大学数学考研清华经典备考教程

微积分（下）

谭泽光 刘坤林 编

清华大学出版社

大学数学考研清华经典备考教程

微积分（下）

谭泽光 刘坤林 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书中讲述微分方程、空间解析几何及多元微积分的基本概念、基本定理与知识点.从基本概念、基本定理的背景及其应用入手，延伸到解题的思路、方法和技巧，并通过一法多题、一题多解的方式兼顾到知识的综合与交叉应用.在内容的安排上，既体现出各知识点间承上启下的关系，保持学科结构的系统性，又照顾到各知识点间的横向联系，为读者从全局上、总体上掌握所学的知识提供平台.为了巩固所学的基本概念和基本定理，安排了基本题与综合例题，并且给出分析过程及难点注释.每章配有练习题，为读者提供自我训练的空间.

本书可供高等院校理工、农、医与经管各专业的学生及准备参加全国研究生入学考试的各类考生使用，也可作为相关课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)/谭泽光，刘坤林编．—北京：清华大学出版社，2006.7
(大学数学考研清华经典备考教程)
ISBN 7-302-12839-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.①谭…②刘…　Ⅲ.微积分—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 033475 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　**印张**：21.25　**字数**：450 千字
版　次：2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-12839-1/O·525
印　数：1～4000
定　价：29.00 元

前　言

本套教材的前身是《大学数学——概念、方法与技巧》. 经过修改后的本书，进一步加强了可读性，增加了部分新型例题. 全书主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者系统地复习大学数学内容、以求巩固提高所学知识，取得良好的考试成绩而编写的. 这套书包括《微积分(上)》、《微积分(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》四本书. 选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的. 本书的目标是为参加全国硕士研究生入学数学统一考试的考生提供夯实基础，争取高分成绩，进行强化训练的复习教材，同时，也可作为大学数学的一本比较全面系统的教学参考书.

本书是编者数十年教学经验的积累，是编者依据对课程内容的研究理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的. 许多教学资料是第一次向外公开. 这些教师不但有丰富的教学经历，同时也都从事科研工作，对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究. 因此，本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性与系统性和灵活运用知识的交叉性与技巧性的教学风范. 同时，本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来，既突出了基础，又具有较强的针对性，希望能对这两类读者都有全方位的指导意义，为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助.

学好数学，重在基础. 一味追求技巧，往往导致学习者无所适从，望题生畏. 本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练，各章节均配有相当数量的基本例题(**例** *. *. *)，其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧. 应该说，扎实地掌握基本概念，加上对基本方法的深入思考，是技巧的真正源泉. 另外，在大多数章节里，还选编了一定数量的综合例题(**综例** *. *. *)，体现知识的综合性与交叉性，培养运用所学知识分析问题及解决问题的能力. 基于综合性与交叉性的考虑，在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排. 读者在使用本书时，对书内例题应首先立足于独立思考，而后有选择地查阅解答过程，对一些典型题，应争取有自己的解题方法，很可能你的方法会优于书中提供的方法，果真如此，正说明你学习的深入. 对准备考研的读者，鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类，在使用本书时，可参照考试大纲，有选择地略去书内某些章节.

每章后配备了模拟练习题及答案. 读者应力争独立选做其中的题目，以求达到良好的

训练效果.

全书的宗旨是为参加研究生入学考试的考生提供有效的指导与帮助,引导考生建立居高临下的知识洞察力和走向成功的基石,本书适用于参加研究生入学考试的各类考生.同时,也可作为本科生学习、复习和提高的参考书.

全书编写工作得到清华大学数学科学系许多教师的支持与帮助. 限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出.

本套书主编为刘坤林.《微积分(上)》的编者为刘坤林(1～13 章),《微积分(下)》的编者为谭泽光(14～23 章);《线性代数》的编者为俞正光(1～3 章),王飞燕(4～6)章;《概率论与数理统计》的编者为叶俊(1～5 章),赵衡秀(6～8 章).

编 者

2006 年 4 月于清华园

作者简介

谭泽光

1962年毕业于清华大学，清华大学责任教授.

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授. 讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程，分析系列课程负责人. 负责的微积分课程，2003年被评为国家级精品课程. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

负责过多项科研项目，发表学术论文20多篇，并编著数学规划等教材. 先后获省部级以上奖励四次，1992年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委. 1997年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001年、2005年两次获国家教学改革成果二等奖.

刘坤林

1970年清华大学数学力学系毕业. 清华大学责任教授.

从事基础数学与应用数学教学工作，获清华大学教学优秀奖与国家教学成果奖. 近10年来所授课程"微积分"被评为国家级精品课. 研究方向：控制理论与系统辨识，随机系统建模及预测，并行计算. 1994年至1995年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学. 发表学术论文30多篇，著有教材《工程数学》，《系统与系统辨识》. 先后七次获国家及省、市、部级科技进步奖. 水木艾迪考研辅导班主讲.

中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长. 系统与控制专业委员会委员，《控制理论及其应用》特邀审稿专家.

俞正光

1962年毕业于清华大学. 清华大学责任教授.

清华大学代数系列课程负责人. 从事组合图论的研究，发表学术论文10余篇. 主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲. 1997年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作.

曾参编全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA 联考考前辅导教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

赵衡秀　女

1962 年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系副教授.

研究方向为概率统计应用. 长期讲授“概率统计”及“微积分”等课程，并担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

参加编写《MBA 全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA 入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材.

王飞燕　女

1967 年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系教授.

主要研究方向：运筹学，经济数学. 参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍. 长期在清华大学从事数学教学与教学研究. 主要讲授的课程有：高等数学，代数与几何，数学模型等. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

曾获清华大学优秀教学成果奖.

叶　俊

1993 年北京师范大学数学系博士研究生毕业，现任清华大学副教授.

专业方向：概率统计，应用数学. 主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究. 曾编写《随机数学》等教材.

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程. 曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖，1996 年、1997 年度清华大学优秀教学成果特等奖，1999 年获宝钢优秀教师奖.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

目　　录

第 14 章　微分方程的基本概念、一阶方程与高阶可降阶方程的解法

14.1　引　言

微分方程的基本内容可概括为以下三句话：

一个基本概念：微分方程的"解"；

三类微分方程：一阶可解方程；高阶可降阶方程以及高阶线性方程；

几方面简单应用：主要是在物理、力学、几何等方面的应用.

微分方程的中心问题是"解方程"，即求微分方程的解. 解方程的基本方法是：首先判别方程是否为某类可解的方程，若是，则按该类方程的解法求解；若不是，则通过变量置换将其化成可解类型. 这种方法简称为"按类求解". 怎样选择合适的"变量置换"? 通常是根据方程的特点，通过观察待定常数或函数的具体做法，将原方程变成代数方程或较简单的新微分方程，这个过程简称为"观察待定法". 因此，微分方程求解的基本方法是：按类求解和观察待定.

14.2　微分方程的基本概念

微分方程的基本概念有以下几方面.

(1) 解：满足微分方程的函数，即代入微分方程使其成为恒等式的函数，称为该方程的解.

(2) 阶：微分方程中所含未知函数导数阶数的最高数. 通常一个微分方程的标准型是关于最高阶导数已解出的形式，如一阶方程 $y'=f(x,y)$；二阶方程 $y''=f(x,y,y')$等.

(3) 通解或一般解：指包含有与方程阶数相同个数的独立任意常数的方程解，这实际上是含多个参数的函数族. 在一般情形下，通解不一定是方程的所有解.

(4) 线性方程与非线性方程：如果微分方程中所含未知函数及其各阶导数均是一次的，则称其为线性方程；否则就是非线性方程. 例如 $y''+xy'=0$ 是二阶线性方程，而

$y''+yy'=0$ 则是非线性方程. 线性与非线性是微分方程的基本分类,两者有很大的差别. 线性方程是高等数学中的主要研究对象之一,它们从解的结构到解法均有很强的规律性. 特别是,线性方程的通解就是其所有解.

以上四方面是微分方程的最基本概念,另外还有"特解"、"初始条件"等概念,也都是围绕着解的概念展开的.

例 14.2.1　请判别函数

$$y_1(x)=c_1e^{-x^2}+1,\quad y_2(x)=c_2,\quad y_3(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

其中 c_1,c_2 为任意常数,是否是方程

$$y'=2x(1-y),\tag{14.1}$$

$$xy''-(1-2x^2)y'=0\tag{14.2}$$

的解? 若是解的话,指出是特解还是通解.

【解】 验证一个函数是否为某微分方程的解,仅需将该函数代入方程,看是否能使其成为恒等式即可.

(1) 将 $y_1(x)$代入方程(14.1)得

$$左边=-2xc_1e^{-x^2};\qquad 右边=2x(-c_1e^{-x^2}).$$

由于左边恒等于右边,可见 $y_1(x)$是方程(14.1)的解,又 $y_1(x)$中含有一个任意常数,因而是该一阶方程的通解,或一般解. 再者,这是一阶线性方程,因而也是其所有解.

将 $y_2(x)=c_2$ 代入方程(14.1),欲让

$$0\equiv 2x(1-c_2),$$

只有 $c_2=1$ 才是恒等式,可见只有 $y_2(x)=1$ 是解,而除 $c_1=1$ 之外,$y_2(x)=c_2$ 都不是方程(14.1)的解. 其实,从其通解可知,当 $c_1=0$ 时,$y_1(x)=1$. 由此可知只有 $c_2=1$ 时,$y_2(x)$才是解,这是因为 $y_1(x)=c_1e^{-x^2}+1$ 是方程(14.1)的所有解.

(2) 今将 $y_1(x)=c_1e^{-x^2}+1$ 和 $y_2(x)=c_2$ 代入方程(14.2),全能使其成为恒等式,可见都是该方程之解,但由于均只有一个任意常数,因而不是通解,但 $y_3(x)=c_1e^{-x^2}+1+c_2$ 不但是方程(14.2)的解,而且有两个独立的任意常数,因而是该方程的通解.

(3) 解 $y_1(x)=c_1e^{-x^2}+1$ 是含单参数 c_1 的函数族,如果用求导方法消去参数 c_1,则得到以此为通解的一阶微分方程,即由

$$\begin{cases}y=c_1e^{-x^2}+1,\\ y'=-2c_1xe^{-x^2}.\end{cases}$$

消去 c_1,得方程

$$y'=2x(1-y).$$

这就是方程(14.1).

同样地，利用 $y_3(x)$，用求导方法消去两个参数 c_1 和 c_2，即由

$$y = c_1 e^{-x^2} + c_2,$$
$$y' = -2xc_1 e^{-x^2},$$
$$y'' = -2c_1 e^{-x^2} + 4x^2 c_1 e^{-x^2},$$

得到方程

$$\frac{y''}{y'} = \frac{-1+2x^2}{-x},$$

即

$$xy'' = (1-2x^2)y',$$

这就是方程(14.2). 【解毕】

例 14.2.2 求 $\int x e^x \sin x \mathrm{d}x$.

【解】 问题等价于解方程

$$y' = x e^x \sin x. \tag{14.3}$$

什么函数的导数会是 $xe^x \sin x$ 呢？显然只可能是形如

$$y = (ax+b)e^x \sin x + (cx+d)e^x \cos x \tag{14.4}$$

的函数，其中 a,b,c,d 为待定常数. 将函数(14.4)代入方程(14.3)，欲使下式

$$\begin{aligned} y' =& (ax+b)e^x \sin x + (ax+b)e^x \cos x + ae^x \sin x \\ & - (cx+d)e^x \sin x + (cx+d)e^x \cos x + ce^x \cos x \\ \equiv & x e^x \sin x \end{aligned}$$

成立，比较两边同类项的系数，得到关于系数 a,b,c 和 d 的方程组

$$\begin{cases} a-c=1, \\ b-d+a=0, \\ a+c=0, \\ b+d+c=0. \end{cases}$$

解出

$$a=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2},\quad b=0,\quad d=\frac{1}{2}.$$

由此得

$$y(x) = \frac{x}{2}e^x \sin x - \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)e^x \cos x + C.$$ 【解毕】

【注】 这种观察待定系数的方法是微分方程求解的重要途径，这里所设的带有待定常数的函数，通常称为方程的形式解. 言下之意，可能具有这种形式的解，至于是否真有，就要看代入方程后，得到的代数方程是否有解，若待定之数能求出来，则这种形式解就找

到了，否则无这种形式之解.

14.3 一阶可解方程

一阶方程 $y'=f(x,y)$ 中只有极少数方程可以通过积分的方法求解，这种方程统称为一阶可解类型. 一阶可解类型中最基本的形式是所谓"可分离变量型"和"可化为可分离变量型"的方程.

1. 可分离变量型

这类方程形式为

$$y' = f(x)g(y). \tag{14.5}$$

或者，用微分的形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

其解是

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

这里，不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 代表一个原函数. 另外，方程(14.5)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解可以表示成

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 可化成可分离变量型

这种方程是可通过变量置换，将新方程化成可分离变量型的方程. 典型的方程有以下两类：

(1) 零齐方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14.6}$$

作变换 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，可得 $y'=u+xu'$，代入式(14.6)，得到关于 u 的分离变量型方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u)-u}{x}.$$

(2) 线性变量方程

$$y' = f(ax+by). \tag{14.7}$$

作变换 $u=ax+by$，即 $y=\frac{1}{b}(u-ax)$，可得 $y'=\frac{1}{b}(u'-a)$，代入式(14.7)得到关于 u 的分离变量型方程

$$u' = bf(u) + a.$$

类似的方程可能有许多，而其思路都是作某种变量置换之后，使新方程成为可分离变量型.

3. 一阶线性微分方程

此种类型方程的形式为

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{14.8}$$

当 $q(x)\equiv 0$ 时，

$$y' + p(x)y = 0 \tag{14.9}$$

是可分离变量型方程，称为一阶线性齐次方程，容易求得其解为

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{14.10}$$

对于一阶线性非齐次方程(14.8)，它不是可分离变量型的，其解当然也不可能是函数(14.10)，但是能否将其中的 c 当作新的未知函数来代替 y，而使新方程变量分离呢？即令

$$y(x) = c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \quad \text{或写成 } c(x) = y\,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

为适应上述变换，将方程(14.8)两边同乘 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，得

$$y'\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} + p(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}y = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{14.11}$$

即

$$(y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x})' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{14.12}$$

于是得

$$c'(x) = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

$$c(x) = \int (q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + A.$$

从而有

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int (q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x})\mathrm{d}x. \tag{14.13}$$

这就是方程(14.8)的解. 在解这种方程时，没有必要死记公式(14.13)，可以直接利用步骤(14.11)，两边同乘因子 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，而后直接积分方程(14.12).

例 14.3.1 *求解方程* $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

【解】 将方程两边同乘函数

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = \mathrm{e}^{\ln x} = x,$$

得到新方程

$$(xy)' = \sin x,$$

两边积分得

$$xy = -\cos x + c,$$

$$y = \frac{c}{x} - \frac{\cos x}{x}.$$

【解毕】

要指出的是，解(14.13)中 $Ae^{\int p(x)dx}$ 正是线性齐次方程(14.9)的一般解，而后一部分正是线性非齐次方程(14.8)的一个特解. 这种解的结构形式，对一阶线性方程总是正确的.

与一阶线性方程很像的一类非线性方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 1) \tag{14.14}$$

称为伯努利方程，它通过变量置换可以变成线性方程，为此改写方程(14.14)成为

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$

$$\frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha})' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

令 $u(x) = y^{1-\alpha}$，得关于 u 的线性方程

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x).$$

4. 全微分方程与积分因子

任何一阶方程都可以写成微分形式

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0. \tag{14.15}$$

这使人联想到对隐函数 $F(x,y)=c$ 求微分时的形式，如果有

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy, \tag{14.16}$$

则方程(14.15)就变成

$$dF(x,y(x)) = 0,$$

因而方程(14.15)有由隐函数给出的解

$$F(x,y) = c.$$

由混合偏导数相等可得方程(14.15)左端能变成式(14.16)的形式的条件为

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

从而可推出所谓“可积性条件”：

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{14.17}$$

当然，这里的条件是 X,Y 的偏导数连续.

满足这种条件的方程显然非常少，但可以通过方程两边同乘一个函数，使之成为这种方程. 这在原则上总是可能的，但实际上是将原问题转化为解另一个更一般的困难问题.