



水木艾迪数学考试创高分系列教材

适用于全国硕士研究生入学数学考试理工/经济类

大学数学同步强化299

(附八套模拟试题)

水木艾迪培训学校考试命题研究中心 编著

新华出版社

大学数学同步强化299

(附八套模拟试题)

水木艾迪培训学校考试命题研究中心

刘坤林
俞正光
莫 骄
葛余博

编著

新华出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学同步强化299/水木艾迪培训学校编著

北京: 新华出版社, 2006.6

ISBN 7-5011-7494-6

I. 大… II. 水… III. 高等数学—高等学校—解题 IV. 013—44

中国版本图书馆CIP数据核字 (2006) 第049601号

大学数学同步强化299

责任编辑: 尚惠敏

封面设计: 李圆圆

出版发行: 新华出版社

地 址: 北京石景山区京原路8号

邮 编: 100043

经 销: 新华书店

印 刷: 北京康利胶印厂

开 本: 889毫米×1194毫米 1/16

印 张: 34.5

字 数: 440千字

版 次: 2006年6月第一版

印 次: 2006年6月第一次印刷

书 号: ISBN 7-5011-7494-6

定 价: 56.00元

本社购书热线: (010)63077122 水木艾迪学校购书热线: (010)62796032 62701055

前言

鉴于研究生入学考试属于选拔性的考试,已经造成一个基本事实:绝大多数学校的本科生数学学习与国家考试的要求存在较大差距,弥补这个差距,快速与国家考试要求相接轨,是考生成功的关键,但同时也是一个实际困难。《大学数学同步强化 299》正是针对解决这一困难,由水木艾迪清华富有教学经验的老师,参照教育部硕士研究生入学考试大纲,按大学本科现有学习水平,编辑这一本同步强化训练教材。按本教材提供的同步强化思路与方法,可以使读者循序渐进地将原有本科生的学习水平提升到国家考试要求。

通过 299 个典型例题的深入分析,引导读者达到系统扎实的概念理解,做到对基础知识点理解的准确性、全面性与系统性,较快过度到知识交叉与综合运用能力的提升。由作者精心设计的全部例题与模拟试题,是反映清华大学教学模式的经典例题,对国家考试题型有极强的代表性与跟踪性,全书内容紧密结合星级考点与考试题型,强力缔造考生居高临下的知识洞察力,为考研成功奠定坚实基础。

本教材由五部分组成:

1. 微积分,按大纲的章节顺序编排,159 题。
2. 线性代数,按大纲的章节顺序编排,70 题。
3. 概率统计,按大纲的章节顺序编排,70 题。

以上共计 299 题,全部有考点与概念分析,详解与答案。

4. 数学一、二、三、四各 8 套模拟试题,共计 32 份试卷。
5. 数学一、二、三、四各 8 套模拟试题 32 份试卷详解与点评分析。

特别说明:

从 2003-2006 年试题来看,各套试题共用题目比例有较大幅度提高,在大纲要求的共同范围内难度趋于基本一致。特别是数三和数四,连续几年并无任何经济特色的题目,正如我们在教学中强调的那样,数三和数四考的是数学,确切说是理工类数学的能力。这是对 2007 年考生的重要参考。数学四套试题对理工类、经济管理类及金融类考生,在国家考试大纲要求范围内,均为重要参考。还应特别注意,同一个考点,会在数学一、二、三、四试卷中按年份轮换出现。因此,除对某些不属于某类试卷要求范围的例题(如数二数四考生不需要看关于级数的例题等)可跳过以外,其它所有例题与模拟试题对所有考生都有重要参考意义。本书提供的概念理解、例题分析与技巧、以及模拟试题,都同时面向数学一、二、三、四各类考生。

读者对象:硕士研究生入学考试数学一、二、三、四各类考生及在校本科学学生。

目 录

前 言

第一部分 微积分

第一章 函数极限与连续	(1)
(一)填空题	(1)
(二)单项选择题	(5)
(三)解答题	(10)
第二章 导数及其应用	(15)
(一)填空题	(15)
(二)单项选择题	(19)
(三)解答题	(24)
第三章 一元函数积分学	(42)
(一)填空题	(42)
(二)单项选择题	(49)
(三)解答题	(56)
第四章 向量代数与几何	(73)
(一)填空题	(73)
(二)单项选择题	(74)
(三)解答题	(75)
第五章 多元函数微分学	(79)
(一)填空题	(79)
(二)单项选择题	(81)
(三)解答题	(84)
第六章 多元函数积分学	(94)
(一)填空题	(94)
(二)单项选择题	(97)
(三)解答题	(101)
第七章 常微分方程	(112)
(一)填空题	(112)

(二)单项选择题	(113)
(三)解答题	(114)
第八章 无穷级数	(120)
(一)填空题	(120)
(二)单项选择题	(122)
(三)解答题	(129)

第二部分 线性代数

第一章 矩阵与行列式	(135)
(一)填空题	(135)
(二)选择题	(140)
(三)解答题	(142)
第二章 向量	(150)
(一)填空题	(150)
(二)选择题	(151)
(三)解答题	(153)
第三章 线性方程组	(159)
(一)填空题	(159)
(二)选择题	(160)
(三)解答题	(162)
第四章 矩阵的特征值与特征向量	(167)
(一)填空题	(167)
(二)选择题	(168)
(三)解答题	(170)
第五章 二次型	(180)
(一)填空题	(180)
(二)选择题	(181)
(三)解答题	(183)

第三部分 概率统计

第一章 概率的基本概念	(189)
(一)填空题	(189)

(二)选择题.....	(190)
(三)解答题.....	(192)
第二章 随机变量及其分布	(196)
(一)填空题.....	(196)
(二)选择题.....	(197)
(三)解答题.....	(199)
第三章 随机向量及其分布	(204)
(一)填空题.....	(204)
(二)选择题.....	(205)
(三)解答题.....	(208)
第四章 随机变量的数字特征	(216)
(一)填空题.....	(216)
(二)选择题.....	(218)
(三)解答题.....	(222)
第五章 极限定理	(231)
(一)填空题.....	(231)
(二)选择题.....	(232)
(三)解答题.....	(234)
第六章 样本与抽样分布	(238)
(一)填空题.....	(238)
(二)选择题.....	(238)
(三)解答题.....	(239)
第七章 参数估计与假设检验	(242)
(一)填空题.....	(242)
(二)选择题.....	(245)
(三)解答题.....	(249)

第四部分 仿真模拟试题

第一套试题

数学(一)试题(1-1)	(257)
数学(二)试题(1-2)	(261)
数学(三)试题(1-3)	(264)
数学(四)试题(1-4)	(268)

第二套试题

数学(一) 试题(2-1)	(273)
数学(二) 试题(2-2)	(276)
数学(三) 试题(2-3)	(279)
数学(四) 试题(2-4)	(282)

第三套试题

数学(一) 试题(3-1)	(286)
数学(二) 试题(3-2)	(290)
数学(三) 试题(3-3)	(294)
数学(四) 试题(3-4)	(298)

第四套试题

数学(一) 试题(4-1)	(302)
数学(二) 试题(4-2)	(306)
数学(三) 试题(4-3)	(309)
数学(四) 试题(4-4)	(312)

第五套试题

数学(一) 试题(5-1)	(317)
数学(二) 试题(5-2)	(320)
数学(三) 试题(5-3)	(323)
数学(四) 试题(5-4)	(327)

第六套试题

数学(一) 试题(6-1)	(331)
数学(二) 试题(6-2)	(334)
数学(三) 试题(6-3)	(338)
数学(四) 试题(6-4)	(341)

第七套试题

数学(一) 试题(7-1)	(345)
数学(二) 试题(7-2)	(348)
数学(三) 试题(7-3)	(351)
数学(四) 试题(7-4)	(353)

第八套试题

数学(一) 试题(8-1)	(357)
数学(二) 试题(8-2)	(360)
数学(三) 试题(8-3)	(363)
数学(四) 试题(8-4)	(366)

第五部分 仿真模拟试题参考答案

第一套试题参考答案

数学一 (1-1)	(371)
数学二 (1-2)	(376)
数学三 (1-3)	(381)
数学四 (1-4)	(387)

第二套试题参考答案

数学一 (2-1)	(393)
数学二 (2-2)	(397)
数学三 (2-3)	(401)
数学四 (2-4)	(406)

第三套试题参考答案

数学一 (3-1)	(410)
数学二 (3-2)	(415)
数学三 (3-3)	(418)
数学四 (3-4)	(424)

第四套试题参考答案

数学一 (4-1)	(430)
数学二 (4-2)	(435)
数学三 (4-3)	(439)
数学四 (4-4)	(445)

第五套试题参考答案

数学一 (5-1)	(450)
数学二 (5-2)	(454)
数学三 (5-3)	(459)
数学四 (5-4)	(464)

第六套试题参考答案

数学一 (6-1)	(469)
数学二 (6-2)	(474)
数学三 (6-3)	(480)
数学四 (6-4)	(484)

第七套试题参考答案

数学一 (7-1)	(490)
数学二 (7-2)	(497)

数学三 (7-3)	(502)
数学四 (7-4)	(508)

第八套试题参考答案

数学一 (8-1)	(513)
数学二 (8-2)	(520)
数学三 (8-3)	(526)
数学四 (8-4)	(532)

第一部分 微积分

第一章 函数极限与连续

(一) 填空题

1 设符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, g(x) = e^{2x-1} - e^{-x} \text{ 则} \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

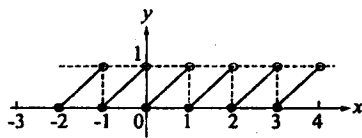
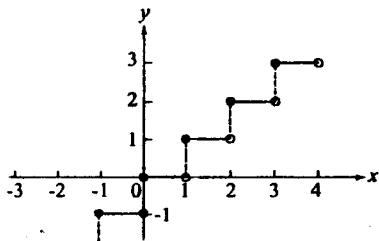
【解】 由 $g(x) = e^{2x-1} - e^{-x} = 0$ 得到唯一零点 $x = \frac{1}{3}$. 由初等函数 $y = e^x$ 的性质可以得到

注: 本题考察函数概念, 包括初等函数性质、常见分段函数及其复合运算。其他常见非初等函数参见下述例题。

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

例 1-1 阶越函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 是一个常用分段函数。

例 1-2 取整函数 $f(x) = [x] = \begin{cases} n, & n \leq x < n+1 \\ n+1, & n+1 \leq x < n+2 \end{cases}$, 也



是一个常用非初等函数. 示意图如上左图所示

例 1-3 $f(x) = x - [x]$ 又是一个常用非初等函数, 是取整函数的复合函数, 且为一个周期函数, 周期为 1. 例如, 在 $[0, 2)$ 内有

$$f(x) = x - [x] = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, \text{如上右图所示。}$$

例 1-4 $f(x) = \max_{|x| \leq 2} \{1, x^2, x^3\}$ 或 $f(x) = \min_{|x| \leq 2} \{1, x^2, x^3\}$ 是一类常用函数, 例如: 积分 $\int_{-2}^2 \max\{1, x^2, x^3\} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 函数 $\max\{1, x^2, x^3\}$ 可以表达为

$$\max\{1, x^2, x^3\} = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & |x| \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$$

故

$$\int_{-2}^2 \max\{1, x^2, x^3\} dx = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{97}{12}$$

【特别提示】(1) 广义奇偶性或对称性

若 $y = f(x)$ 的形有对称轴 $x = a$, 则应有 $f(a-x) = f(a+x)$ (将视为参数), 令 $g(x) = f(a-x)$, 则有 $f(-x) = f(a+x) = f(a-x) = g(x)$, 因此 $g(x)$ 为偶函数。

若 $y = f(x)$ 的图形有对称中心 $(a, 0)$, 则应有 $f(a-x) = -f(a+x)$, 令 $g(x) = f(a-x)$, 则有 $g(-x) = f(a+x) = -f(a-x) = -g(x)$, 因此 $g(x)$ 为奇函数。以上这种性质称为函数 $f(x)$ 的广义奇偶性或对称性。

例如: 若 $y = f(x)$ 的图形有对称轴中心 $(a, 0)$ 与 $(b, 0)$ ($a < b$), 则 $y = f(x)$ 为周期函数, 且周期为 $T = 2(b-a)$ 。

因为 $y = f(x)$ 的图形有对称轴中心 $(a, 0)$ 与 $(b, 0)$, 由广义奇偶性则应有

$$f(a-x) = -f(a+x)$$

令 $a-x = t$, 则有 $f(t) = -f(2a-t)$ 。

另外又有 $f(b-x) = -f(b+x)$, 同理可有 $f(t) = -f(2b-t)$, 于是得到

$$f(2b-t) = f(2a-t)$$

由此令 $2a-t = u$ 可得到

$$f(u) = f(u+2(b-a)),$$

或记为 $f(x) = f(x+2(b-a))$, 注意到 $2(b-a) > 0$, 所以 $y = f(x)$ 为周期函数, 且周期为

$$T = 2(b-a)$$

注: 对各类基本初等函数性质及其图形, 应做到熟练掌握, 对函数的初等性质, 以及复合函数与反函数概念应准确理解。函数的初等性质包括有界性、增减性、奇偶性与周期性。此外, 还应了解以上常见非初等函数的类型, 关键是对函数概念的理解要做到十分准确。

① 本题是对广义奇偶性或对称性的一个基本练习, 并注意函数概念与记号的使用。对一个函数 $y = f(x)$, 我们主要关心的是函数 $y = f(\cdot)$ 的规则, 至于自变量记号的使用, 有时是人为的, 有时则根据问题的需要而变动。

② 奇偶性与对称性在各类积分中有重要应用, 特别是多元函数积分中积分变量与积分域的轮换对称性, 基础是函数概念与积分定义的准确理解。

(2) 对于复合函数 $y = f(g(x))$ 的重要结论有:

一般讲, $u = g(x)$ 的值域为 $y = f(u)$ 定义域的一个非空子集, 只在特定情况下, $u = g(x)$ 的值域为 $y = f(u)$ 的定义域.

(3) 关于反函数问题的重要结论有:

● 若 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数, 则在某些场合, 常把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$ 或 $g(x)$, 此时已重新把 x 视为自变量. 在反函数记号的使用中, 一定要分清是否需要换变量记号.

● 互为反函数的两个函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 曲线关于直线 $y = x$ 对称.

● $y = f(x)$ 与其反函数 $g(x)$ 的定义域与值域具有对偶性. 即 $y = f(x)$ 的定义域必为 $g(x)$ 的值域, 而 $y = f(x)$ 的值域必为 $g(x)$ 的定义域. 并且 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

2 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 因此 $f(x) = x^2 - 2$.

3 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, x > 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $f(t) = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}$, 因此 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}$.

4 设 $0 < a \leq 1$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$1 = (a)^{\frac{1}{x}} < (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} \leq (3 \cdot a)^{\frac{1}{x}},$$

运用夹逼准则得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} = 1$.

注: 当 $a > 1$ 时有

$$a^2 = (a^{2x})^{\frac{1}{x}} <$$

$$(a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} <$$

$$(3 \cdot a^{2x})^{\frac{1}{x}}$$

由夹逼准则即得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} = a^2$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 2(2^{\frac{1}{x+1}} - 1)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{\ln 2}{x(x+1)}} - 1)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{\ln 2}{x(x+1)} = \ln 2$

【特别提示】(1) 下列做法是错误的! 第二个等号开始, 犯了极限运算法则运用错误, 答案实属巧合.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2[(2^{\frac{1}{x}} - 1) - (2^{\frac{1}{x+1}} - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x} \ln 2} - 1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1} \ln 2} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 2}{x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 2}{x+1} \\
&= \ln 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{x^2}{x(x+1)} = \ln 2
\end{aligned}$$

(2) 几组常用等价无穷小量($x \rightarrow 0$):

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \arctan x \sim \arcsin x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0)$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(x+1)^\lambda - 1 \sim \lambda x (\lambda \in R)$$

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$$

$$\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$$

以上等价关系可在广义下应用,即:等价关系中的 x 在应用中常换为满足 $\lim_{x \rightarrow \infty(\cdot)} \alpha(x) = 0$ 的某个 $\alpha(x)$, 其中 $x \rightarrow (\cdot)$ 为某种趋向. 例如:

$$1 - \cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) \sim \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2 \sim \frac{1}{2x^2} (x \rightarrow \pm\infty)$$

其中 $\alpha(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$, 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0$

(3) 无穷小量比阶 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为某种趋向 $x \rightarrow (\cdot)$ 时的无穷小量, 若满足

$$\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mu$$

则: 当 $\mu \neq 0$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小量($x \rightarrow (\cdot)$), 特别 $\mu = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量($x \rightarrow (\cdot)$), 可记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

当 $\mu = 0$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量($x \rightarrow (\cdot)$).

当 $\mu = \infty$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小量($x \rightarrow (\cdot)$).

6 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 (方法一)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x + xf(x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x} + 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2x} + 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}
\end{aligned}$$

注: 在极限运算中, 应特别注意防止无穷小量的非法替换. 等价无穷小量的替换, 只能在因子位置上进行, 因等价无穷小量是用因子乘积 $\alpha(x) \cdot \frac{1}{\beta(x)}$ 的极限定义的, 非法替换是常见错误.

注: 注意如下错误做法, 错误原因在于无穷小量的非法替换:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + xf(x)}{x^2} = 0 \\
&\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1-x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$$

由极限运算法则, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$

(方法二)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + o(x^2) + xf(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} - \frac{1}{2} + 0 = 0 \end{aligned}$$

因此极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$ 存在。

7 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-7}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-7}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{7}{x}}{x^2 \frac{1}{x^2}} = 2$ 。

8 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{e}] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^{1/2}} - \sqrt{e}}{x} &= \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\frac{\ln(1+x)}{2x} - \frac{1}{2}}) - 1}{x} \\ &= \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{2x} - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} \\ &= \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4} \sqrt{e} \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{e}] = -\frac{1}{4} \sqrt{e}$

注: ① 上述第3个等号后, 可应用罗必达法则。但应注意, 对序列(整标函数)不可以直接应用罗必达法则, 因为整标函数并非连续函数, 更不可能有导数存在, 不能求导数。

② 将幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 写成 $y = e^{g(x)\ln(f(x))}$ 是常用的有效方法。

(二) 单项选择题

9 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ -x^2 & x \in (0, +\infty) \end{cases}, \text{ 则 } ().$$

$f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 。

(A) $f(g(x)) = x, g(f(x)) = g(x)$

(B) $f(g(x)) = 0, g(f(x)) = g(x)$

(C) $f(g(x)) = 0, g(f(x)) = 0$

(D) $f(g(x)) = x, g(f(x)) = f(x)$

【解】 因为恒有 $g(x) \leq 0$, 所以 $f(g(x)) = 0$ 。

当 $x > 0$ 时 $f(x) > 0$, 于是 $g(f(x)) = -f^2(x) = x^2$;

当 $x \leq 0$ 时 $f(x) = 0$, 于是 $g(f(x)) = 0$ 。所以 $g(f(x)) = (g(x))$ 。

于是答案为(B)

例 9-1 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

【解】 答案为 D。

令 $u = -x$, 当 $x < 0$ 时, 由于 $u > 0$, 所以

$$f(-x) = f(u) = u^2 + u = x^2 - x$$

当 $x \geq 0$ 时, 由于 $u \leq 0$, 所以 $f(-x) = f(u) = u^2 = x^2$ 。

因此答案为(D)。

例 9-2 设函数 $y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, 则 $y = y(x)$ ()。

(A) 为偶函数, 值域为 $y \in (-1, 1)$

(B) 为奇函数, 值域为 $y \in (-\infty, 0)$

(C) 为奇函数, 值域为 $y \in (-1, 1)$

(D) 为奇函数, 值域为 $y \in (0, +\infty)$

【解】 答案为(C)

首先, $y(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -y(x)$, 其次, 考虑该函数

的值域。直接求该函数的值域不方便。利用函数与其反函数定义域与值域的对偶性, 求 $y(x)$ 反函数的定义域。

注: 对函数概念的准确把握, 是学好微积分的重要基础, 包括函数的初等性质(有界性, 奇偶性与对称性, 增减性, 周期性), 还有复合函数与反函数的概念与性质等。

由 $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 可解出 $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$, $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$, 换记号记为 y
 $= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, 此函数的定义域应满足 $\frac{1+x}{1-x} > 0$, 即

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1+x < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$$

第二组不等式无解, 第一组不等式的解为 $|x| < 1$, 因此所求函数的值域为 $y \in (-1, 1)$ 。

10 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = (\quad)$ 。

- (A) 存在且等于 $|A|$
 (B) 存在但不一定等于 $|A|$
 (C) 不一定存在
 (D) 不存在

【解】 答案为(A)。

若 $A = 0$, 由极限定义立即得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ 。

若 $A > 0$, 由极限的保序性, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 或 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时恒有

$$f(x) > 0, |f(x)| = f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = A = |A|$$

若 $A < 0$, 由极限的保序性, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 或 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时恒有

$$f(x) < 0, |f(x)| = -f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = -A = |A|$$

例 10-1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = A \neq 0$, 则()。

- (A) $\exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq g(x)$
 (B) $f(x_0) \neq g(x_0)$
 (C) $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq g(x)$
 (D) $f(x)$ 或 $g(x)$ 在 x_0 处没定义

【解】 答案为(C)。

例 10-2 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{1-\cos x} = -1$, 则()。

- (A) $\exists \delta > 0$, 使当 $|x| < \delta$ 时, $f(x) \neq 1$
 (B) $f(0) = 1$
 (C) $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, $f(x) < 1$
 (D) $\exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, $f(x) > 1$

【解】 答案为(C)。

11 函数 $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ 的有界区间为()。

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(2, +\infty)$ 。

【解】 答案为(D)。

注: 准确理解极限保序性是正确迅速处理许多问题的基础, 相关问题还可参考下述例题:

注: 本题考点为函数极限定义与极限保序性。

注: 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且