. 理解集合的概念.
2. 掌握集合的两种表示方法
3. 会正确使用符号“$\in$”与“$\notin$”

【高考要求】

高考中这部分内容往往与 1.2 节内容结合起来考查,很少单独出题,这节只是为 1.2 节打基础的预备知识,为此只要完成上述三个目标即可.

【知识点精讲】

1. **集合概念**

集合是一个不加定义的概念. 一般地，符合某种条件（或具有某种性质）的对象的全体就构成了一个集合. 集合的元素具有

（1）确定性　对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，二者必居其一，不会模棱两可

例如，"著名的科学家"，"漂亮的人"这类对象，一般不能构成数学意义上的集合，因为找不到用以判别每一具体对象是否属于集合的明确标准.

（2）互异性　集合中的相同元素只算是一个，如方程 $x^2-2x+1=0$ 的两个等根，$x_1=x_2=1$，用集合记为 $\{1\}$，而不写为 $\{1,1\}$

（3）无序性　集合中的元素是不排序的，如集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一个集合，但实际上在写时还是按一定顺序写，如 $\{-1,0,1,2\}$ 而不写成 $\{0,1,-1,2\}$，这样写不方便，其更深刻的含义是揭示了集合元素的"平等地位".

思考：$\{(1,2)\}$ 与 $\{(2,1)\}$ 表示同一集合吗？

对集合的理解，一是要把集合和它的元素（哪怕是全体元素）严格地区分开来. 当我们把一些对象看成集合时，就把它们看成了"整体". 例如，对"$x>2$"，可以理解为"x 在大于 2 的范围内取值"，也可以理解为 x 是大于 2 的一个值或某些值，还可以理解为"x 可以是大于 2 的任一值"，…等等. 但当我们把它看成集合 $\{x|x>2\}$ 时，就指所有大于 2 的 x 的全体了. 二是集合具有两方面的含义，一方面凡符合条件的对象都是它的元素，另一方面凡是它的元素都符合条件.

（4）任意性　集合中的元素可以是任意的具体确定的事物.

2. **集合表示法**

（1）列举法

（2）描述法　用描述法表示的集合，对其元素的属性要准确理解. 例如，集合 $\{y|y=x^2\}$ 表示函数 y 值的全体，即 $\{y|y\geq 0\}$；集合 $\{x|y=x^2\}$ 表示自变量 x 的值的全体，即 $\{x|x$ 为任一实数$\}$；集合 $\{(x,y)|y=x^2\}$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上的点的全体，是点集（一条抛物线）；而集合 $\{y=x^2\}$ 则是用列举法表示的单元素集，也就是只有

一个元素(方程 $y=x^2$)的有限集.

3. 符号 $\in$、$\notin$ 的用法

符号“$\in$”、“$\notin$”是表示元素与集合之间的关系的,不能用来表示集合之间的关系. 例如,$\{1\}\in\{1,3,5\}$ 的写法就是错误的,但 $\{1\}\in\{\{1\},\{3\},\{5\}\}$ 的表述是正确的.

4. **空集**:不含任何元素的集合. 如 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x+y=2\\2x+2y=1\end{cases}\right\}$ 是空集,它反映该方程无解.

【典例剖析】

1. 概念题

例 1　考察下列每组对象能否构成一个集合?

(1)所有的好人

(2)不超过 20 的非负数

(3)某一班级 16 岁以下的学生

(4)直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点

(5)高个子的人

分析:(1)“所有的好人”无明确的标准,对于某个人是否是“好人”无法客观地判断. 因此(1)不能构成集合;类似的(5)也不能构成集合

(2)任给一个实数 x,可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”,即“$0\leqslant x\leqslant 20$”与“$x>20$ 或 $x<0$”,两者必居其一,且仅居其一,故“不超过 20 的非负数”能构成集合;类似地(3)(4)也能构成集合

2. 元素与集合的关系

例 2　设 $x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}$,$y=3+\sqrt{2}\pi$,集合 $M=\{m\mid m=a+b\sqrt{2},a\in Q,b\in Q\}$,那么 x、y 分别与集合 M 的关系如何?

分析:欲判断 x,y 与集合 M 的关系,M 中的 a、$b\in Q$,只需把 x、y 整理成 $c+d\sqrt{2}$,再验证 c、d 是否是有理数即可

解:$x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{41}-\dfrac{5\sqrt{2}}{41}$　而 $-\dfrac{3}{41}\in Q$　$-\dfrac{5}{41}\in Q$

$\therefore x\in M$.

$\because \pi\notin Q \quad \therefore y\notin M$

注意：此题是判断元素与集合的关系，要明确集合里面元素的特点，注意结果的表示.

例 3　用符号$\in$或$\notin$填空

(1)3.14 ____ Q，0 ____ N，$\sqrt{2}$ ____ Z，$(-1)^0$ ____ N，0 ____ $\varnothing$

(2)$2\sqrt{3}$ ____ $\{x|x<\sqrt{11}\}$，$3\sqrt{2}$ ____ $\{x|x>4\}$

$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ____ $\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3)3 ____ $\{x|x=n^2+1,n\in N_+\}$，5 ____ $\{x|x=n^2+1,n\in N_+\}$；

(4)$(-1,1)$ ____ $\{y|y=x^2\}$，$(-1,1)$ ____ $\{(x,y)|y=x^2\}$；

解：(1)$\in$、$\in$、$\notin$、$\in$、$\notin$（空集$\varnothing$不含任何元素）；

(2)$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，$3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+\sqrt{5}&=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}\\&=\sqrt{7+2\sqrt{10}}<\sqrt{7+2\sqrt{12}}\\&=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\\&=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

，故填$\notin$、$\in$、$\in$；

(3)令$n^2+1=3$，$n=\pm\sqrt{2}\notin N_+$，令$n^2+1=5$，

$n=\pm 2$，$2\in N_+$，故填$\notin$、$\in$；

(4)$\notin$，$\in$.（因为$\{y|y=x^2\}$中元素是数而$(-1\quad 1)$代表一个点）

3. 集合的表示方法

例 4　用另一种形式表示下列集合

(1)$\{$绝对值不大于 3 的整数$\}$

(2)$\{$所有被 3 整除的数$\}$(3)$\{x|x=|x|,x\in Z$ 且 $x<5\}$

(4)$\{x|(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0,x\in Z\}$

(5)$\{(x,y)|x+y=6,x\in N_+,y\in N_+\}$

解：(1)$\{$绝对值不大于 3 的整数$\}$还可以表示为$\{x||x|\leqslant 3,x$

$\in Z\}$,也可以表示为$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$;

(2)$\{x|x=3n,n\in Z\}$(说明:{被3除余1的整数}可表示为$\{x|x=3n+1,n\in Z\}$);

(3)$\because x=|x|$,$\therefore x\geqslant 0$,又$\because x\in Z$且$x<5$,$\therefore \{x|x=|x|,x\in Z$且$x<5\}$还可表示为$\{0,1,2,3,4\}$;

(4)$\{-2\}$(说明:要注意条件$x\in Z$).

(5)$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

例5 用列举法表示

(1)$A=\{x|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$,$a,b$为非零实数$\}$;

(2)$A=\{x|\frac{6}{3-x}\in Z,x\in N_+\}$.

分析:(1)关键是根据绝对值的意义化简$x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$.当$a>0,b>0$时,$x=2$;当$a<0,b<0$时,$x=-2$;当$a$、$b$异号时,$x=0$.故$A=\{-2,0,2\}$.

(2)关键是应用元素x满足的条件:$\frac{6}{3-x}\in Z$,且$x\in N$,得到x的值.x所取的自然数,要使$3-x$整除6.故$3-x=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6$,$x=2,4,1,5,6,0,-3,9$.而$x=0,-3$舍去.这样,$A=\{1,2,4,5,6,9\}$.

例6 用描述法表示图1-1中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合.

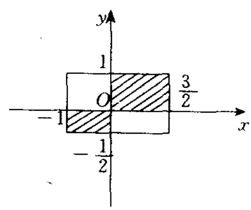

图1-1

解:$\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant \frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$且$xy\geqslant 0\}$

4.集合的应用

例7 已知集合$P=\{p|x^2+2(p-1)x+1=0,x\in R\}$,求一次函数$y=2x-1,x\in P$的取值范围.

解:由已知,$\triangle=4(p-1)^2-4\geqslant 0$,解得$p\geqslant 2$或$p\leqslant 0$

$\therefore P=\{p|p\geqslant 2$或$p\leqslant 0\}$

$\because x\in P$,$\therefore x\geqslant 2$或$x\leqslant 0$

$\therefore 2x-1\geqslant 3$或$2x-1\leqslant -1$

$\therefore y$的取值范围是$\{y|y\leqslant -1$,或$y\geqslant 3\}$.