中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

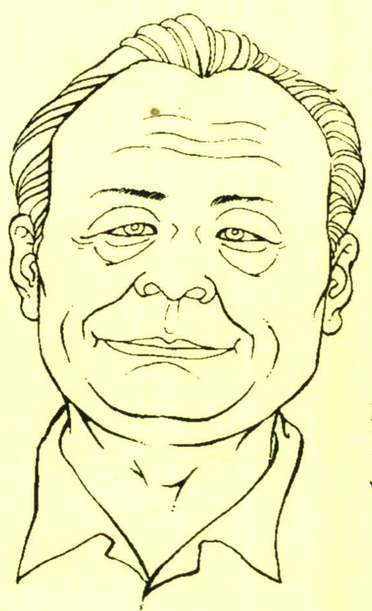
CONG $\sqrt{2}$ TANQI

从$\sqrt{2}$谈起

——张景中院士献给中学生的礼物

最新版

ZHANGJINGZHONG ZHU



张景中◎著

中国少年儿童出版社

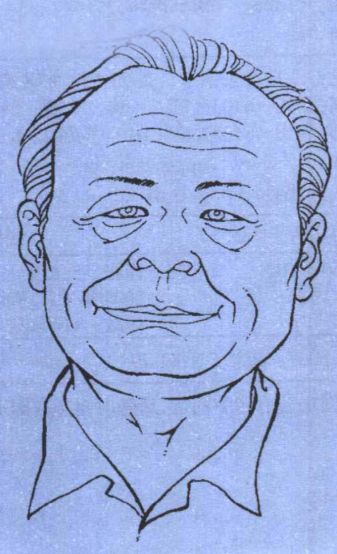
中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

从$\sqrt{2}$谈起

——张景中院士献给中学生的礼物

最新版



张景中◎著

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

从$\sqrt{2}$谈起/张景中著. —北京：中国少年儿童出版社，2004.4
（中国科普名家名作系列.院士数学讲座专辑）
ISBN 7-5007-6958-X

Ⅰ.从… Ⅱ.张… Ⅲ.有理数-普及读物
Ⅳ.0122-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第016620号

CONG $\sqrt{2}$ TANQI

出版发行：中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出 版 人：海 飞
执行出版人：赵恒峰

策 划：薛晓哲　　装帧设计：田家雪
责任编辑：许碧娟　　美术编辑：颜 雷
责任校对：鸿 长　　责任印务：宋世裕

社 址：北京市东四十二条21号　邮政编码：100708
总 编 室：010-64035735　传 真：010-64012262
发 行 部：010-84037667　010-64032266-8269
http：//www.ccppg.com.cn
E-mail：zbs@ccppg.com.cn

印刷：河北新华印刷一厂　　经销：新华书店

开本：850×1168 1/32　　印张：5.125
2004年4月第1版　　2004年4月河北第1次印刷
字数：77千字　　印数：11000册

ISBN 7-5007-6958-X/O·79　　定价：8.50元

写在前面

这本书的名字叫《从$\sqrt{2}$谈起》，我想，读者更想知道的是，在“谈起”之后，往哪里谈，谈到什么地方为止。

$\sqrt{2}$是人们最早认识的无理数之一，也是中学生最早知道的最简单的无理数。从$\sqrt{2}$谈起，自然会谈到其他的无理数。比如：除了$\sqrt{2}$，还有哪些常见的无理数？怎样证明一个数是无理数？无理数都可以用根式表示吗？是无理数多还是有理数多？

我们知道，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，是无限不循环小数。怎样把它算得更精确一些呢？会算$\sqrt{2}$，会不会算$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{2}$？$\sqrt{2}$是方程式 $x^2-2=0$ 的根，那么，更高次代数方程式的根怎么计算？能不能利用初中代数里学过的知识，计算高次方程式的根呢？等等这些，都是我们“谈起”的内容。

此外，我们还将简单谈谈你所熟悉的 π 和不大熟悉的 e，以及和“黄金分割”有关的“无理数三

兄弟”。关于它们,有着耐人寻味的故事和游戏。

怎么样,想了解这些知识吗? 那么,就请你翻到第一章吧! 书中用到的知识,大部分是初中学过的。当然,你也可以不从头看起,直接看中间的几章。

目　录

一、从$\sqrt{2}$谈起

$\sqrt{2}$是人类最早发现的无理数之一。早在公元前500年左右，人们就会证明$\sqrt{2}$是无理数了。

边长为1的正方形，它的对角线的长是多少？

如果你已经学过勾股定理，马上就能算出它的长度是$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$（图1-1）。

不用勾股定理，也能算出这个对角线的长。如图1-2所示，正方形$ABCD$边长为1，面积为1；而正方形$BEFD$的面积是$ABCD$面积的两倍，也就是说$BD^2=2$，于是$BD=\sqrt{2}$。

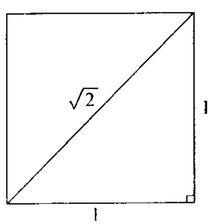


图1-1

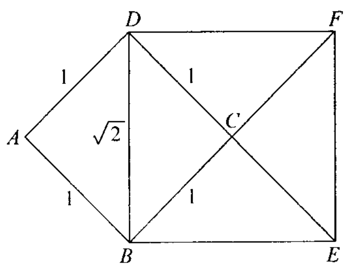


图1-2

显然,若正方形边长为 a,则对角线长为$\sqrt{2}a$,即对角线长是边长的$\sqrt{2}$倍。

我们知道,记号$\sqrt{2}$代表这样一个正数:x 的平方等于 2。换句话说,$\sqrt{2}$是二次方程式 $x^2-2=0$ 的正根,通常把它叫做 2 的算术平方根。

很明显,$\sqrt{2}$不是整数。因为 1 的平方比 2 小,2 的平方又比 2 大,所以$\sqrt{2}$应当在 1 和 2 之间。

在 1 和 2 之间,分数多得很,要多少有多少,而且是密密麻麻地挤在一起。那么,其中有没有这样一个分数,它自乘之后恰巧等于 2 呢? 看来似乎应当有。真的有吗? 那你找几个试试看,你一定找不到——不是太大,就是太小。尽管能找到平方很接近 2 的分数,但要想恰巧等于 2,是不可能的。

也许你会说,1 和 2 之间既然有无穷多个分数,那就不可能一个一个地试。既然不能一个一个地试,又怎能断定没有一个分数,它的平方等于 2 呢?

这个问题,早在 2000 多年前就解决了。请看:

[命题 1] $\sqrt{2}$不是有理数。

证法一 用反证法证明。先假设$\sqrt{2}$是有理

数，如果从这一假设出发推出矛盾，便说明这个假设错了，即$\sqrt{2}$不是有理数。

若$\sqrt{2}$是有理数。由于有理数只包含正负整数、正负分数和0，而$\sqrt{2}>0$，故必然有两个正整数n,m，使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

且n和m互质，即没有大于1的公约数。

根据$\sqrt{2}$的定义，有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2, \tag{1}$$

也就是

$$n^2=2m^2。 \tag{2}$$

这个式子右端是偶数，故左端的n^2也是偶数，因而n是偶数。于是可设$n=2k$，代入(2)式得$4k^2=2m^2$，即$2k^2=m^2$。这推出m是偶数，说明n和m有大于1的公约数，与假设矛盾。

这个证明还可以说得更简单些：不必假定n和m没有大于1的公约数，直接观察(2)式，它的右端所含2的因数有奇数个，而左端含2的因数又为偶数个，这就有了矛盾。

证法二 仍用反证法证明。设$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，n和m都是正整数，且n和m没有大于1的公约数。由

(2)式

$$n^2 = 2m^2,$$

而在十进制下,整数的平方的个位数字只能是 0,1,4,5,6,9 中之一,2 倍之后只能是 0,2,8 之一。所以,(2)式左端的个位数字是 0,1,4,5,6,9 中之一,而右端个位数字是 0,2,8 中之一。也就是说,两端的个位都是 0,这说明 n 和 m 有公因数 5,于是推出了矛盾。

在数学中,反证法很有用,尤其是要证明一个数是无理数时,更少不了反证法。上面介绍的第一个证法,曾出现在 2000 多年前希腊几何学家欧几里得(公元前 300 年左右)所写的《几何原本》一书中。这说明早在 2000 多年前,人们就知道$\sqrt{2}$不是有理数,而且会用反证法来进行逻辑推理了。

《几何原本》这部名著,是欧几里得总结、整理了当时他所收集到的资料写成的,并非他一人的研究成果。就拿“$\sqrt{2}$不是有理数”来说,这个事实是比欧几里得更早一些的毕达哥拉斯(公元前 500 年左右)学派的人发现的。

毕达哥拉斯学派有一个基本观点,叫做“万物皆数”。在他们心目中,数就只有正整数,而且正整数也就是组成物质的基本粒子——原子。因此

他们认为，一切量都可以用整数或整数的比来表示。他们觉得，一条线段就好比一串珍珠，这珍珠就是一个一个的点，不过又小又多罢了。按这种看法，两条线段长度之比，就应当是它们各自包含的小“珍珠”的个数之比，当然应当是可以用整数之比来表示的了。

据说，毕达哥拉斯学派一个名叫希帕苏斯的年轻人，第一个发现了正方形的边和对角线长度之比不能用整数之比来表示。用现在的话说就是“$\sqrt{2}$不是有理数”。这个发现直接和毕达哥拉斯学派的错误信条“万物皆数”相抵触，使这个学派的许多人大为惶恐和恼怒。据说，希帕苏斯在海船上向学派的其他成员讲述这个发现时，遭到激烈反对。由于他坚持自己发现的真理，竟被抛入海中淹死了。

但是，真理是不会被永远淹没的。随着数学的向前发展，无理数终于在人们心目中取得了合法地位，被广泛应用于科学研究、技术推广和人们的社会生活中。

顺便提一下，用“$\sqrt{\quad}$”来表示平方根，是解析几何的创始人笛卡儿（1596年～1650年）于16世纪首先采用的。那时，$\sqrt{2}$已被发现了近2000年，不少数学家已开始承认像$\sqrt{2}$这类不能用分数表示

的数了。

至于把整数和分数叫做“有理数”，据考证，倒是由于一开始翻译时的讹误。原来，“有理数”中的“有理”一词，英文是 Rational。这个词本来有两个含义：其一是“比”，其二是“合理”。照数学上的原义，分数可以表示成两整数之比，把“有理数”叫做“比数”是很确切的。可是，日本学者在 19 世纪翻译西方的数学书时，把这个词译成了“有理数”。日本语言中本来就有很多汉字。后来，在中日文化交流中，中国又从日本引进了“有理数”和“无理数”这两个词，一直用到现在，没法改，也不必改了。

练习题一

1. 若 a,b 是两个有理数，试证明一定有一个有理数 x，满足 $a<x<b$。

2. 若 a 是有理数，b 是无理数，问 ab 什么时候是有理数，什么时候是无理数？

3. 求证：$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt[3]{2}$都不是有理数。

4. 若 a,b 是两个有理数，试证明一定有一个无理数 y，满足 $a<y<b$。

5. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$是不是有理数？为什么？

6. 若 a,b 都是无理数，$a+b$ 是否一定是无理数？

7. 若 $a+b,a-b$ 都是有理数，a 和 b 是否一定是有

理数？

8. 已知线段 AB 之长为 1，试利用直尺和圆规，画出长度为$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$的线段。

二、庞大的无理数家族

无理数也是无穷无尽的，它们比起有理数来要多得多。

除了$\sqrt{2}$，还有哪些无理数呢？

从$\sqrt{2}$出发，就可以造出无穷多个无理数，如：

$1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}, \cdots$，它们都是无理数；

$2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \cdots$，也都是无理数；

$\frac{1}{2}+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, \frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}, \cdots$，仍是无理数。

也许你会说，你怎么知道它们都是无理数呢？一个一个地证多麻烦呀！其实，我们根本不用一个一个地证。不信，请看命题2：

[**命题2**] 如果 r 和 s 是有理数，$r \neq 0$，且 a 是无理数，那么 $ra+s$ 必是无理数。

证明 用反证法。若 $ra+s$ 是有理数，令 $ra+s=q$，则 $q-s$ 是有理数，$\frac{1}{r}(q-s)$ 也是有理数。由 $ra+s=q$ 解出

$$a=\frac{1}{r}(q-s),$$

于是推出 a 是有理数，和已知矛盾。所以，$ra+s$ 应是无理数。

你看，由命题 2 我们可以知道，当 $a=\sqrt{2}$时，上面提到的 $1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}, \cdots$ 都是无理数。也就是说，只要有一个无理数 a，就可以造出无穷多个无理数来。

无理数是不是都要带个$\sqrt{2}$呢？当然不是。就在人们发现$\sqrt{2}$不是有理数之后不久，希腊数学家塞阿多斯（公元前 470 年左右），就证明了$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots, \sqrt{17}$都是无理数。于是，像 $3-2\sqrt{5}, \frac{5}{4}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$等等这类的数，也都是无理数。

下面我问你，无理数开平方如$\sqrt{3+\sqrt{2}}$是不是无理数呢？我们的结论是：是的。请看：

[命题 3] 若 a 是无理数，k 是正整数，则$\sqrt[k]{a}$是无理数。

证明 用反证法。若$\sqrt[k]{a}=q$ 是有理数，则可推出 $a=q^k$ 是有理数，与已知矛盾。所以，$\sqrt[k]{a}$是无理数。

用类似于证明命题 2 和命题 3 的方法，很容易证明：若 a 是无理数，则$\frac{1}{a}$也是无理数。进一步可以证明，若 a 是无理数，m,n,p,q 是有理数，则当 $mq-np\neq 0$ 时，比值$\frac{ma+n}{pa+q}$也是无理数。（证明留给读者作练习。）

不过，两个无理数相加，可就不一定是无理数了。例如 $3+\sqrt{2}$和 $3-\sqrt{2}$，这两个无理数之和为 6，是有理数。类似地，两个无理数的差、积、商，可能是无理数，也可能是有理数。但是，像$\sqrt{2}+\sqrt{3}$这类数是无理数。请看：

[命题 4]　若 a,b 是正的有理数，$\sqrt{a},\sqrt{b}$是无理数，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$也是无理数。如果 $a\neq b$，则$\sqrt{a}-\sqrt{b}$也是无理数。

证明　用反证法。设$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=r$ 是有理数，且 $r\neq 0$，则 $\pm\sqrt{b}=r-\sqrt{a}$，两端平方得

$$b=r^2+a-2r\sqrt{a},$$

解出

$$\sqrt{a}=\frac{r^2+a-b}{2r}。$$

于是推出$\sqrt{a}$是有理数，这和已知矛盾，从而命题结论成立。

现在我们已经知道了，从整数出发，反复进行有限次的 $+$、$-$、$\times$、$\div$、开平方这 5 种运算，可以得到许多无理数。这样得到的无理数，可以说是最简单的无理数了。我们从长度为 1 的线段出发，使用圆规和直尺，可以画出长度等于这类无理数的线段来。这是因为：

(1) 有了长为 a，b 的两条线段，容易作出长为 $a+b$，$a-b$ 的线段来。(你会作吗?)

(2) 有了长为 a，b 的两条线段，又有了长为 1 的线段，可以作出长为 ab 的线段来。(提示：如图 2-1，$PQ\perp MN$，$\angle 1=\angle 2$，$PO=a$，$QO=b$，$MO=1$，则 $NO=ab$。)

(3) 在图 2-1 中，如果取 $PO=1$，$QO=b$，$MO=a$，那么易知 $NO=\dfrac{b}{a}$。也就是说，有了长为 a，b 的两条线段，又有了长为 1 的线段，可以作出长为 $\dfrac{b}{a}$ 的线段来。

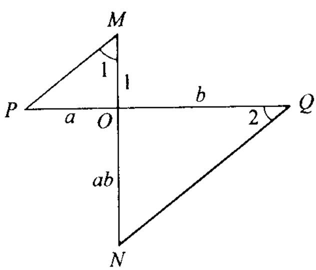


图 2-1

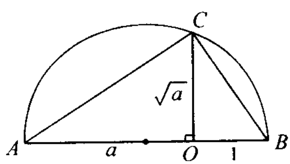


图 2-2