奥赛经典

解题金钥匙系列

高中物理

主编/黄生训　刘旭华　周石伦　彭圣儒

湖南师范大学出版社

奥赛经典

解题金钥匙系列

高中物理

主编/黄生训　刘旭华　周石伦　彭圣儒

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题金钥匙系列·高中物理／黄生训等主编.—长沙:湖南师范大学出版社,2006.4
(奥赛经典丛书)
ISBN 7-81081-536-9

Ⅰ.解…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.物理课—高中—解题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086446 号

解题金钥匙系列·高中物理

◇主　　编:黄生训　刘旭华　周石伦　彭圣儒

◇丛书策划:周玉波　陈宏平　何海龙
◇丛书组稿:何海龙
◇责任编辑:莫　华
◇责任校对:胡晓军
◇出版发行:湖南师范大学出版社
　　　　地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
　　　　电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:望城湘江印刷厂

◇开本:730×960　1/16
◇印张:19.5
◇字数:523 千字
◇版次:2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
◇印数:1—6000 册
◇书号:ISBN 7-81081-536-9/G·278
◇定价:19.00 元

您身边的金牌教练

沈文选	教　　授	金牌教练	湖南师范大学
唐立华	特级教师	金牌教练	华东师范大学附中
冯志刚	特级教师	金牌教练	上海中学
冯跃峰	特级教师	金牌教练	深圳高级中学
王树国	高级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
黄生训	教　　授	金牌教练	湖南师范大学
武建谋	特级教师	金牌教练	长沙市一中
刘旭华	高级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
黄洪才	高级教师	金牌教练	长沙市一中
彭大斌	特级教师	金牌教练	长沙市一中
邓立新	特级教师	金牌教练	长沙市一中
陈云莎	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
肖鹏飞	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
高建军	特级教师	金牌教练	长沙市一中
黄国强	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
汪训贤	特级教师	金牌教练	湖南师范大学附中
吴耀斌	副 教 授	金牌教练	中南大学
向期中	高级教师	金牌教练	长郡中学
曹利国	高级教师	金牌教练	长沙市一中

丛书告白

目标

《奥赛经典》丛书是我社十几年来畅销不衰的品牌图书，在读者中享有盛誉。

学会科学的解题方法，总结正确的解题规律，可以起到举一反三、事半功倍的效果。“解题金钥匙系列”主要针对各学科奥林匹克竞赛中常用的解题技巧，归纳、总结具有代表性的解题方法。学会运用这些解题方法，不但能帮助你在奥林匹克初赛和复赛中一展身手，更能帮助你在中考和高考中实现自己的梦想！

作者

作者全部为各学科奥林匹克国际竞赛金牌选手教练，他们培养的选手屡次在国内和国际大赛中获得奖牌，这套系列图书是他们多年心血的结晶和经验的总结。

内容

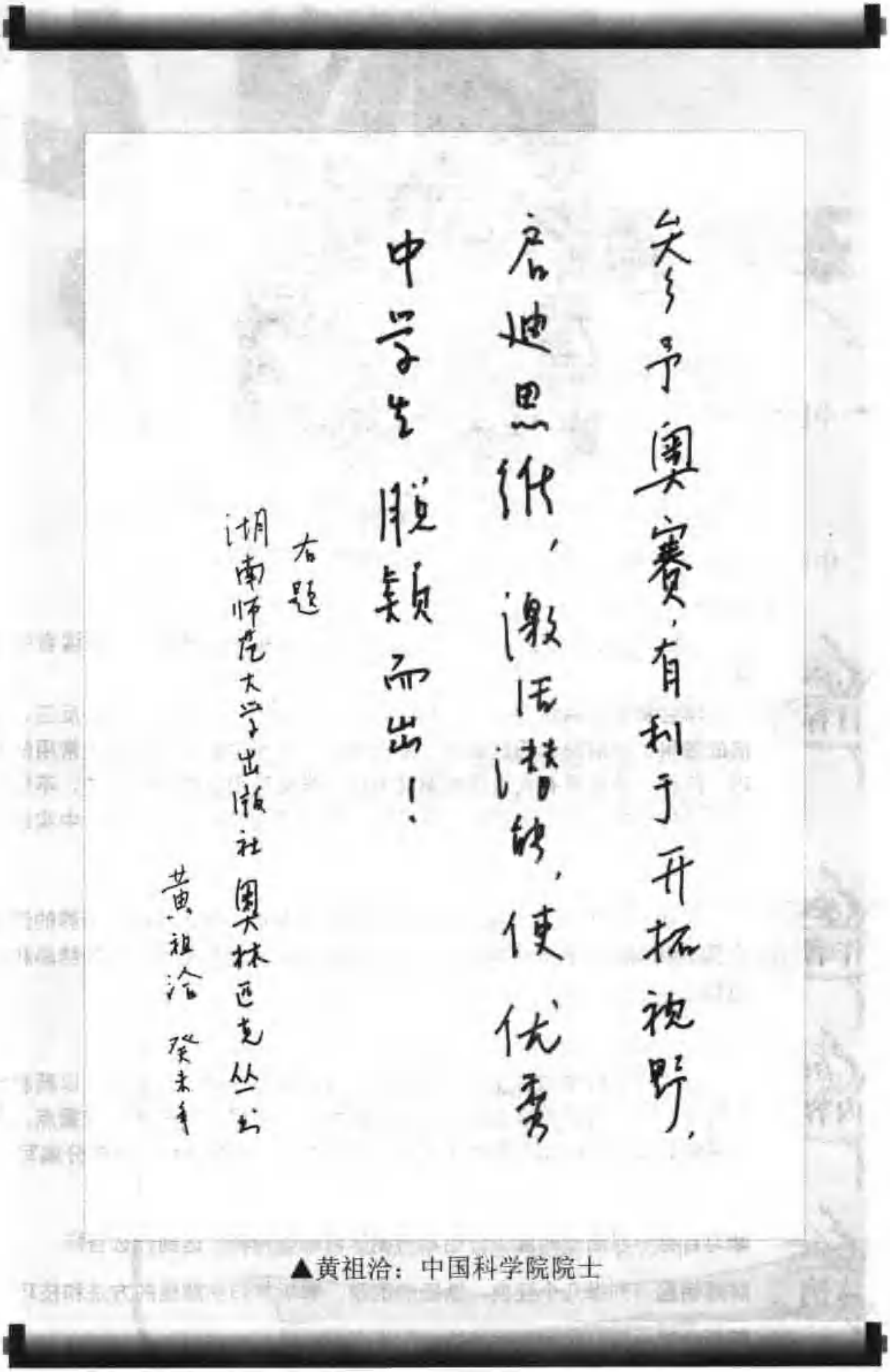
以“学会科学的解题方法，总结正确的解题规律”为宗旨，以新教学大纲为指导，以“突出方法讲解、培养解题技能、拓展创新思维”为重点，各学科按照新教材的全部知识点和联赛的测试范围分初中部分和高中部分编写。

体例

学习目标→以简短的篇幅介绍本节要学习哪些内容，达到什么目标。

解题钥匙→列举几个经典、新颖的例题，解析并归纳解题的方法和技巧。

解题尝试→相似题型实战演练，附答案。


参予奥赛，有利于开拓视野，启迪思维，激活潜能，使优秀中学生脱颖而出！
右题
湖南师范大学出版社奥林匹克丛书
黄祖洽 癸未年
▲黄祖洽：中国科学院院士

目 录

第一章 运动学

【学习目标】

一、质点的位置和位移

质点 是一个能代替物体的有质量的点.一切只做平动的物体均可视为质点;当物体的大小和形状在所研究的问题中可以忽略时可视为质点.

位置 当参考系确定后,质点的位置在直角坐标系中可以用坐标(x,y,z)来表示,如果质点是在运动中,那么,x、y、z均可表示为时间t的函数.从坐标原点O指向质点所在位置的有向线段$\vec{r}$就是它的位置矢量(位矢).

位移 从初始位置指向终止位置的有向线段(位矢的改变量),它是一个矢量,一般用$\vec{S}$表示.

二、直线运动的速度和加速度

速度 速度是描述物体运动快慢的物理量,物体发生的位移与发生这段位移所用时间的比值,就是这段时间内物体的平均速度$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$,当$\Delta t\to 0$时,这一极限值就是物体在某一位置或某一时刻的瞬时速度(简称速度):$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

加速度 是表示速度改变快慢的物理量,是速度对时间的变化率.

$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$(平均加速度,对匀变速直线运动,它就是物体的瞬时加速度)

$a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$是物体的瞬时加速度,简称加速度.

匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=v_0^2+2as$

三、曲线运动的速度和加速度

曲线运动的速度的定义与直线运动的定义差不多:$\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$,而它的加速度既反映物体速度大小的变化,又反映速度方向的变化.对于圆周运动,它的加速度$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau$,其中$a_n$是指法向加速度(向心加速度),$a_\tau$指切向加速度,对于匀速圆周运动,$a_\tau=0$,$a_n=v^2/R$.

四、运动的分解与合成

运动的独立性 一个物体可以同时参与两种或两种以上的运动,而每一种运动都不因为有其他运动的存在而受到影响,运动是完全独立的.

运动的合成法则 描述运动的位移、速度、加速度都是矢量,其合成法则都是平行四边形定则或

三角形法. 已知分运动求合运动,叫做运动的合成;已知合运动求分运动,叫做运动的分解.

1. 平抛运动:可以分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动,即

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

2. 斜抛运动:斜上抛运动可以分解成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的竖直上抛运动,有

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta \cdot t \\ y = v_0\sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

五、刚体的平动和转动

刚体 刚体是指在任何条件下,形状和大小不发生变化的物体. 这样的物体实质上是不存在的,但固体在一般情形下可视为刚体.

平动 刚体在运动过程中,其上任一直线段在各个时刻的位置始终保持平行,这种运动称为平动. 做平动的物体可视为质点.

转动 刚体所有质元都绕同一直线作圆周运动,这种运动称为转动,这一直线称为转轴. 如果转轴固定不动,就称为定轴转动.

1. 角速度 $\omega = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$,即单位时间内转过的角度(角位移),对于非匀速转动,上式只是求出刚体在 Δt 时间内的平均角速度,对于瞬时角速度,$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$.

2. 角加速度 单位时间内角速度的变化量,$\beta = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

3. 对于匀变速转动,可以类比匀变速直线运动的规律,有

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\varphi - \varphi_0)$$

4. 定轴转动中 ω、β 与线速度 v,切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 的关系为

$$v = \omega R \quad a_\tau = \beta R \quad a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

【解题钥匙】

例1 具有圆锥形状的回转器(螺陀),绕它的轴在光滑的桌面上快速旋转,如图 1-1 所示. 回转器用怎样的速度 v 向前运动,才能在它从桌子边缘落下时不与桌子边缘发生碰撞.

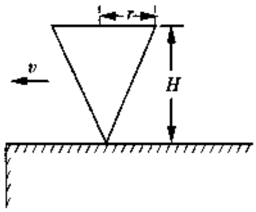


图 1 - 1

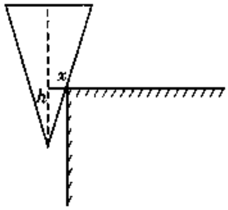


图 1 - 2

解析　如图 1 - 2 所示，设桌子边缘碰到半径为 x 处，回转器的顶角为 2θ，此时对应的下落高度为 h.

$$h = x\cot\theta = x\,\frac{H}{r}$$

$$\because\quad \left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}gt^2 \\ vt &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{2v^2H}{gr}$$

显然，v 越大，x 越大，当 $x \geqslant r$ 时满足条件，即有：$v \geqslant \sqrt{\dfrac{gr^2}{2H}}$

方法与技巧　回转器向前运动离开桌面后的运动是平抛运动，要想它不与桌边缘碰撞，当下落的高度为 H 时，水平位移必大于半径 r.

例 2　由于汽车在冰面上行驶时摩擦因数很小，所以其最大加速度不能超过 $a = 0.5\ \text{m/s}^2$. 根据要求，驾驶员必须在最短时间内从 A 点到达 B 点，直线 AB 垂直于汽车的初始速度 v，如图 1 - 3 所示. 如果 A、B 之间的距离 $AB = 375\ \text{m}$，而初速度 $v = 10\ \text{m/s}$，那么这个最短时间为多少？其运动轨迹是什么？

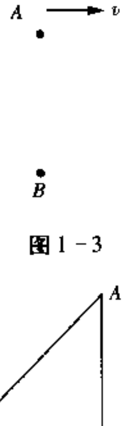


图 1 - 3

解析　坐标系转换：汽车在 A 点不动，而让 B 点以恒速 v 向汽车运动的相反方向运动. 在此坐标系内汽车为了尽快与 B 点相遇，必须沿直线以恒加速度 a 向 B 点驶去. 假设它们在 D 点相遇，如图 1 - 4 所示. 设 $AB = b$，我们可以列出：

$$b^2 + (vt)^2 = \left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 \qquad ①$$

由①式可得：

$$t = \sqrt{\frac{2v^2}{a^2} + \sqrt{\left(\frac{2v^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{a^2}}} \qquad ②$$

将数据代入②式得 $t = 50\ \text{s}$.

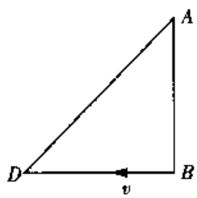


图 1 - 4

在地球坐标系内，它的运动是两个不同方向上的匀速直线运动和匀加速直线运动的合运动，因而它的运动轨迹是一条抛物线.

方法与技巧　汽车的运动是曲线运动，采用坐标系转换法，将其转换成直线运动，坐标转换法及化曲为直是物理学中常用的方法.

例 3　当赛车在公路的直线段上以最大加速度超车时，在 $\Delta t_1 = 0.1\ \text{s}$ 时间内速度由 $v_1 = 10.0\ \text{m/s}$ 增加到 $v_2 = 10.5\ \text{m/s}$. 当弯道路段半径 $R = 30\ \text{m}$ 时，需要多长时间才能得到同样的效果？

解析　赛车的最大加速度为

$$a=\frac{v_0-v_1}{\Delta t_1}=5\ \mathrm{m/s^2}$$

这个加速度取决于发动机的功率和车相对公路的摩擦力，而与道路的弯曲与否无关. 在弯道上行驶时，切向加速度 $a_\tau=\frac{\Delta v}{\Delta t}$，向心加速度 $a_n=\frac{v^2}{R}$，车辆的加速度：$a^2=a_\tau^2+a_n^2$，由此可得

$$a_\tau=\sqrt{a^2-a_n^2}$$

在本题中，由于速度大小变化很小，而且切向加速度可视为常数，所以所求的时间为

$$\Delta t_2=\frac{\Delta v}{a_\tau}=\frac{v_2-v_1}{\sqrt{a^2-(\frac{v_1^2}{R})^2}}\approx 0.14\ \mathrm{s}$$

方法与技巧 在直线道上，加速度只有直线加速度，而在弯道上，整个加速度 a 是切向加速度 a_τ 和向心加速度 a_n 的矢量和.

例 4 一根直径 20 cm 的树干平放在水平地面上. 一只懒惰的蚱蜢想跳过树干，求蚱蜢满足条件的最小离地速度(空气阻力不计).

解析 蚱蜢的运动轨迹是抛物线，并与树干相切于两个对称分布的点 B 和 B^*，在树干的两端.(目前我们对于这些点的情况还不了解——它们可能是也可能不是汇合于树干的顶点 E.)蚱蜢从 A 点以速度 v_1 起跳，起跳方向与平面成 θ 角，如图 1－5 所示. 在切点 B 和 B^*，蚱蜢的速度为 v_2，与水平面间的角度为 β.

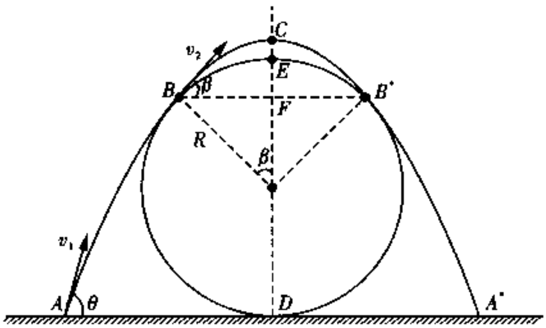


图 1－5

为了简化，选择 β 为独立变量，在点 B，速度的竖直分量为

$$v_2\sin\beta=gt_2$$

其中 t_2 为轨迹 BC 段的飞行时间(C 是抛物线的顶点). 相对的水平位移 BF 为

$$v_2t_2\cos\beta=R\sin\beta$$

将等式两端相乘，有

$$v_2^2=\frac{gR}{\cos\beta}$$

在轨迹的 A 点和 B 点间使用能量守恒定律得到

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+mg(R+R\cos\beta)$$

因此有

$$v_1^2=v_2^2+2gR(1+\cos\beta)=\frac{gR}{\cos\beta}+2gR(1+\cos\beta)=2gR(1+\cos\beta+\frac{1}{2\cos\beta})$$

使用微分的方法可以得出 v_1 的最小值.然后使用算术表示和几何表示的不等式,可以用不那么复杂的办法来求解:

$$\frac{1}{2}(\cos\beta+\frac{1}{2\cos\beta})\geqslant\sqrt{\cos\beta\cdot\frac{1}{2\cos\beta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此 $\cos\beta+1/(2\cos\beta)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$,并由此得出 $\beta=45°$. 因为 $1.5>\sqrt{2}$,故 $\beta=0$ 的情况需要更大的初速度;这意味着最小初速度对应的轨迹并不到达树干的顶点.在抛物线的顶点蚱蜢的重力势能大于在树干顶点处的重力势能,但是其动能和总能量要小于过树干顶点轨迹对应的动能和总能量.

计算最小初速度的数值得到

$$v_{1\min}=\sqrt{2gR(R+\sqrt{2})}\approx 2.2\ \text{m/s}$$

方法与技巧 此题最易出错之处在于认为蚱蜢在最小的离地速度下其轨迹的最高点与树干的最高点重合.实际上轨迹的最高点高于树干的最高点.

例5 在水平地面某一固定点用枪射击,射出的子弹在水平地面上落点所能够覆盖的最大面积是 S. 若在这一固定点正上方高度为 h 的位置用同一支枪射击,射出的子弹在水平地面上落点所能覆盖的最大面积是多大?

解析 将固定点作为坐标原点 O,建立竖直平面内 xOy 坐标.设子弹初速度为 v_0,与水平面夹角为 θ,则子弹的运动轨迹为

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \quad ①$$

对于大小相同的初速度 v_0,在夹角 θ 不同时,子弹运动轨迹构成一簇抛物线,该簇抛物线的包络线如图 1-6 中曲线 C 所示,包络线与 x 轴的交点到原点 O 的距离即是地面上射击时子弹最大水平位移.包络线方程为

$$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2} \quad ②$$

地面上射击,子弹最大水平位移和最大高度分别为

$$ON=\frac{v_0^2}{g},OP=\frac{v_0^2}{2g} \quad ③$$

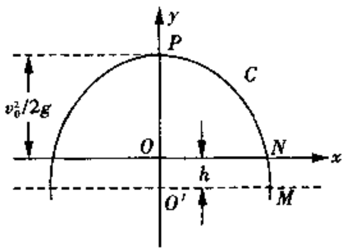


图 1-6

由题设可知:$S=\pi(\frac{v_0}{g})^2$ ④

根据包络线方程可以知道,在 $y=-h$ 时,x 的值(图中 $O'M$)为在固定点正上方 h 的位置时,子弹运动的最大水平距离,有

$$O'M^2=\frac{2v_0^2}{g}(\frac{v_0^2}{2g}+h) \quad ⑤$$

对应的最大面积为

$$S'=\pi O'M^2=A+2h\ \sqrt{\pi A} \quad ⑥$$

方法与技巧 利用抛物体运动的包络线可以快速而简便地解决此类问题.

例 6 线轴置于斜面上,斜面与水平面的夹角为 α. 线的自由端固定住(如图 1-7). 线绳为垂直线时的瞬间线轴的旋转角速度等于 ω. 求在这瞬间的:①线轴轴心的速度;②线轴与斜面相切点的速度. 线轴的半径为 R.

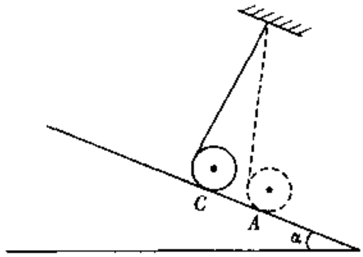


图 1-7

解析 在题中情况下,A 点的速度(图 1-8a)等于

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

不难看出,$v' = \omega R$,且 $v_A \perp v'$,由此可得

$$v_0 = \frac{\omega R}{\sin\alpha} \qquad ①$$

同理可以求出线轴与斜面相切 C 点的速度(图 1-8b)

$$\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}''$$

其速度在斜面方向的投影为

$$v_C = v_0 - \omega R \qquad ②$$

将①代入②得

$$v_C = \omega R\,\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha}$$

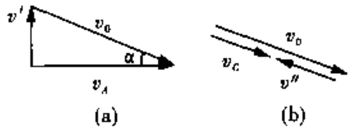


图 1-8

方法与技巧 由于线绳不能伸长,所以垂直线最下面的点和与其相接触的线轴上的 A 点的速度 v_A 相同,v_A 的方向是水平方向. 线轴的运动由两个运动合成:平行于斜面的直线运动,其速度为 v_0;绕轴心的顺时针转动,其角速度等于 ω_0.

例 7 三只小蜗牛所在的位置形成一个等边三角形,三角形的边长为 60 cm. 第一只蜗牛出发向第二只蜗牛爬去,同时,第二只向第三只爬去,第三只向第一只爬去,每只蜗牛爬行的速度都是 5 cm/min. 在爬行的过程中,每只蜗牛都始终保持对准自己的目标. 经过多长时间蜗牛们会相遇? 相遇的时候,它们各自爬过了多长的路程? 它们经过的路线可以用怎样的方程来描述? 若将蜗牛视为质点,那么在它们相遇前,绕着它们的最终相遇点转了多少圈?

解析 将蜗牛 2 的速度矢量在指向蜗牛 1 的方向和与之垂直的方向上分解(见图 1-9a). 则两只蜗牛彼此靠近的相对速度为 $v + \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v = 7.5$ cm/min,因此它们将在 60 cm/(7.5 cm/min) = 8 min 后相遇. 事实上,8 min 后三只蜗牛将相遇在一起,由于它们的实际速度为 5 cm/min,因此在相遇前,它们爬过的路程为 40 cm.

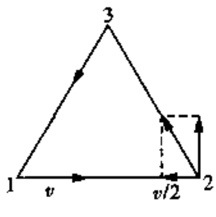


图 1-9(a)

将速度矢量在其他坐标系中分解可以得到相同的结果,比如以蜗牛为原点,指向三角形的中心为一个坐标轴,其垂直方向为另一个坐标轴,如图 1-9(b)所示. 很明显,最终蜗牛们将在中心点相遇,而在此坐标系中的速度矢量的分解可以得到蜗牛将以恒定的速度 $(\sqrt{3}/2)v = 5\sqrt{3}/2$ cm/min 爬向中心点. 同时,围绕中心爬行的速度为 $v/2$.

可以很容易计算出蜗牛在初始状态距离中心点 $60(\sqrt{3}/3)$ cm,因此它们将在

$$\frac{60(\sqrt{3}/3)\,\text{cm}}{5(\sqrt{3}/2)\,\text{cm/min}} = 8\ \text{min}$$

后相遇.

因为图形呈几何对称，每一只蜗牛都在运动，而它运动的方向与其位置和中心点之间的连线总保持 $\pi/6$ 的角度. 因此可以将运行轨迹的运算归纳如下：考虑当一个物体以恒定的速度 v 围绕固定点运动，其速度和位置矢量之间的夹角为一个定值 $\alpha(0<\alpha<90°)$. 假设位置矢量的初始值为 r_0，当其转过一个小角度 $\Delta\phi$ 后，其长度变化为 $-\Delta r$（图 1－10 所示），则由于 α 为定值，得

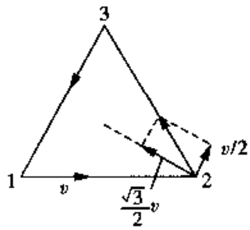


图 1－9(b)

$$\frac{\Delta r(\phi)}{\Delta\phi}=-r(\phi)\cot\alpha$$

这个公式很像辐射衰减方程 $\mathrm{d}m(t)/\mathrm{d}t=-m(t)\lambda$，已经知道此方程的解为 $m(t)=m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$，与此类似，在极坐标中蜗牛移动路径的方程为

$$r(\phi)=r_0\mathrm{e}^{-\phi\cot\alpha}$$

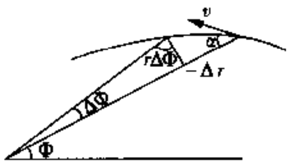


图 1－10

这个方程就是所谓的对数螺旋方程，表明半径 r 会在转过无限的角度后趋向于零. 也就是说，一个类似点的物体经过有限长的时间，走过有限的距离后会到达中心，但是却要转无穷多圈.

方法与技巧 将蜗牛的速度矢量在适当的坐标系内分解，有多种分解的途径，从而会导致不同的解法，各种解法最终都得到相同的答案.

例 8 在听磁带录音机的录音磁带时发觉，带轴上带卷的半径经过时间 $t_1=20$ min 减小一半. 问此后半径又减小一半需要多少时间？

解析 设带半径的初半径为 $4r$，于是当半径减少一半，成为 $2r$ 时，带卷的面积减少了

$$S=\pi(16r^2-4r^2)=12\pi r^2$$

这等于所绕带的长度 l_1 与带的厚度 d 之乘积. 在听录音时带运行的速度 v 恒定，所以 $l_1=vt_1$，于是有

$$12\pi r^2=vt_1d \quad ①$$

当带轴上半径又减少一半（从 $2r$ 到 r）时，带卷的面积减少了 $\pi(4r^2-r^2)=3\pi r^2$，即

$$3\pi r^2=vt_2d \quad ②$$

由①②得

$$t_2=\frac{t_1}{4}=5\ \text{min}$$

方法与技巧 抓住录音机在运行时磁带运行的速度 v 恒定.

例 9 木排停泊在河上，到岸的距离 $L=60$ m，流水速度同到岸的距离成比例增大，在岸边 $u_0=0$，而在木排边 $u_l=2$ m/s，小汽船离开岸驶向木排. 船相对水的速度 $v=7.2$ km/h，问驾驶员在起航前应该使船指向何方，使以后无需校正船的航向就能靠上与起航处正对面的木排？这时航行的时间为多长？

解析 离岸 x 处（图 1－11）河水速度 $u=\frac{x}{L}u_L$. 船相对岸沿 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x=v\cos\theta$，$v_y=v\sin\theta-u$（v 是船对水的速度）. 因为 $x=vt\cos\theta$，所以有

$$v_y=v\sin\theta-\frac{u_L}{L}vt\cos\theta$$

由此可见，船沿 x 轴作匀速运动，而沿 y 轴作匀减速运动.

起航后经过时间 t 船的坐标为 x 和 y,并且有

$$\begin{cases}x=vt\cos\theta\\ y=vt\sin\theta-\dfrac{u_l}{L}\cdot\dfrac{vt^2\cos\theta}{2}\end{cases}$$

当船与木排相遇时 $t=T$,坐标 $y=0$,$x=L$,因此

$$L=vT\cos,O=vT\sin\theta-\frac{u_L}{L}\frac{vT^2\cos\theta}{2}$$

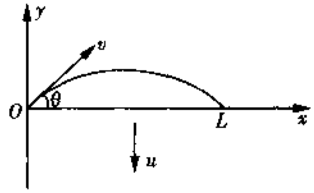


图 1-11

由此得

$$\sin\theta=\frac{u_L}{2v},T=\frac{L}{v\cos\theta}$$

代入数据得

$$\theta=30^\circ,T\approx35\ \mathrm{s}.$$

注:如果 $u_l\geqslant2v$,那么船不可能同木排相遇.

方法与技巧 本题是一个速度的合成问题,我们可以考虑各个分运动的独立性,同时注意水流速度的变化.

例 10 如图 1-12 所示,有两条位于同一竖直平面内的水平轨道,相距为 h. 轨道上有两个物体 A 和 B,它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接. 物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动. 在轨道间的绳子与轨道成 30°角的瞬间,绳子 BO 段的中点处有一与绳子相对静止的小水滴与绳子分离,设绳长 BO 远大于滑轮直径,求:

(1)小水滴 P 脱离绳子时的速度的大小和方向;

(2)小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需的时间.

解析 (1)物体在上轨道的运动可看成沿绳子的运动和垂直于绳子的运动(即绕 O 点的运动),如图 1-13 所示.

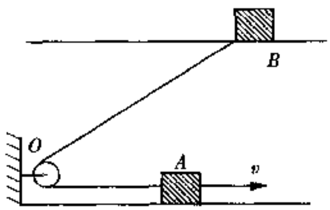


图 1-12

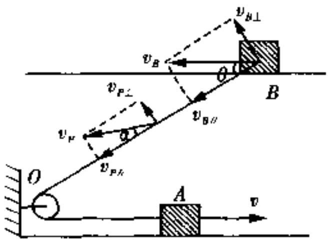


图 1-13

B 沿绳子的分速度:$v_{B/\!/}=v$

B 垂直于绳子的速度:$v_{B\perp}=v\tan\theta,\theta=30^\circ$

绳子中点 P 的速度也可分解为沿绳子的分速度和垂直于绳子的分速度

$v_{P/\!/}=v,v_{P\perp}=v\tan\alpha$

又 $\dfrac{v_{P\perp}}{BO/2}=\dfrac{v_{B\perp}}{BO}$,$v_{P\perp}=\dfrac{1}{2}v_{B\perp}=\dfrac{1}{2}v\tan\theta$

则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$v_p$ 与水平方向之间的夹角为$(30°-\alpha)$

$$v_P=\sqrt{v_{P//}^2+v_{P\perp}^2}=\sqrt{v^2+(\frac{1}{2}v\tan\theta)^2}=v\sqrt{1+\frac{\tan^2\theta}{4}}=v\sqrt{\frac{13}{12}}$$

(2)因 $\alpha<30°$，水滴离开绳子后作斜下抛运动，竖直方向的分运动是初速度为 v_{Py0}、加速度为 g 的匀加速直线运动，则有

$v_{Py0}=v\sin\theta-v_{P\perp}\cos\theta=v\sin\theta-\frac{1}{2}v\tan\theta\cdot\cos\theta=\frac{v}{4}$（将 $\theta=30°$ 代入解之）

则在竖直方向有：$\frac{h}{2}=\frac{1}{4}vt+\frac{1}{2}gt^2$

解得：$t=\frac{1}{4g}(\sqrt{v^2+16gh}-v)$

对于第(1)问，也可用"瞬心法"求解.

对绳子刚体，分别过 O、B 点作两质点的瞬时速度的垂线交于 C 点，C 点则为刚体的瞬时转动中心，即瞬心.

由几何关系可知：$\angle BCO=30°$，又因 $OB=2h$

则 $CO=\sqrt{3}OB=2\sqrt{3}h$

则绳子绕瞬心转动的角速度 $\omega=\frac{v}{OC}=\frac{v}{2\sqrt{3}h}$

$CP=\sqrt{OP^2+OC^2}=\sqrt{h^2+12h^2}=\sqrt{13}h$

$v_P=\omega\cdot CP=\sqrt{\frac{13}{12}}h$

$\tan\alpha=\frac{OP}{OC}=\frac{h}{2\sqrt{3}h}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

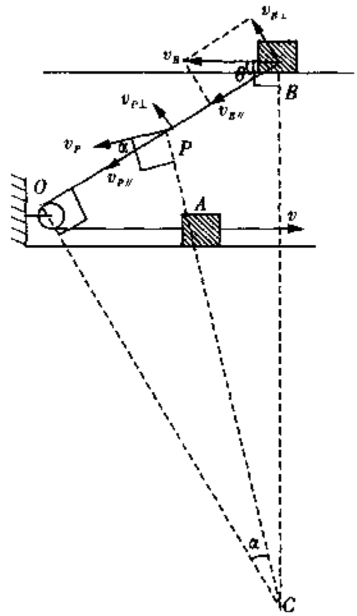


图 1－14

方法与技巧 物体 B 在上轨道的运动可看成沿绳子的运动和垂直于绳子的运动（绕 O 点的运动）. 而"瞬心法"是解题时常用的方法.

例 11 AC、BD 两杆均以角速度 ω 绕 A、B 两固定点在同一竖直平面内转动，$AB=l$，转动方向如图 1－15 所示，当 $t=0$ 时，$\alpha=\beta=60°$，试求 t 时刻交点 M 的速度和加速度.

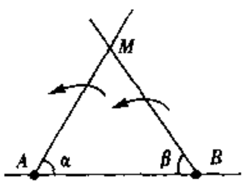


图 1－15

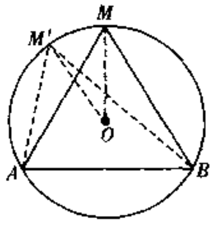


图 1－16

解析 在 $t=0$ 时刻，$\triangle ABM$ 为正三角形，则 $AM=BM=l$，两杆旋转过程中，因转动的角速度相

间,则 α 角增加量等于 β 角的减小量,$\alpha+\beta=120°$ 不变,则顶角 M 大小始终不变,即 $\angle M=60°$,则 M 点的轨迹在正三角形 ABM 外接圆上运动.

则 $\angle MOM'=2\angle MBM'$,则 $\omega_M=2\omega$

M 点作以半径为 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}l$ 的匀速圆周运动

在任意 t 时刻速度为:$v=2\omega R=\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega l$

向心加速度为:$a_n=(2\omega)^2R=\frac{4\sqrt{3}}{3}\omega^2 l$

方法与技巧 由 $\alpha+\beta=120°$ 不变,推知 M 点的轨迹在正三角形 M 外接圆上运动.

【解题尝试】

1. 一个半径为 R 的重圆盘,在缠绕其上的两条不能拉伸的线绳上滚动.线绳两自由端被固定住(如图 1-17).当圆盘运动时,线绳始终是拉紧的.在某一瞬间圆盘的角速度等于 ω,而两线绳之间的夹角为 θ.问:这一瞬间盘中心的速度是多少?

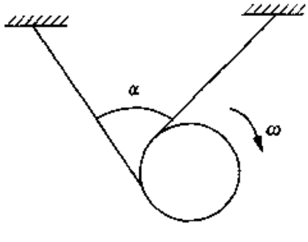


图 1-17

2. 一架飞机沿直线从 A 飞到 B,然后返回.AB 间距离是 L,飞机相对空气的速度为 V 并保持不变.风速稳定.
(1)如果风沿直线 AB 方向刮,计算飞机往返行程的总时间.忽略飞机转弯所需的时间.
(2)如果风垂直直线 AB 方向刮,那么往返行程又需多少时间?
(3)试求出风沿任意方向刮时往返行程所需要的总时间的公式.

3. 线轴沿水平面作没有滑动的滚动,并且线端(A 点)的速度为 v,方向水平.以铰链固定于 B 点的木板靠在线轴上(图 1-18),线轴的内、外半径分别为 r 和 R.试确定木板的角速度和角 α 的关系.

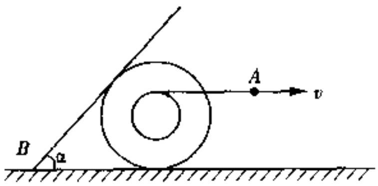


图 1-18

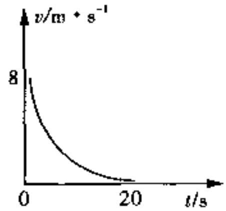


图 1-19

4. 一质点沿直线运动,其速度随时间变化的关系图像恰好是与坐标轴相切的 1/4 圆弧,如图 1-19 所示,则质点在这 20 s 内的位移多大?质点在 10 s 的角速度 a 多大?

5. 在倾角为 α 的足够宽广的斜坡上修有一高为 h 的塔台,在塔台上有一门炮,炮弹出口的初速度为 v_0,试求该炮能控制的山坡的面积.

6. 河岸 MN 为一直线,有一小船自岸边的 A 点沿与岸成 $\alpha=15°$ 角的方向匀速向河中驶去.有一人自 A 点同时出发,他先沿岸走一段再入水中游泳追船.已知人在岸上走的速度为 $V_1=4$ m/s,在水中游泳的速度为 $V_2=2$ m/s.试求船的速度最多为多大,此人才能追上船.