竞赛热点
专题丛书

初中数学

竞赛热点专题

编著 李再湘 卞新荣 叶 军

◆鲜明、准确的读者定位
◆精练、适中的内容打造
◆抢手、耀眼的作者队伍
◆理性、人性化的版式设计

湖南师范大学出版社

竞赛热点
专题丛书

初中数学
竞赛热点专题

编著 李再湘
卞新荣
叶 军

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛热点专题/李再湘等编著.—长沙：湖南师范大学出版社，2001.6

（竞赛热点专题丛书）

ISBN 7—81081—059—6/G·024

Ⅰ.初… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课－初中－数学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 030217 号

初中数学竞赛热点专题

编　　著：李再湘　卞新荣　叶　军
全程策划：陈宏平
组稿编辑：陈宏平
责任编辑：廖小刚
责任校对：刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
730×988　16 开　24 印张　442 千字
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—8200 册
ISBN7—81081—059—6/G·024
定价：25.00 元

策划者寄语

“熊掌”和“鱼”可兼得

“竞赛”“高考”能兼顾

拼搏竞赛的经典　挑战高考的利刃

1. **鲜明、准确的读者定位**：本套书克服了目前市场上竞赛用书只针对部分参加竞赛的学生即所谓“精英”的缺陷，把关怀对象扩大到了立志参加竞赛者和挑战高考的所有中学生.

2. **精练、适中的内容打造**：全套书选取了世界各地及国内的经典赛题和最新的赛题或选拔题.难度系数控制在“高考提高题”和“竞赛基础题”的范围，使学生在备考时，“高考”和“竞赛”训练相得益彰.

3. **抢手、耀眼的作者队伍**：本套书的主要作者来自全国著名、国际知名的湖南师大理学院、湖南师大附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学.主要作者均是奥林匹克高级教研员，他们所培训的学生在历次的国际或国内数、理、化奥林匹克竞赛中已经为我国夺取了

几十枚金牌、银牌，取得了骄人的战绩.

4. **理性、人性化的版式设计**：本套书采用16开异型本符合国际潮流，版式中为读者留下足够的空白，以便读者及时地记录学习心得和重点摘要，不用另纸夹记. 用5号字体而不用6号字体，可减轻中学生阅读时眼睛的疲劳，体现了出版人文精神的现实关怀.

挑战"高考"的同学们在理解教材的基础上阅读此书，她将为深化你的知识，增强你的技能，活跃你的思维，实现你的梦想而体现价值.

拼搏"竞赛"的同学们在阅读此套书的基础上，继续阅读我社已经出版的《奥林匹克教程》丛书，她必将为你的梦想插上翅膀.

一箭双雕的"竞赛专题"　过河搭桥的"竞赛专题"
题名金榜的"竞赛专题"　提升技能的"竞赛专题"

《初中数学竞赛热点专题》
《初中物理竞赛热点专题》
《初中化学竞赛热点专题》
《高中数学竞赛热点专题》
《高中物理竞赛热点专题》
《高中化学竞赛热点专题》

前言

国际奥林匹克数学、物理、化学、计算机和生物竞赛是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动.这项活动为全世界广大的中学生充分展示自己的聪明才智提供了合适的舞台,因而,受到越来越多的国家的重视,备受广大学生的欢迎.近20年来,我国中学生在这项活动中取得了优异成绩,获得奖牌270余枚,震惊中外,令世人瞩目.为了开阔中学生视野、启迪思维、发展才智,进一步推动中学生学科奥林匹克活动的普遍开展,促进优秀人才的快速发展,全面推行素质教育,为实现科教兴国的战略决策做好准备,造就新时代的优秀拔尖人才,我们特编写了这套竞赛热点专题丛书.

本书为《初中数学竞赛热点专题》,它以初中数学竞赛大纲为依据编写,体现因人施教的教育特色.它既可以作为各类初中学生数学课外活动的教材,同时也可以作为初中毕业生报考湖南省理科实验班的参考读物.选材力求兼顾基础知识的巩固和能力的提高,使初中生备考

和竞赛两不误.本书的编著者都是从事过湖南省理科班教学的教练员,既了解奥林匹克数学竞赛的特点,同时又深谙省理科实验班的办学特色和培养目标.所以,无论是内容的选择和组织,知识的广度和深度都把握得十分恰当.全书内容翔实、实用性强,不愧为一本中学生课外活动的好教材.

本书由李再湘、卞新荣、叶军同志编著,嘉影统稿.第六、七专题由李再湘编写;第三、四、五专题由卞新荣编写;第一、二、八专题由叶军编写.全书以竞赛热点专题为主线,选题精到,解题方法巧妙,注重解题思路的自然流畅,对解题难点加注了分析,并推出了一些赛题的新解和优解,每个专题之后配备了适量的“跟踪训练题”,并提供了简答与提示,以便学生自测与检阅.

本书的出版首先应该感谢湖南师范大学出版社的领导和编辑们,尤其是总策划陈宏平先生.志勇、玉雯和宁湘同志对全书习题进行了验算.在此,对所有关心和支持过该书出版的同志一并表示衷心的感谢.由于水平所限,加之时间仓促,书中疏漏之处在所难免,敬望广大同仁和读者批评指教.

编　者

2001年5月28日

目录

第一专题　解题思路漫谈

第一讲　从问题的简单情形入手

习惯于解常规数学问题的学生猛然接触数学竞赛题总有一种陌生感，茫然不知所措．这是为什么呢？因为竞赛题一般不受课本上题型的限制．有志于参加数学竞赛的学生在学好课本知识的基础上，还必须学会在不拘一格的全新数学竞赛试题面前，自己去探寻问题所涉及的各种数量关系和空间形式，摸索其中深藏着的规律性，发现解决问题的思路与方法．从问题的简单情形入手，正是当你一筹莫展之时，设法进行探寻、摸索，最终发现解决问题途径的一种入手方法．

从问题的简单情形入手包括复杂问题简单化、抽象问题具体化、一般问题特殊化三个方面．在本章里，我们将通过例子对此进行简要说明．

§1.1　复杂问题简单化

当我们遇到一个数学问题比较复杂，一时理不清它的头绪时，不妨先想一想，有没有一个与此类似的较为简单的问题？如果有，那么我们就可以先去做较为简单的问题．这样做，不仅不会贻误时间，而且恰恰相反，磨刀不误砍柴工！

例 1　用 2,3,4,5,6,7,8,9 这 8 个数字组成两个四位数(每个数字都必须用上)，使它们的积最大．

解　我们不妨先考虑一个较为简单的问题：用 6,7,8,9 这 4 个数字组成两个两位数(每个数字都必须用上)，使它们的积最大．

对此简单情形，我们做起来就顺手多了．首先，十位数字应分别是 9,

学习心得

8,于是,只需比较 96×87 和 97×86 哪一个大就可以了.(比较结果:96×87 更大些.因此,应组成 96 和 87 这样两个两位数.)

(现在,我们再回到原来的问题.显然,上面的简单问题的解答事实上已经告诉我们,原问题所求的两个 4 位数的前面两位数字分别是 96 和 87.要确定十位数字,只需将 964×875 与 965×874 进行比较.因为 964×875>965×874,所以两个 4 位数的前三位数字分别是 964 和 875.最后,再比较 9643×8752 和 9642×8753.因为 9642×8753>9643×8752,所以,所求的两个四位数是 9642 和 8753.这就是原问题的解答.)

回顾上述解题过程,可以发现:从较简单问题中得到的解题经验、思路和方法,对于解原问题是何等的宝贵和重要.因此,从简单问题入手,将复杂问题简单化,可以为最终解决复杂问题提供重要的经验.

应该看到,不同思维水平的学生从简单问题的解答中受到的启示是不完全相同的.一个乐于思考、善于思考的学生往往表现出较高的思维水平,他能够在同样的结果面前,得到更为深刻的启示.例如,在上述简单问题的解答中,要用到不等式 96×87>97×86.受此启示,有的学生就会去探寻这种不等关系所体现的规律性.因为 96+87=97+86,96-87<97-86,所以自然会想到,是否和为定值的两数,其差越小,则其积越大呢?回答是肯定的.

事实上,如果设两数为 x 和 y,$x+y=k$ 定值,再设 $x-y=d$,那么由 $xy=\frac{1}{4}(k^2-d^2)$ 可知,d 越小,则 xy 越大.我们从简单问题中得到的这类具有普遍意义的理论启示,显然可以使我们避开索然无味的乘法运算,轻而易举地得出原问题的解答了(这一点留给读者去尝试).

例 2 已知方程组

$$\begin{cases} x_1x_2\cdots x_{2000}=1, & (1)\\ x_1-x_2x_3\cdots x_{2000}=1, & (2)\\ x_1x_2-x_3x_4\cdots x_{2000}=1, & (3)\\ \quad\vdots & \vdots\\ x_1x_2\cdots x_{1999}-x_{2000}=1. & (2000)\end{cases}$$

求 x_{1989} 的值.

分析 我们看到,这个方程组共有 2000 个未知数,2000 个方程,并且还是一个高次方程.初次接触这种方程组,自然会感到难于下手.

再认真察看一下方程组的特点,不难发现,每个方程的右端都是 1,而每个方程的左端都有 $x_1,x_2,\cdots,x_{2000}$,并且从第二个方程开始,都有一个"-"号,第 i 个方程的"-"号恰在 x_{i-1} 与 x_i 之间.

于是,我们在保持方程组原有特点的前提下,来一个复杂问题简单化,

学习心得

先来考察一个只有 3 个未知数，3 个方程的方程组

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=1, & (1') \\ x_1-x_2x_3=1, & (2') \\ x_1x_2-x_3=1. & (3') \end{cases}$$

要解这个简化了的方程组已经没有多大的困难了．事实上，由(1′)得 $x_2x_3=\frac{1}{x_1}$，代入(2′)得 $x_1-\frac{1}{x_1}=1$，由此即可解得 x_1；再由(1′)得 $x_3=\frac{1}{x_1x_2}$，代入(3′)得 $x_1x_2-\frac{1}{x_1x_2}=1$，由此即可解得 x_1x_2，从而也可解得 x_2；最后由(1′)得 $x_1x_2=\frac{1}{x_3}$，代入(3′)得 $\frac{1}{x_3}-x_3=1$，由此即可解得 x_3．

摸清了简化了的方程组的解法思路之后，再来考察原方程组．此时，你的感觉就和初次接触原方程组时大不相同了吧．就好像老师刚给你讲了一道例题，现在让你来做一道类型相同的习题一样，只是习题看上去比例题复杂一些．因此我们建议读者自己通过两个方程组的对比，将原方程组的解法找出来，然后再继续往下读．

解　由(1)知 $x_1x_2\cdots x_{1998}\neq 0$，用 $x_1x_2\cdots x_{1988}$ 分别乘方程(1989)的两边，并利用(1)得

$$(x_1x_2\cdots x_{1988})^2-1=x_1x_2\cdots x_{1988}$$

$$\therefore\quad x_1x_2\cdots x_{1988}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

同理，用 $x_1x_2\cdots x_{1989}$ 分别乘方程(1990)两边，并利用(1)得

$$(x_1x_2\cdots x_{1989})^2-1=x_1x_2\cdots x_{1989}$$

$$\therefore\quad x_1x_2\cdots x_{1989}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

于是，x_{1989} 的值是

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\div\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=1$$

或 $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\div\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

或 $$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\div\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

即所求 x_{1989} 的值是 1，或 $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$．

细心的读者将会发现，上述解法与简化了的方程组的解法在叙述的格局上有所不同．你能弄清这两种叙述的格局在本质上的共同点吗？你能明白现在的叙述格局正是从原来的启发演变而来的吗？你能懂得采用新格局来叙述的用意吗？

学习心得

§1.2　抽象问题具体化

当我们遇到一个抽象的数学问题时，如果一时拿不出解题良策，那么不妨将其中的抽象的量具体化，考察几个与此相应的具体问题，与复杂问题简单化一样，抽象问题具体化将为最终解决抽象问题带来许多有益的启示．

例3　求 $1,2,3,\cdots,10^n-1$ 中所有数字的和．

分析　由于题目要求所有数字之和，而不是求所有数之和，因此，没有现成的方法可以遵循，一时感到棘手．于是，我们把表示任意自然数的抽象字母 n 具体化，先来考察 $n=1,n=2$ 的情形．

当 $n=1$ 时，即求 $1,2,3,\cdots,9$ 中所有数字之和，显然是十分容易的．

当 $n=2$ 时，即求 $1,2,3,\cdots,99$ 中所有数字之和．如果我们按照先后顺序，将其中的数字一个一个地加起来，自然可以求出所有数字之和．但是，这种算法显然不能用来解决原问题．如果我们用等差数列求和的方法，先将与首尾等距离的项对应加起来：$1+99=100,2+98=100,\cdots$，那么由于1和99的数字之和为19，而100的数字之和是1，因此势必失去加数的数字和与和的数字和之间的联系，使我们欲求所有加数的数字和的目标无法达到．现在我们必须寻找一种新的算法，它既能在 $n=2$ 的情形奏效，又能推广到原问题中去．吸取失败的经验教训之后，我们不难发现：使得和为99的配对相加方法，能保持加数的数字和等于和的数字和(读者试看自己来证明这一结论)．这一发现使我们得到了 $n=2$ 时的一种巧妙算法．

设 $S(a,b,c,\cdots)$ 表示 $a,b,c,\cdots$ 中所有数字的和．于是

$$\begin{aligned}&S(1,2,\cdots,99)\\&=S(99,1+98,2+97,3+96,\cdots,49+50)\\&=S(\underbrace{99,99,\cdots,99}_{50个})\\&=50\cdot S(99)\\&=50\cdot2\cdot9=900.\end{aligned}$$

将这一算法推广，就可以得到下面的关于原问题的解．

解

$$\begin{aligned}&S(1,2,3,\cdots,10^n-1)\\&=S(\underbrace{10^n-1,10^n-1,\cdots,10^n-1}_{\frac{1}{2}\times10^n个})\\&=9n\cdot\frac{1}{2}\times10^n\\&=\frac{9}{2}n\cdot10^n.\end{aligned}$$

学习心得

上面的例子说明，运用从简单的情形入手的方法去考察简单的、具体的

问题,并不是我们的题终目的．而简单的、具体的问题的解法也并不都能推广为复杂的、抽象的问题的解法．我们的目的仍然是要解决复杂的、抽象的问题,因此在考察简单的、具体的问题时,必须寻找能够进一步推广以便最终解决原问题的解法思想．

§1.3 一般问题特殊化

当我们遇到一个一般的数学问题,一时又摸不透时,那么我们应留意问题中具有一般状态的量的某些特殊状态,看一看在特殊状态下,问题呈现什么性质和规律;也可以将一般状态分解成几种特殊情形,逐一地将它们解决.这种一般问题特殊化的方法,也使原问题变得简单,变得易于入手,并且为最终发现一般问题的规律,从而为解决一般问题铺平了道路．

例4 单位正方形周界上任意两点之间连一曲线．如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分,试证这个曲线段的长度不小于1.

证 由于曲线的两个端点(不妨设为 P,Q)在正方形周界上位置的任意性,因此证明难以直接下手．此时,我们将这个一般问题按 P、Q 的相关位置先分解成三个特殊问题(如图1-1-1):

(1)P、Q 分别在一对对边上;

(2)P、Q 在同一边上;

(3)P、Q 分别在一对邻边上．

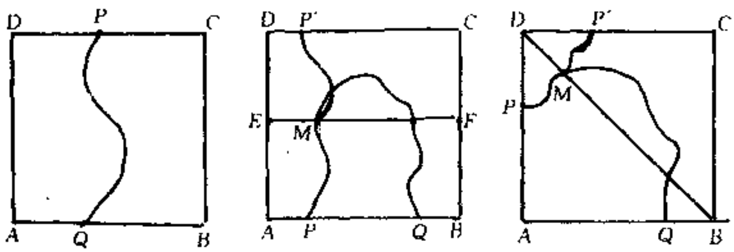

图1-1-1

然后在这三个特殊问题中,选择一个最容易解决的问题,先把它的解答做出来(依然是从简单入手).显然,情况(1)容易解出:因为在两平行线间以公共垂线的长度为最短,所以曲线 PQ 的长度不小于1.

首战告捷之后,我们转向情况(2).情况(2)与情况(1)的区别在于 P 点的位置,如能将情况(2)中 P 点的位置移到 CD 边上,而使曲线长度不变,则情况(2)就转化为情况(1),问题就得到解决．事实上,利用正方形的对称性,上述设想是可以实现的．作正方形的对称轴 EF,且使 $EF \parallel AB$,则 EF 与曲线 PQ 必有交点(否则正方形被曲线 PQ 分成的两部分面积不相等),

学习心得

不妨设其中的一个交点为 M. 作曲线 PM 关于对称轴 EF 的轴对称曲线 $P'M$,则 P'在 CD 上,且曲线 $P'M$ 的长等于曲线 PM 的长 . 由(1)知,曲线 $P'MQ$ 的长不小于 1,因此曲线 PMQ 的长也不小于 1. 至此情况(2)得证 .

情况(3)同样可以利用对称转化为情况(1).我们把它留给读者去思考.

证明请读者自行完成 .

上例的解题过程始终贯穿着从问题的简单情形入手的思想,将一般问题分解成几个特殊问题,是因为每个特殊问题的解决要比原问题简单一些,同时对这几个特殊问题,我们也不同等看待,而是区别难易,先从其中最简单的一个问题入手,待我们积累了足够的经验之后,难题在我们面前也就变得容易了 .

尽管从问题的简单情形入手只是解数学竞赛题时多种方法中的一种,并非万能,然而这种方法由于符合人们从简单到复杂,从具体到抽象,从特殊到一般的认识规律,因此在数学竞赛中常能显示它神奇的效果 .

* * * * * *

习题 1-1-1

1. 证明:数$\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{55\cdots5}_{n-1个}6$是完全平方数,其中 $n\geqslant2$.

2. 解方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3+x_4=0, \\ \cdots\cdots \\ x_{98}+x_{99}+x_{100}=0, \\ x_{99}+x_{100}+x_1=0, \\ x_{100}+x_1+x_2=0. \end{cases}$$

3. 证明:任何面积为 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+\sqrt{8}$.

4. 设 A 为定圆外一定点,P 为定圆上一定点,由 A 向定圆引任一割线交定圆于 B、C,又设 M、N 分别是 PB、PC 的中点,试证:

(1)直线 MN 恒通过定点 Q;

(2)$QM\cdot QN$ 为定值 .

5. 把 1600 颗花生分给 100 只猴子,证明:不管怎样分,至少有 4 只猴子得到的花生一样多 . 并设计一种方法,使得没有 5 只猴子得到一样多的花生 .

习题答案与提示

1. 提示:当 $n=2$ 时,$1156=34^2$;$n=3$ 时,$111556=334^2$. 从而猜测$\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{55\cdots5}_{n-1个}6=$

学习心得