高等学校理工科数学基础

主　编　杜先能　孙国正

副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

高等数学学习辅导与解题指南（上）

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO YU JIETI ZHINAN

安徽大学出版社

高 等 学 校 理 工 科 数 学 基 础

高等数学
学习辅导与解题指南
(上)

主　编　杜先能　孙国正
副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与解题指南· 上/杜先能，孙国正主编. —合肥:安徽大学出版社,2005.7
ISBN 7-81110-031-2

Ⅰ.高... Ⅱ.①杜...②孙... Ⅲ.高等数学一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 065056 号

高等数学学习辅导与解题指南(上)　　　杜先能　孙国正　主　编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编 230039)	印　刷	中国科学技术大学印刷厂
		照　排	合肥述而文化传播有限公司
联系电话	编辑室 0551—5108438	开　本	787×960　1/16
	发行部 0551—5107784	印　张	17.25
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	字　数	308千
责任编辑	鲍家全　徐　建	版　次	2005年7月第1版
封面设计	张　犇	印　次	2005年7月第1次印刷
经　　销	各地新华书店		

ISBN　7-81110-031-2/O·51　　　定　价　25.80元

高等数学教材编审委员会

高等数学教材参编人员

前 言

微积分是理工科最重要的一门基础课。掌握得好坏,不仅有利于相关后续课程的学习,还对工作能力的培养有着至关重要的作用.

学习微积分,一方面要对一些重要的基本概念和基本定理做详细的分析,了解这些概念、定理的思想来源与意义;另一方面就是要通过一定量的习题加以巩固和理解,并且从练习当中提高知识运用能力和掌握各种数学思想方法。许多读者在学习微积分的过程中都会遇到这样的问题:上课都能听懂,拿到题目却无从下手。这个问题,其原因一方面是对基本概念和基本定理的理解不够透彻,对概念的思想、意义和定理、结论的条件理解不够深入;同时缺少对题目类型和方法的总结、归纳,因此拿到题目不会运用所学过的知识点进行分析、解答。本书正是针对这一问题,按照高等数学的教学顺序,分章、同步对微积分的概念、定理、方法分别作详细的讲解与总结.

一 概念剖析

对微积分中的基本概念作进一步诠释,并结合具体的例子,指出理解这些概念需要注意的问题,以及思想由来与意义,帮助读者更深入地理解和掌握这些概念.

二 知识要点

对微积分学中的定理和重要结论做进一步的探讨,着重分析了这些定理与结论所以成立的条件,指出其条件的必要性或充分性以及部分结论的推广,并给出具体例子加以说明。另一方面指出了它们的意义和作用,突出了定理的思想。

三 方法归类与例题选讲

对问题的类型及其解题方法作了较为全面的分析和总结,结合精选的典型例题和历年研究生入学考试(数一、数二)试题进行分析讲解。同时给出各种解法所适用题目的类型和特征。解题过程也做到了步骤详细,指出了其中所运用的知识点,帮助读者能尽快地学会用所学过的知识分析问题和解决问题.

四 数学实验

按照数学建模的思想宗旨,我们安排了这一部分内容,给出了微积分学中部分计算相应的 Matlab 数学软件程序,并加以举例说明。培养读者的数学应用能力与学习兴趣.

五 知识延拓

对微积分学的理论基础与背景作简单介绍,以便读者了解整个微积分理论体系与思想来源,并在附录中给出了相应的应用,让读者不仅知其然,而且知其所以然。从而一方面可以拓展读者的知识面,另一方面可以提高读者的理论水平,加深对知识的理解.

最后我们在附录中介绍了微积分发展简史,让读者了解整个微积分发展的历程和现状,提高读者对学习微积分的兴趣.

本书在编写过程中参考了国内外一些著名的高等数学的教材和辅导用书,谨表示感谢!

本书配合《高等数学(上)》(高等学校理工科数学基础)(安徽大学出版社,2003)使用,可作为高等学校理工专业高等数学的教学参考书,也可作为考研的复习资料.

本书是在安徽大学数学与计算科学学院的领导下由鲍炎红同志执笔撰写。安徽大学数学与计算科学学院的许多教师对本书提出了宝贵的意见与建议。在此,一并表示感谢.

限于编者水平,加之时间仓促,书中错误和疏漏之处在所难免,敬请广大读者指正.

编者

2005 年 3 月

目 录

第1章

函 数

一 概念剖析

1. 集合

集合是数学中无法定义的原始对象. 对于一个集合来说,需要强调的是集合中的元素所具备的"某种特定的性质"一定要明确,也就是说,对于一个集合 S 而言,对任意元素 x,要么 $x\in S$,要么 $x\notin S$,两者必居其一.

例如 "全体很小的实数"就不能构成一个集合,因为究竟什么样的数才算是"很小的数",是一个相对又模糊的概念. 而"全体比 1 小的实数"就可以构成一个集合.

2. 函数

函数本质上就是一个从集合 D 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的一个对应法则 f,即对于定义域 D 中任一自变量 x,通过对应法则 f,存在唯一的 y 与之对应,即存在唯一的变量 y,使得 $y=f(x)$.

注 1 对于函数,并没有要求对于一个变量 y,只有一个自变量与之相对应. 事实上,可以有多个不同的自变量,它们的函数值为同一个 y.

注 2 函数与自变量和变量的符号选取无关,这就是所谓的函数与表示法的无关性.

例如 函数 $y=f(x)$ 也可以写成 $u=f(x)$,$y=f(t)$,…. 只是通常习惯上将 x 作为自变量,y 作为变量. 所以说"f",比"$y=f(x)$"和"$f(x)$"更能体现函数的本质.

注 3 两个函数 $f(x)$,$g(x)$ 相等是指:它们的定义域相同,且对于定义域内任意一点 x,都有 $f(x)=g(x)$.

注 4 设 f 是定义在 D 上的一个函数,D' 是 D 的子集,记作集合

$f(D')=\{f(x)\mid x\in D'\}$. 显然集合 $W=f(D)$ 就是函数的值域.

注 5 几何上,函数可以用平面曲线 C:$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 来表示. 显然由函数的定义可知,平面曲线 C 与直线 $x=x_0$,($x_0\in D$)的交点有且仅有一个.

注 6 一元函数微积分学里,主要是讨论从 x 轴上的点集到 $\boldsymbol{R}$ 的函数,也可以说是从某个区间到 $\boldsymbol{R}$ 的函数. 而在后面所讨论的多元函数微积分学里,将对函数的定义域作进一步的推广,即考虑从 $\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数,用向量(实际上可以看作是有序实数组)来作为自变量. 例如 $f(x,y)=x^2+y$, $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$.

3. 反函数

设函数 f 的定义域为 D,值域为 W,若对 $\forall y\in W$,存在唯一的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,则变量 x 可视为变量 y 的函数,记为 $x=\varphi(y)$,φ 称为函数 f 的反函数. 习惯上,把函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$(注意:此处已经根据函数表示法的无关性,将 $x=\varphi(y)$ 中的符号 x,y 对调了,从而符合一般函数中符号习惯). 但对于对应法则,有 $\varphi=f^{-1}$.

注 1 原函数的定义域 D 成为反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域,值域 W 则成为反函数的定义域.

注 2 函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是关于直线 $y=x$ 对称的. 但同一直角坐标系中,$x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象是同一条曲线.

注 3 由反函数的定义,函数 $f(x)$ 有反函数的充分必要条件是:

对于任意 $x_1,x_2\in D$,若 $x_1\neq x_2$,恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. (*)

例如 严格单调函数满足(*),所以严格单调函数一定有反函数.

但是 $f(x)$ 若不满足(*),可以通过缩小 $f(x)$ 的定义域,以便可以得到相应的反函数.

例如 函数 $y=x^2$,在整个定义域 $\boldsymbol{R}$ 上没有反函数,但在 $[0,+\infty)$ 上就有反函数 $y=\sqrt{x}$.

4. 隐函数

若对于任意 $x\in D$,存在唯一的 $y\in W$,使得二元方程 $F(x,y)=0$ 成立,则由方程 $F(x,y)=0$ 确定一个由 D 到 W 的函数 $y=f(x)$,$x\in D$,$y\in W$,称为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数,即 $F(x,f(x))=0$,$x\in D$ 恒成立.

例如 由二元方程 $x^2+y^3=1$ 可以确定函数 $y=\sqrt[3]{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,1]$. 但是，显然并不是所有的二元方程都能确定一个函数的. 例如：$x^2+y^2=1$，因为对 $x=0$，有 $y=1$ 或者 $y=-1$. 但可以通过限制它的取值范围 $W_1\subset W$，满足对于任意 $x\in D$，存在唯一的 $y\in W_1$，使得二元方程 $F(x,y)=0$ 成立. 从而来确定隐函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W_1$. 例如，限制 $y\in[0,1]$，就有函数 $y=\sqrt{1-x^2}$.

显然，反函数是一种特殊的隐函数.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域为 W_g，若 $D_f\cap W_g\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(g(x))$ 为 x 的复合函数，其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为变量，$f(u)$ 称为外层函数，$g(x)$ 称为内层函数.

还可以对两个以上的函数进行复合，例如 $y=\sin(\ln x^2)$，$x\neq0$，就是对 $y=\sin u$，$u=\ln w$，$w=x^2$ 的复合，其中 u，w 都是中间变量. 读者须对多层复合函数的复合层次有清晰的认识，这一点对于以后研究复合函数的性质有至关重要的作用.

复合过程当中，要注意各层函数的定义域和值域与复合前的变化，尤其是对分段函数的复合.

6. 邻域

各种邻域都是针对某个特定的点来说的，点 x_0 的邻域本质上就是含点 x_0 的一个开区间. x_0 的 δ－邻域：$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}$，其中 $\delta>0$ 为任意给定的一常数.

x_0 的去心邻域：$U^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$，为以后讨论方便起见，补充定义：

x_0 的右邻域：$U_+(x_0,\delta)=[x_0,x_0+\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0\leqslant x<x_0+\delta\}$；

x_0 的右去心邻域 $U_+^0(x_0,x_0+\delta)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0<x<x_0+\delta\}$；

x_0 的左邻域 $U_-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0-\delta<x\leqslant x_0\}$；

x_0 的左去心邻域 $U_-^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x_0-\delta<x<x_0\}$；

$+\infty$ 的开邻域：$U(+\infty)=U(+\infty,M)=(M,+\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x>M\}$；

$-\infty$ 的开邻域：$U(-\infty)=U(-\infty,M)=(-\infty,-M)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x<-M\}$；

∞ 的开邻域：$U(\infty)=U(\infty,M)=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)=$

$\{x\in\mathbf{R}\mid x>M$ 或 $x<-M\}$,其中 M 为任意给定的一常数.

邻域的概念为以后讨论函数在某点的极限,以及各种分析性质提供了很大的方便. 邻域半径 $\delta>0$ 可以为任意实数,但通常将 $\delta>0$ 取得非常小,用来刻划在邻域中心 x_0 点的局部性质. 这里函数 $f(x)$ 在点的 x_0 某个邻域内满足性质 P 是指存在 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 对 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的任一点满足性质 P.

7. 基本初等函数与初等函数

将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为基本初等函数.

初等函数,就可以看成是一些基本初等函数的复合. 显然,初等函数在其各自的定义域内,具有很多良好的性质. 例如:正弦,余弦函数具有有界性,奇偶性,周期性等. 幂函数具有奇偶性,单调性等. 即使以后考虑函数的分析性质时,初等函数在其定义域或定义区间内也都是满足的. 读者务必将五种基本初等函数的定义域,值域,有界性,单调性(单调区间),奇偶性,周期性做详细的分析并牢牢记住.

注 一般来说,分段函数在各段上是不同的基本初等函数的复合,因此不是初等函数. 但这不是绝对的,分段函数也有可能是初等函数. 例如:$|x|=\sqrt{x^2}$ 就是初等函数.

二 知识要点

1. 有界性

函数 $f(x)$ 在 I 内有界是指:存在 $M>0$,使得对于 I 内任意一点 x,恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

函数的有界性是刻画一个函数在一个区间内的取值范围. 有界性还有另外一种定义,即若对于函数 $y=f(x)$,$x\in I$,存在实数 α,β,使得对于任意 $x\in I$,总有 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为有界函数,其中 α 称为下界,β 称为上界.

容易看出,两种定义是等价的. 图像上,都是用两条平行于轴的直线将函数 $y=f(x)$ 的图像"套住".

有界与无界的数学描述

函数在区间 I 内有界:即 $\exists M>0$,对 $\forall x\in I$,均有 $|f(x)|<M$;

函数在区间 I 内无界:即对 $\forall M>0$,$\exists\ x_M\in I$,使得 $|f(x_M)|>M$.

例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内

无界.

注 符号“$\forall$”表示“任意的”,“$\exists$”表示“存在”.

2. 奇偶性

(1)奇函数等价于 $f(x)+f(-x)=0$;偶函数等价于 $f(x)-f(-x)=0$.

这种等价性在判断函数的奇偶性时往往非常有效.

(2)奇(偶)函数要求定义域是关于原点对称.定义域若不是关于原点对称的,则根本不谈其奇偶性.

(3)奇偶函数的运算性质:

(i)奇函数+奇函数=奇函数;偶函数+偶函数=偶函数.

(ii)奇函数×奇函数=偶函数;偶函数×偶函数=偶函数;奇函数×偶函数=奇函数.

(4)任何一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 都可以写成一个奇函数和一个偶函数的和,即 $f(x)=F(x)+G(x)$,其中 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数,$G(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数.

3. 单调性

函数 $f(x)$ 在区间 I 为单调递增(减)函数是指:对于 $\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\leqslant(\geqslant)f(x_2)$.若其中的不等号为严格不等号“$<(>)$”时,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内严格单调递增(减).区分单调和严格单调对于分析函数的性质是有意义的.

注 1 函数的单调性是针对某个特定区间来说的,很多函数在整个定义域内并不是单调的,但是在一定的区间内具有单调性,例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别是单调递减的,但是不能说在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上单调.

注 2 单调函数的运算性质:

(1)若函数 $f(x)$ 为单调递增(减)函数,则 $f(-x)$,$-f(x)$ 均为单调递减(增)函数,$-f(-x)$ 为单调递增(减)函数;

(2)若函数 $f(x)$,$g(x)$ 为单调递增(减)函数,则 $f(x)+g(x)$ 单调递增(减)函数,但 $f(x)-g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$ 则不一定.如 $f(x)=x^3$,$g(x)=x$ 均为单调递增函数,但 $f(x)-g(x)=x^3-x$,$f(x)\cdot g(x)=x^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都不是单调函数.

4. **周期性**

函数 $f(x)$以 T(T 为常数,且 $T\neq0$)为周期是指:对于任意的 x,都有 $f(x+T)=f(x)$.

注 1 若函数 $f(x)$的周期为 T(通常我们所指的周期都是最小正周期),由数学归纳法已知,有 $f(x)=f(x+nT)$,其中 n 为任意整数.

注 2 (1)若函数 $f(x)$的周期为 T,则函数 $y=f(ax+b)$的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$;

(2)若函数 $f(x)$,$g(x)$的周期均为 T,则 $f(x)\pm g(x)$的周期也为 T;

(3)若函数 $f(x)$,$g(x)$的周期分别为 T_1,T_2,且 T_1,T_2 的最小公倍数存在,则 $f(x)\cdot g(x)$以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期.

注 3 存在无最小正周期的非常值函数.

例如 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$,因为有理数与有理数之和仍为有理数,无理数与有理数之和为无理数,所以任意有理数都是 $D(x)$的周期,显然 $D(x)$无最小正周期.

三 方法归类与例题选讲

1. 函数定义域的求法

熟记各类基本初等函数的定义域是求复杂函数定义域的基础,求复杂函数的定义域实际上就是求由简单函数定义域所构成的不等式组的解集.

例如 函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$ 与 $u=g(x)$,$x\in D_2$ 的复合函数 $y=f(g(x))$的定义域为 $D_2\cap\{x|g(x)\in D_1\}$.

例 1 求函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$的定义域.

解 $$\begin{cases}x>0\\\sin\sqrt{x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\2k\pi<\sqrt{x}<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$
$$\Rightarrow(2k\pi)^2<x<(2k\pi+\pi)^2, k\in\mathbf{Z},$$

故函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$的定义域为$((2k\pi)^2,(2k\pi+\pi)^2)$,$k\in\mathbf{Z}$.

例 2 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, -1\leqslant x<0\\-1, 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$,求下列函数的定义域

(1)$f(x+2)$; (2)$f(3x)$.

解 (1)$f(x+2)=\begin{cases}1,-1\leqslant x+2<0\\-1,0\leqslant x+2\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1,-3\leqslant x<-2\\-1,-2\leqslant x\leqslant -1\end{cases}$,故函数 $f(x+2)$的定义域为$[-3,-1]$.

(2)$f(3x)=\begin{cases}1,-1\leqslant 3x<0\\-1,0\leqslant 3x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1,-\dfrac{1}{3}\leqslant x<0\\-1,0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}\end{cases}$,故函数 $f(3x)$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$.

2. **反函数的求法**

求函数 $y=f(x)$的反函数,即 $y=f(x)$中反解出 $x=g(y)$,再用 x 替换 y,y 替换 x,以符合通常的习惯. 此外,要注意求分段函数的反函数时,相应定义域和值域的确定.

例 3 (数二,1996)

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2,x<-1\\x^3,-1\leqslant x\leqslant 2\\12x-16,x>2\end{cases}$,写出 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

解 设 $y=f(x)$

(1)当 $x<-1$ 时,$y=1-2x^2$,$y<-1$,$x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$,

此时 $f(x)$的反函数 $g(x)=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$,$x<-1$;

(2)当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,$-1\leqslant y\leqslant 8$,$x=\sqrt[3]{y}$,

此时 $f(x)$的反函数 $g(x)=\sqrt[3]{x}$,$-1\leqslant x\leqslant 8$;

(3)当 $x>2$ 时,$y=12x-16$,$y>8$,$x=\dfrac{1}{12}(y+16)$.

综上所述,知 $g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}},x<-1\\\sqrt[3]{x},-1\leqslant x\leqslant 8\\\dfrac{1}{12}(x+16),x>8\end{cases}$.

3. **函数的复合运算及其应用**

“复合”是函数的基本运算,尤其是多个分段函数的复合,是个难点. 解题时,应注意

(1)复合层次. 先内层后外层的自然顺序,逐次进行迭代.

(2)各层函数的定义域. 分段函数中自变量取值范围不同,函数的表达式也不同. 常见的题型有:

3.1 已知 $f(x)$,$g(x)$求 $f(g(x))$.

这类问题相对比较简单,但特别要注意的是分段函数的复合,以及复合后可能对 $g(x)$定义域有所限制.

例 4 (数二,2001)

设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$,求 $f\{f[f(x)]\}$.

解 先求 $f[f(x)]$,

$f[f(x)]=\begin{cases}1,|f(x)|\leqslant 1\\0,|f(x)|>1\end{cases}$,而 $|f(x)|\leqslant 1$,对 $\forall x\in\boldsymbol{R}$,所以 $f[f(x)]=1$,进而 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$,$\forall x\in\boldsymbol{R}$.

例 5 (数二,1997)

设 $g(x)=\begin{cases}2-x,x\leqslant 0\\x+2,x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2,x<0\\-x,x\geqslant 0\end{cases}$,求 $g[f(x)]$.

解 由题设可知,$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x),f(x)\leqslant 0\\f(x)+2,f(x)>0\end{cases}$.

(1)当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$,故 $g[f(x)]=x^2+2$;

(2)当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$,故 $g[f(x)]=2-(-x)=2+x$.

综上所述,知 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2,x<0\\2+x,x\geqslant 0\end{cases}$.

3.2 设 $f(g(x))=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$是已知函数,一般有两类问题:一是已知 $f(x)$,求 $g(x)$;二是已知 $g(x)$,求 $f(x)$.

若 $f(x)$已知,并存在反函数,则 $g(x)=f^{-1}(\varphi(x))$.

若 $g(x)$已知,并存在反函数,则 $u=g(x)$,则 $x=g^{-1}(u)$,代入 $f(g(x))=\varphi(x)$得 $f(u)=\varphi(g^{-1}(u))$,最后用 x 替换 u.

例 6 (数二,1995)

设函数 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$且 $f[\varphi(x)]=\ln x$,求 $\varphi(x)$.

解 令 $x^2-1=t$,则 $x^2=t+1$.

所以 $f(t)=\ln\dfrac{t+1}{(t+1)-2}=\ln\dfrac{t+1}{t-1}$,即:$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$,所以

$f[\varphi(x)]=\ln\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$.

进而$\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$,

解得：$\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

例 7 （数二，2000）

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求 $f(x)$.

解 令 $\ln x=u$，则 $x=e^u$，代入原方程，得 $f(u)=\dfrac{\ln(1+e^u)}{e^u}$，即得：$f(x)=\dfrac{\ln(1+e^x).}{e^x}$.

例 8 （数一，1988）

设函数 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 可知，

$$f(\varphi(x))=e^{[\varphi(x)]^2}=1-x,$$

即：$[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$.

又因为，$\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，

此时要求 $\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$，解得 $x\leqslant 0$.

故函数 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为 $(-\infty,0]$.

4. 简单函数方程的求法

例 9 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0,1$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\dfrac{x-1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{1-t}$，代入原方程，得：

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},$$

即 $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f(x)=\dfrac{2}{1-x}$. (1)

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$，则 $x=\dfrac{1}{1-u}$，代入(1)式得，

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2}{1-\frac{1}{1-u}}=\frac{2(u-1)}{u},$$

即 $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2(x-1)}{x}$. (2)

将(1)、(2)两式与原方程联立，得