广东省1979年高考复习资料

数学

下册

广州市中小学教材编写组　主编

目　　录

第四部分　三　角

第五部分　解析几何

第六部分　参 考 题

附　　录

第四部份　三　角

I　三角函数的定义及其基本性质

一、三角函数的定义

1．角的量度

任何一个角AOB可以看作由边OB从OA的位置开始，绕着顶点O旋转而生成的，OA叫做始边，OB叫做终边，O点叫做顶点.

为了方便，常把顶点O放在原点处，把始边放在X轴的正向上，根据终边落在那一个象限，就把这个角叫做那一个象限的角。当终边落在坐标轴上，这个角就不属于哪一个象限.

按照习惯，OB按逆时针方向绕O点旋转所形成的角为正角，反之为负角.

角（弧）的量度一般采用角度制和弧度制：

角度制——圆周的360份之一的弧所对的圆心角叫做1°的角，这段弧也叫做1°的弧；

弧度制——长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角，这段弧也叫做1弧度的弧.

角度制与弧度制的换算公式：

$$\pi = 180^\circ,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453(\text{弧度}),$$

$$1(\text{弧度}) = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

与 α 终边相同的角的全体可写成：

$$k\cdot 360^{\circ}+\alpha \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots),$$

$$\text{或}\quad 2k\pi+\alpha \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots).$$

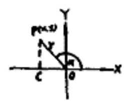
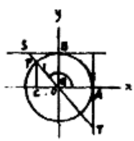
半径(R)、弧长(l)、圆心角(α)之间的关系：

$$\alpha=\frac{l}{R} \quad \text{或} \quad l=\alpha R.\ (\alpha\text{的单位是弧度})。$$

半径(R)、线速度(v)、角速度(ω)之间的关系：

$$w=\frac{v}{R} \quad \text{或} \quad v=\omega R.$$

2.三角函数的定义

函数	正弦	余弦	正切	余切	正割	余割	图形
符号	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$	
三角比	$\frac{对边}{斜边}$	$\frac{邻边}{斜边}$	$\frac{对边}{邻边}$	$\frac{邻边}{对边}$	$\frac{斜边}{邻边}$	$\frac{斜边}{对边}$	
坐标法	$\frac{y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{r}{y}$	
函数线	CP	OC	AT	BS	OT	OS	

注：有向线段 CP、OC、AT、BS、OT、OS 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线，CP、AT 与 y 轴同向为正，OC、BS 与 x 轴同向为正，OT、OS 与 OP 同向为正。

3．例题

例1．下面各角分别是第几象限的角：

$2375°$，$-4328°$，$3754°23'$。

解：$\because\quad 2375°=6\times 360°+215°$，

$\therefore\quad 2375°$是第三象限的角；

$\because\quad -4328°=-13\times 360°+352°$，

$\therefore\quad -4328°$是第四象限的角；

$\therefore\quad 3754°23'=10\times 360°+154°23'$，

$\therefore\quad 3754°23'$是第二象限的角。

例2．用弧度制分别写出终边在X轴正、反方向和在Y轴正、反方向上的所有角。

解：　终边在X轴正方向的所有角为

$$2k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots),$$

终边在X轴反方向的所有角为

$$(2k+1)\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots),$$

终边在Y轴正方向的所有角为

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{即}\ \frac{4k+1}{2}\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots),$$

终边在Y轴反方向的所有角为

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\ \text{即}\ \frac{4k-1}{2}\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots).$$

例3．用不等式表示下面各角的变化范围：

（1）α在第一象限内变化；

（2）β在第三象限内变化。

解：（1）$k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots)$；

（2）$k\cdot 360°+180°<\beta<k\cdot 360°+270°$

或　　$(2k+1)\cdot 180°<\beta<(2k+1)\cdot 180°+90°$

$(k=0\quad \pm 1,\ \pm 2\cdots\cdots)$。

例4．设飞轮的半径为1.2米，每分钟旋转300周，（1）试求飞轮每秒的角速度ω；（2）试求轮周上一点的线速度v。

解：（1）因为飞轮每分钟旋转300周，所以

$$飞轮的角速度\ \omega=\frac{2\pi\times 300}{60}=10\pi(弧度/秒)；$$

（2）轮周上某点的线速度

$$v=\omega R=10\pi\times 1.2=12\pi(米/秒)。$$

例5．$P(a,\ -a)\ (a\neq 0)$为角α终边上一点，求α的各三角函数值。

解：从$P(a,\ -a)$得知　$x=a,\ y=-a$，

$\therefore$　　$r=\sqrt{a^2+(-a)^2}=\sqrt{2}\,|a|$。

（1）当$a>0$时，

$$\sin\alpha=\frac{-a}{\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg\alpha=\frac{-a}{a}=-1,$$

$$ctg\alpha=\frac{a}{-a}=-1,$$

$$\sec\alpha=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2},$$

$$\csc\alpha=\frac{\sqrt{2}a}{-a}=-\sqrt{2}.$$

(2) 当 $a<0$时，

$$\sin\alpha=\frac{-a}{-\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{-\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg\alpha=\frac{-a}{a}=-1,$$

$$ctg\alpha=\frac{a}{-a}=-1,$$

$$\sec\alpha=\frac{-\sqrt{2}a}{a}=-\sqrt{2},$$

$$\csc=\frac{-\sqrt{2}a}{-a}=\sqrt{2}.$$

习 题 一

1．下面各角分别是第几象限的角：

$13546.23°$，$-423.25°$，$\frac{253}{3}\pi$，

$-\frac{7234}{5}\pi$，　1，　32。

2．用不等式表示下面各角的变化范围（用两种单位制）：

(1) α 在第二象限内变化；

(2) β 在第四象限内变化；

(3) θ 在第二、三象限内（包括 x 轴反向）变化；

(4) ϕ 在第一、四象限内（包括 x 轴正向）变化；

(5) A在第一、二象限内（包括 y 轴正向）变化；

(6) B在第三、四象限内（包括 y 轴反向）变化．

3．把下列各角写成$\frac{k\pi}{2}+\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2}, k=0, \pm1\pm2\cdots)$，

的形式后指出它们分别是第几象限的角：

423.7π；-32.6π；1000.1π。

4. 已知圆的半径为$5cm$，求$18°$的弧长。

5. 飞轮每分钟转240周，轮周上某点的线速度为4π米/秒，

(1) 求飞轮半径；

(2) 求飞轮半径中点的线速度。

6. $P(\sqrt{2}, -\sqrt{8})$是α终边上一点，求α的各三角函数值。

7. $P(-2a, 3a)(a\neq 0)$是α终边上的一点，求α的各三角函数值。

8. (1) 已知α是第三象限的角，终边上一点P到原点的距离是1，且$tg\alpha=2$，求P点坐标；

(2) 已知β是第四象限的角，终边上一点P到原点的距离是2，且$cos\beta=\frac{2}{3}$，求P点的坐标。

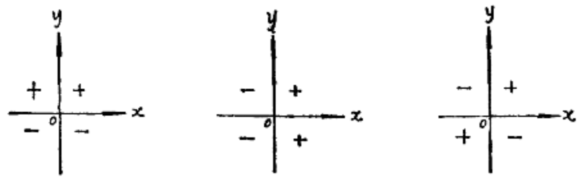
4. 三角函数的定义域和值域

函数	定义域		值域
	角度制	弧度制	
$y=\sin x$	$(-\infty°, +\infty°)$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
$y=\cos x$	$(-\infty°, +\infty°)$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
$y=tg\,x$	不等于$(2k+1)\cdot 90°$的任何角度	不等于$\frac{2k+1}{2}\pi$的任何实数	$(-\infty, +\infty)$
$y=ctg\,x$	不等于$k\cdot 180°$的任何角度	不等于$k\pi$的任何实数	$(-\infty, +\infty)$

表中，k为整数。

5．三角函数值的符号

从三角函数的定义可知，各三角函数值的符号取决于该角所在的象限，不妨依据下图作简明记忆：



正弦　余割　　　余弦　正割　　　正切　余切

图4—1

也可以由右图记忆：

这个图的意思是第一象限全为正，第二象限正弦为正，第三象限切函数为正，第四象限余弦为正。简记为全、正、切、余。

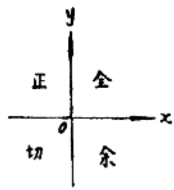


图4—2

6．特殊角三角函数值

由锐角三角函数的定义，采用下图，可算出30°、45°、60°的三角函数值。

图4—3

现把特殊角的三角函数值列表如下：

角度制	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$ctg\,\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

7．三角函数值的变化规律

利用单位圆，观察角的变化而引起的三角函数线（有向线段）的变化，得出各三角函数值的变化规律，现列表如下：

α	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	2π
$sin\,\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$cos\,\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$tg\,\alpha$	0	↗	不存在	↗	0	↗	不存在	↗	0
$ctg\,\alpha$	不存在	↘	0	↘	不存在	↘	0	↘	不存在

从表中可以看出：

正弦函数 $y=sin\alpha$，在一、四象限内是增函数，即若 $\frac{4k-1}{2}\pi<\alpha_1<\alpha_2<\frac{4k+1}{2}\pi$，则 $sin\alpha_1<sin\alpha_2$，在二、三象

限内是减函数，即若$\frac{4k+1}{2}\pi<\alpha_1<\alpha_2<\frac{4k+3}{2}\pi$，则 $sin\alpha_1>sin\alpha_2$，其中 k 为整数。

余弦函数$y=cos\alpha$在一、二象限内是减函数，即若$2k\pi<\alpha_1<\alpha_2<(2k+1)\pi$，则 $cos\alpha_1>cos\alpha_2$，在三、四象限内是增函数，即若$(2k-1)\pi<\alpha_1<\alpha_2<2k\pi$，则$cos\alpha_1<cos\alpha_2$，其中 k 为整数。

正切函数在它的连续区间*内是增函数，而余切函数在它的连续区间内是减函数。

8　例题

例1．求下列函数的定义域：

(1)　$y=\frac{ctg\alpha}{1+sin\alpha}$；　　(2)　$y=\frac{1}{\sqrt{cosx}}$。

解：(1)　∵　$\alpha=\frac{4k-1}{2}\pi$时，$sin\alpha=-1$，

使得　$1+sin\alpha=0$；

又∵　$\alpha\neq k\pi$才使 $ctg\alpha$ 有意义，

∴　函数 $y=\frac{ctg\ \alpha}{1+sin\ \alpha}$的定义域是除 $k\pi$、$\frac{4k-1}{2}\pi$ (k 为整数)外的所有实数。

(2) 由分式和根式的意义可知，要使 $y=\frac{1}{\sqrt{cos\ x}}$有意义，必须

$$cos\ x>0。$$

---

* 函数在某一区间内是连续的（即不间断），则称这一区间为连续区间。

得

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$ 的定义域为

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\text{ 为整数}).$$

例 2．决定下列各式的值的符号：

(1) $\sin 105°\ \cos 195°$；　(2) $tg\,284°\ ctg\,157°$；

(3) $\dfrac{\sin 67°31'}{\cos 128°16'}$；　(4) $\dfrac{\cos 27°4'}{\sin 110°37'}$．

解：(1) ∵ $\sin 105°>0$，$\cos 195°<0$，

∴ $\sin 105°\ \cos 195°<0$，

即 $\sin 105°\ \cos 195°$的值为负数；

(2) ∵ $tg\,284°<0$，$ctg\,157°<0$，

∴ $tg 284°\ ctg 157°>0$，

即 $tg\,284°\ ctg 157°$的值为正数；

(3) ∵ $\sin 67°31'>0$，$\cos 128°16'<0$，

∴ $\dfrac{\sin 67°31'}{\cos 128°16'}<0$．

即 $\dfrac{\sin 67°31'}{\cos 128°16'}$的值为负数；

(4) ∵ $\cos 27°4'>0$，$\sin 110°37'>0$，

∴ $\dfrac{\cos 27°4'}{\sin 110°37'}>0$．

即 $\dfrac{\cos 27°4'}{\sin 110°37'}$的值为正数．

例3．比较下列各组函数值的大小：

(1) $\sin 11°$，$tg\,280°$；　　(2) $\cos 100°$，$\cos 170°$；

(3) $tg\,280°$，$tg\,350°$；　　(4) $ctg\,175°$，$ctg\,185°$。

解：(1) ∵ $\sin 11° > 0$，$tg 280° < 0$，

∴ $\sin 11° > tg 280°$；

(2) ∵ $90° < 100° < 170° < 180°$，

∴ $\cos 110° > \cos 170°$；

(3) ∵ $270° < 280° < 350° < 360°$

∴ $tg 280° < tg 350°$；

(4) ∵ $ctg 175° < 0$，$ctg 185° > 0$

∴ $ctg 175° < ctg 185°$。

例4．分别满足下列不等式的角 α 各是第几象限的角：

(1) $\cos\alpha\, ctg\alpha > 0$；　(2) $\dfrac{\sin\alpha}{tg\alpha} < 0$。

解：(1) $\cos\alpha\, ctg\alpha > 0$，即 $\cos\alpha$ 与 $ctg\alpha$ 同号，

所以 α 是第一象限或第二象限的角；

(2) $\dfrac{\sin\alpha}{tg\alpha} < 0$，即 $\sin\alpha$ 与 $tg\alpha$ 异号，

所以 α 是第二象限或第三象限的角。

习　题　二

1．求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{tgx}{\cos x - 1}$；(2) $y = tgx + ctgx$；

(3) $y = \dfrac{ctgx}{\cos x}$；　(4) $y = tgx \cdot ctgx$。

2．求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt[3]{\sin x}$；　　(2) $y = \sqrt{\cos x}$，

(3) $y=\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}}{\cos x}$； (4) $y=\sqrt{tg2x}$；

(5) $y=\sqrt{ctg\dfrac{x}{2}}$； (6) $y=lg\sin x$；

(7) $y=\sin lgx$； (8) $y=tglgx$。

3．计算下列各式的值

(1) $tg^2 30°+2\sin 60°\cos 0°+tg45°\sin 90°-tg60°$
$+\cos^2 30°$；

(2) $\dfrac{6\sin\dfrac{\pi}{2}-2\cos\pi+5ctg\dfrac{3}{2}\pi-tg\pi}{5\cos\dfrac{3}{2}\pi-5\sin\dfrac{3}{2}\pi-3tg0+5ctg\dfrac{\pi}{2}}$；

(3) $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\cos^2\dfrac{\pi}{3}\right)\left(tg\dfrac{\pi}{4}+ctg\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(4) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{3}+tg\dfrac{\pi}{6}ctg\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3}\right.$
$\left.-tg\dfrac{\pi}{3}ctg\dfrac{\pi}{6}\right)$；

4．不查表，比较下列各组函数值的大小：

(1) $\cos\dfrac{2}{3}\pi$，$tg\dfrac{\pi}{3}$； (2) $\sin\dfrac{3}{2}\pi$，$\cos 1$；

(3) $tg\dfrac{8}{7}\pi$，$tg\dfrac{7}{8}\pi$； (4) $\sin\dfrac{101}{100}\pi$，$\sin\dfrac{100}{101}\pi$；

(5) $ctg2$，$ctg3$； (6) $tg6$，$tg4$。

5．应用三角函数线说明当 x 是第一象限角时，下列各不等式成立：

(1) $\sin x<tgx$； (2) $\cos x<ctgx$；

(3) $\sin x+\cos x>1$； (4) $0\leqslant|\sin x-\cos x|<1$。

6. 决定下列各式的值的符号：

(1) $\sin 20° - \sin 21°$；　(2) $\cos 20° - \cos 21°$；

(3) $\cos 20° - \cos 200°$；　(4) $\sin 240° - \sin 120°$；

(5) $tg 120° - tg 210°$；　(6) $ctg 260° - ctg 280°$；

(7) $\cos^2 \frac{5}{8}\pi - \cos^2 \frac{7}{8}\pi$；　(8) $tg^2 \frac{5}{8}\pi - tg^2 \frac{7}{8}\pi$；

(9) $tg 3 - \sin 3$；　(10) $tg^2 3 - \sin^2 3$。

7. 下列各题中的 α 分别在那些范围内变化：

(1) $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 同时递减；

(2) $tg\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 同时递增；

(3) $\sin\alpha$ 与 $ctg\alpha$ 同时递减；

(4) $\sin\alpha$ 与 $tg\alpha$ 同时递增。

8. 分别满足下面各式的角 α 是什么范围的角：

(1) $tg\alpha \cdot \sin\alpha > 0$；　(2) $tg^2\alpha\cos\alpha > 0$；

(3) $ctg^2\alpha\ \sin\alpha < 0$；　(4) $\frac{tg\alpha}{ctg\alpha} \cdot \sin\alpha > 0$；

(5) $\sin\alpha\ \cos\alpha < 0$；　(6) $\sin\alpha\ \cos\alpha\ tg\alpha < 0$。

二、三角函数间的关系

1.同角三角函数间的关系

倒数关系	商的关系	平方和关系
$\sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$	$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$ $1 + ctg^2\alpha = \csc^2\alpha$

上表的关系式，只要记住$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}$，$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$，$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$就基本可以了，其它关系，力求在运用中自然记忆。

根据同角三角函数间的关系式，可以用一个角的某三角函数表示这个角的其它三角函数，从而能够解决已知某角的一个三角函数值求另外几个三角函数值的问题。

例如用$sin\alpha$表示$cos\alpha$和$tg\alpha$：

$$cos\alpha=\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}.$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}}.$$

如果给定α所在的象限，那么根号前的符号就可以确定；如果没有给定α所在的象限，那么根号前的符号，就不能确定，解题时，就要讨论。

2. 互为余角的三角函数间的关系

如果α、β都是锐角，且$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则称$\alpha$与$\beta$互为余角。

互为余角的α、β有如下函数关系：

$$sin\alpha=cos\beta,\quad tg\alpha=ctg\beta.$$

反之，凡使$sin\alpha=cos\beta$或$tg\alpha=ctg\beta$成立的锐角α、β是互为余角。

3.化任意角的三角函数为锐角三角函数——诱导公式

1）把负角的三角函数化为正角的三角函数，使用：

$$\begin{cases} sin(-\alpha)=-sin\alpha, \\ cos(-\alpha)=cos\alpha, \\ tg(-\alpha)=-tg\alpha, \\ ctg(-\alpha)=-ctg\alpha. \end{cases}$$

2）把大于 360°角的三角函数化为小于或等于 360°角的三角函数，使用：

$$\begin{cases} sin(k\cdot 360°+\alpha)=sin\alpha, \\ cos(k\cdot 360°+\alpha)=cos\alpha, \\ tg(k\cdot 360°+\alpha)=tg\alpha, \\ ctg(k\cdot 360°+\alpha)=ctg\alpha. \end{cases}$$

$$或 \begin{cases} sin(2k\pi+\alpha)=sin\alpha, \\ cos(2k\pi+\alpha)=cos\alpha, \\ tg(2k\pi+\alpha)=tg\alpha, \\ ctg(2k\pi+\alpha)=ctg\alpha. \end{cases}$$

注：这组公式对于 α 是任意角也成立，且 k 为整数。

3）把0°到360°的角的三角函数化为锐角的三角函数，使用：

$$\begin{cases} sin(180°\pm\alpha)=\mp sin\alpha, \\ cos(180°\pm\alpha)=-cos\alpha, \\ tg(180°\pm\alpha)=\pm tg\alpha, \\ ctg(180°\pm\alpha)=\pm ctg\alpha. \end{cases}$$

$$或 \begin{cases} sin(\pi\pm\alpha)=\mp sin\alpha, \\ cos(\pi\pm\alpha)=-cos\alpha, \\ tg(\pi\pm\alpha)=\pm tg\alpha, \\ ctg(\pi\pm\alpha)=\pm ctg\alpha. \end{cases}$$

注：这组公式对于 α 是任意角也成立，且 k 为整数。

这组公式可以概括成下面的话：

$\pi\pm\alpha$ 角的三角函数等于 α 角的同名函数，函数前的符号就是把 α 角看作是锐角时，这些角所在的象限内该函数的符号，简单地说："名称不变，象限定号。"

4）有时还把大于 45° 的锐角三角函数化为小于 45° 的