经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

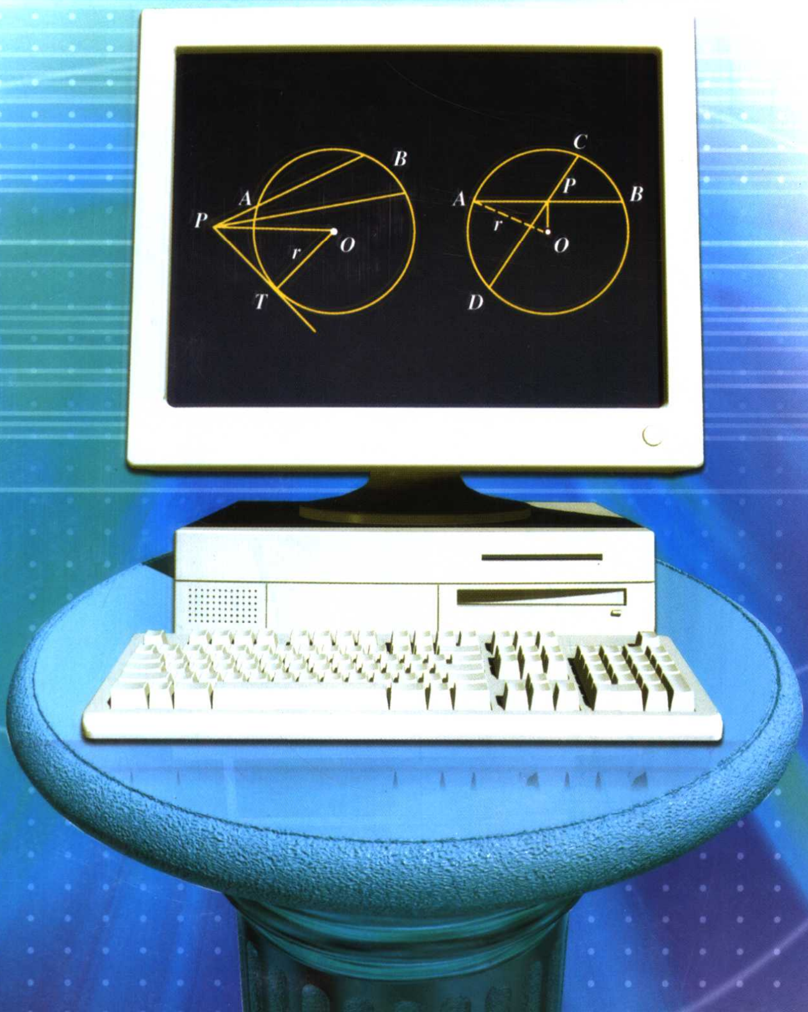
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–1

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

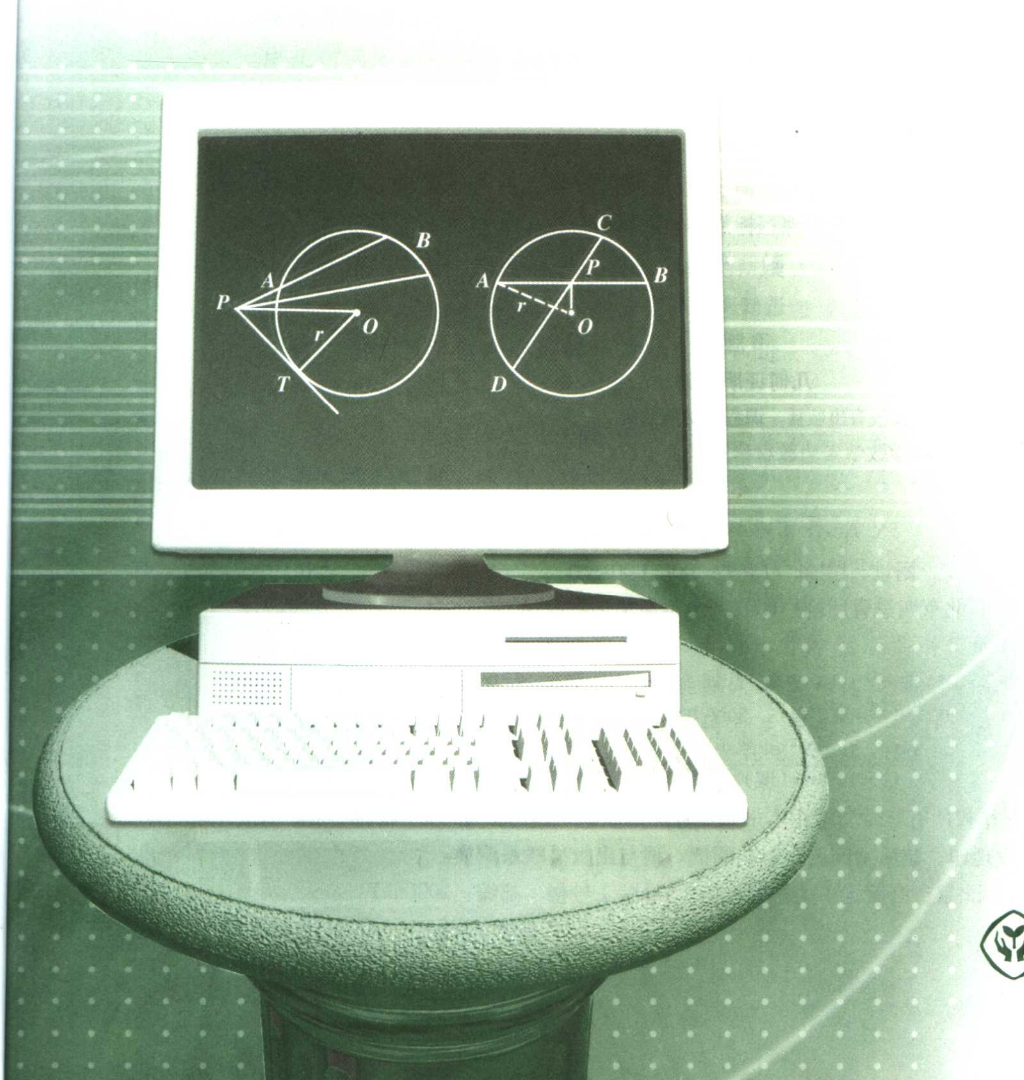
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-1

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　罗才忠　冼词学　范登晨　高存明

责任编辑　　郭思旭　高存明

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4-1

B版

几何证明选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学实验教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http：//www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4　字数：77 000

2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 12 月第 3 次印刷

ISBN 7-107-18837-2 / G・11927（课）　定价：4.90 元

本册导引

在初中，我们通过观察，直观地研讨了空间图形的基本概念和性质，并在适当的时候，揭示了它们之间的逻辑关系．首先探索了平行线的基本性质和三角形全等的条件，后来又研究了相似形的性质，主要是三角形相似的条件．人们在长期地研究图形性质的过程中，发现图形性质之间存在着逻辑关系，只要承认若干条图形的基本性质是对的，则其它的图形的性质都可以从这些基本性质一步步地推演出来．这方面，古希腊几何学家做出了杰出的贡献．主要反映在欧几里得几何原本上．这部著作，在人类历史上第一次给出了几何学严格的逻辑叙述．在长达二千多年时间中，一直是学习几何学的唯一指南，是培养学生逻辑思维能力的理想园地．

应该指出，我国数学家在几何学方面有着极其辉煌的成就．在我国劳动人民丰富实践的基础上，数学家们由观天测地，面积、容积的度量以及计时的研究，建立了具有我国特色的几何学体系．以长方形的计算方法为基础，由出入相补原理推导出平行四边形、梯形的面积的计算公式，由正方形面积的计算推出勾股定理，由对测量高度和距离的研究建立了平行与相似的理论；由祖暅原理推导出柱体、圆柱、圆锥和球的体积．我国对几何学的研究是走着一条“寓理于算”的道路，不仅通过面积和体积的计算推出许多图形的性质，而且在解决几何问题的过程中应用列方程解方程的代数原理．

推理的基本要求是推理的前提必须正确．前提正确，推出的结论才被认为是正确的．确定正确的前提也并非易事．我们学习相似的基础是线段的度量，即两条线段的比．骤看起来，长度的度量是十分简单的事，但细加追究，就会发现大有文章．在几何学的发展中，古希腊毕达哥拉斯学派早先认为两个线段的比值一定是一个分数．后来他们进行了很长时期的钻研，才彻底弄清楚长度的度量理论．

本册，我们主要采取寓理于算和演绎推理方法，进一步学习相似形和圆的性质，并使同学们感受逻辑推理的威力，进一步培养同学们的计算推理和综合推理的能力．

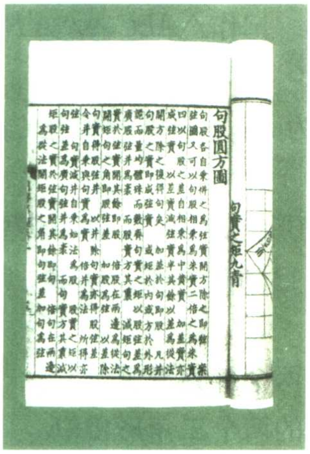
从小学我们就知道**长方形的面积等于长乘宽**．我国数学家采用十进位小数计算线段的长度，这样，通过单位逐步变小可以无限的量下去以达到任意的精确度．这实际上已说明了，当线段的长度是无限不循环小数（无理数）时，长方形的面积计算公式是正确的．以长方形面积计算为基础，通过出入相补原理，我们推出了平行四边形、梯形等图形的面积公式．这一章我们将以这些面积公式为基础来推导相似三角形的性质，并进一步研究与圆有关的线段的度量．

第二章，开始通过平行投影变换探索圆和椭圆之间的内在联系，然后使用圆柱或圆锥面的内切球推证圆锥曲线的有关性质，从中使我们感受到图形之间的逻辑关系以及内在和谐的美．

希望通过这一专题的学习，为我们今后进一步学习几何打下坚实的基础．

目　录

第一章　相似三角形定理与圆幂定理



《周髀算经》

本章采取我国古代数学家研究几何使用的“寓理于算”和综合推理的方法，学习相似形和圆的相关性质. 我们以长度与面积的理论为基础，由三角形和梯形的面积公式证明相似形判定定理，并证明相似三角形的一些重要性质，进而探索直角三角形相似与锐角三角函数之间的内在联系，从中体会这些图形之间的逻辑关系. 在第二大节应用相似三角形的性质研究与圆有关的角和成比例的线段. 通过这一章的学习与训练，进一步提高大家对数学命题论证的能力和逻辑思维能力.

1.1　相似三角形

1.1.1　相似三角形判定定理

我们知道，形状相同的图形叫做相似形. 在初中我们通过直观探索，得出了相似三角形的特征性质，这一节我们对相似三角形的判定方法和性质作一简要的回顾，并揭示它们之间的逻辑关系.

如果在两个三角形中，对应角相等、对应边成比例，则这两个三角形叫做相似三角形（similar triangle）.

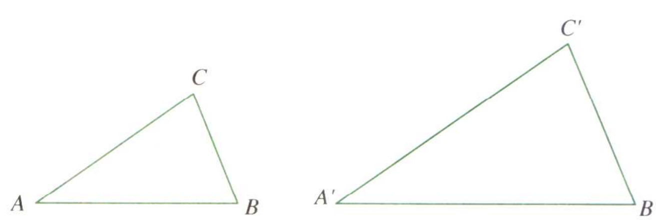


图 1-1

如图 1-1，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，如果

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

则$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是相似三角形. 记作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，读作：$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$.

设相似三角形对应边的比值为k，k叫做相似比（或相似系数）.

我们已经知道，判定两个三角形是否相似，并不需要对定义中的条件逐一验证. 在初中，已通过观察、实验，归纳得出三个相似三角形判定定理：

判定定理 1 两角对应相等的两个三角形相似.

判定定理 2 三边对应成比例的两个三角形相似.

判定定理 3 两边对应成比例. 并且夹角相等的两个三角形相似.

下面我们用面积公式证明第一个判定定理。

已知；在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$（图 1）

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

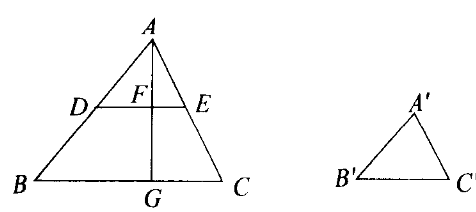


图 1-2

证明：由已知可推知$\angle C=\angle C'$.

如果$AB=A'B'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，这时定理显然成立.

设$AB>A'B'$，在$\triangle ABC$的AB和AC边上分别截取$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接DE，得

$\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$.

于是 $\angle B=\angle ADE$， 所以 $DE\parallel BC$.

作BC边上的高AG，交DE于点F，则$AF\perp DE$.

用S表示图形的面积，则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}+S_{梯形DBCE}$. 即

$$\frac{1}{2}BC\times AG=\frac{1}{2}DE\times AF+\frac{1}{2}(DE+BC)\times(AG-AF).$$

展开合并，整理得 $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AG}{AF}$.

因此
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{\frac{1}{2}BC\times AG}{\frac{1}{2}DE\times AF}$$
$$=\frac{BC}{DE}\cdot\frac{AG}{AF}$$
$$=\left(\frac{BC}{DE}\right)^2=\left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2. \qquad (*)$$

同理可证 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2=\left(\dfrac{AC}{A'C'}\right)^2$.

所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

又因为 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

下面我们证明判定定理 2.

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

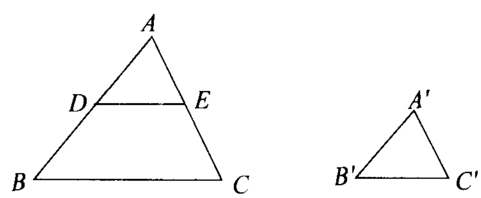


图 1-3

证明：如果 $AB=A'B'$，则两个三角形全等，定理显然成立. 不妨设 $AB>A'B'$.

在 AB 上截取 $AD=A'B'$，过 D 作 $DE\,/\!/\,BC$ 交边 AC 于点 E，则

$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

由判定定理 1，可得$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

所以 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

又已知 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{B'C'}=$

由于 $AD=A'B'$，所以 $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{BC}{B'C'}$，$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{A'C'}$，

所以 $B'C'=DE$，$A'C'=AE$.

所以 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$. 所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

用类似的方法可以定明判定定理 3，留给同学作为练习.

例 1 已知点 A、B、C 在 $\angle O$ 的的一边 l 上，点 A'、B'、C' 在另一边 l' 上，并且直线 $AB'/\!/BA'$，$BC'/\!/CB'$.

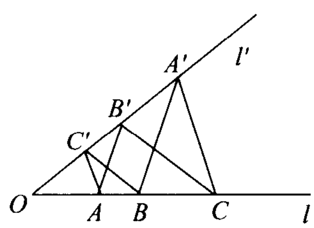


图 1-4

求证：$AC'/\!/CA'$.

证明：因为 $AB'/\!/BA'$，$BC'/\!/CB'$，（已知）

所以 $\triangle OAB'\backsim\triangle OBA'$， $\triangle OBC'\backsim\triangle OCB'$，

（相似三角形的判定定理 1）.

设两对相似三角形的相似比分别为 k_1，k_2，则

$OA=k_1OB$，　$OB'=k_1OA'$，

$OB=k_2OC$，　$OC'=k_2OB'$，

所以 $OA=k_1OB=(k_1k_2)OC$，

$OC'=k_2OB'=(k_2k_1)\ OA'$，

所以 $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OC'}{OA'}=k_1k_2$.

又因为 $\angle O$ 为 $\triangle AOC'$ 和 $\triangle COA'$ 的共公角，

所以 $\triangle OAC'\backsim\triangle OCA'$，（判定定理 2）

所以 $\angle OAC'=\angle OCA'$，

因此 $AC'/\!/CA'$.

例 2 求证：顺次连结三角形三边中点所得三角形与原三角形相似.

已知：如图 1-5，D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 的中点.

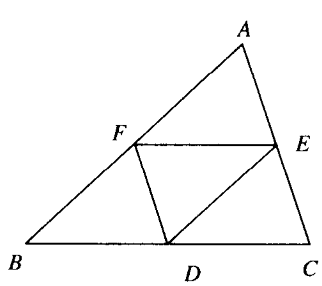


图 1-5

求证：$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

证明：因为 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，

所以 DE、EF、FD 都是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$EF\underline{\underline{/\!/}}\dfrac{1}{2}BC$，$DF\underline{\underline{/\!/}}\dfrac{1}{2}CA$，$DE\underline{\underline{/\!/}}\dfrac{1}{2}AB$，

$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$.

因此 $\triangle EFD\backsim\triangle ABC$.　　（判定定理 2）

练习

1. 如果两个直角三角形满足下述条件之一，那么它们是相似三角形吗？为什么？
   (1) 如果一个直角三角形的一个锐角等于另一个三角形的一个锐角；
   (2) 如果一个直角三角形的两条直角边与另一个直角三角形的两条直角边对应成比例；
   (3) 一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个三角形的斜边和直角边对应成比例.
2. 求证：顶角相等的两个等腰三角形相似.
3. 已知一个相似三角形的各边的比为 1∶2∶3，和它相似的另一三角形的最大边长为 15 cm，求这个三角形的其它边长.
4. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以 B 为圆心，BC 为半径画弧，交 AC 于点 D，求证：$BC^2=AC\cdot CD$.

1.1.2 相似三角形的性质

性质定理 1 相似三角形对应边上的高、中线和它们周长的比都等于相似比.

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且相似比为 k，AD、AM 分别是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的高、中线，$A'D'$、$A'M'$、分别是$\triangle A'B'C'$的 $B'C'$边上的高、中线.

求证：(1) $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AM}{A'M'}=k$；

(2) $\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$.

证明：(1) 证明$\dfrac{AD}{A'D'}=k$. 如图 1-6：

因为 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

所以 $\angle B=\angle B'$，又因 $AD\perp BC$，$A'D'\perp B'C'$，

所以 $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$.

所以 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

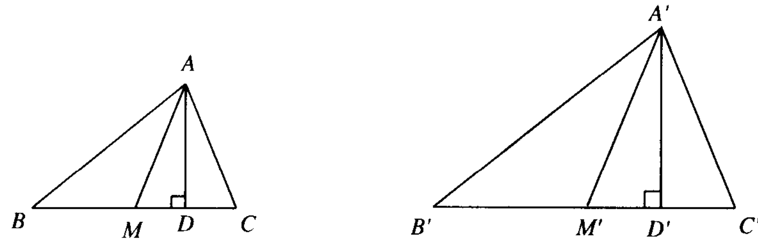


图 1-6

另一个等式，请同学自证；

(2) 因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，所以可设

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

即　$AB=kA'B'$，　$BC=kB'C'$，　$CA=kC'A'$，

由此得　$AB+BC+CA=k(A'B'+B'C'+C'A')$，

即　$\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$

性质定理 2　相似三角形的面积比等于相似比的平方

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且相似比为 k（图 1-6）.

求证：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k^2.$

证明：$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot\dfrac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2.$

例 1　利用性质定理证明勾股定理.

已知：直角$\triangle ABC$，$\angle C$ 是直角.

求证：$AC^2+BC^2=AB^2.$

证明：如图 1-7，设 CD 是斜边 AB 上的高.

由$\angle A=\angle BCD$，$\angle B=\angle ACD$，可得

$$\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle CBD.$$

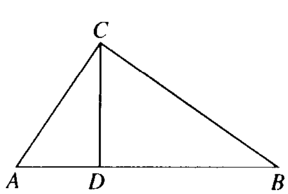


图 1-7

于是

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AC^2}{AB^2},\tag{1}$$

$$\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BC^2}{AB^2},\tag{2}$$

(1)和(2)两边相加，得

$$\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=\frac{S_{\triangle ACD}+S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle ABC}}=1,$$

所以　$AC^2+BC^2=AB^2$.

这使我们再一次证明了勾股定理.

例 2　如图 1-8，$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料，边 $BC=200$ mm，高 $AD=300$ mm，要把它加工成长是宽的 2 倍的矩形零件，使矩形较短的边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB、AC 上，求这个矩形零件的边长.

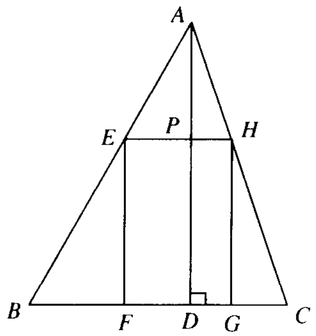


图 1-8

解　设矩形 $EFGH$ 为加工成的矩形零件，边 FG 在 BC 上，顶点 E、H 分别在 AB、AC 上，$\triangle ABC$ 的高 AD 与边 EH 相交于点 P. 设矩形的边长 EH 为 x mm.

因为　$EH /\!/ BC$,

所以　$\triangle AEH \backsim \triangle ABC$.

所以　$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EH}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

因此，$\dfrac{300-2x}{300}=\dfrac{x}{200}$.

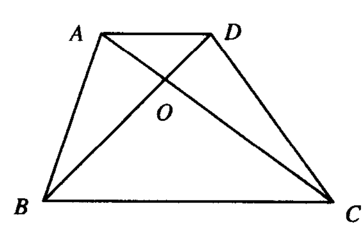
解得　$x=\dfrac{600}{7}$ (mm);

$2x=\dfrac{1200}{7}$ (mm).

答：加工成的矩形零件的边长分别为 $\dfrac{600}{7}$ mm、$\dfrac{1200}{7}$ mm.

练习

1. 已知两个相似三角形对应边的比为 1∶4，则它们对应高的比是______，对应中线的比为______，对应角平分线的比为______.
2. 求证：相似三角形对应中线的比等于相似比.
3. 两个相似三角形的面积分别为 9 cm^2 和 25 cm^2，它们的周长相差 6 cm，则较大的三角形的周长为______ cm.
4. 已知梯形的上底为 4 cm，下底为 12 cm，高为 6 cm，求这梯形两腰延长线的交点到下底距离.
5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，AC、BD 相交于 O，$AO=2$ cm，$AC=8$ cm，且 $S_{\triangle BCD}=6\ \text{cm}^2$，梯形 $ABCD$ 面积为 10 cm^2，求 $S_{\triangle AOD}$.



（第 5 题）

思考与讨论

一个$\triangle ABC$的三条边分别为4，5，6. 线段a长为2，线段b长为3，现要把线段b截成两段，使这两段与线段a组成的三角形与$\triangle ABC$相似，则线段b被截得的两段长分别是______和______. 若线段b长为5.5呢?

1.1.3 平行截割定理

平行截割定理 三条平行线截任两条直线，所截出的对应线成比例.

已知：$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，两条直线与l_1、l_2、l_3分别相交于点A、B、C与D、E、F（图1-9）.

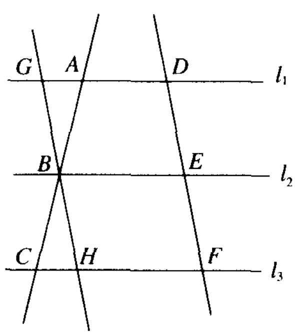


图1-9

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

证明：过点B作DF的平行线分别与l_1、l_3相交于G、H.

由于 $l_1 /\!/ l_3$， 得

$$\angle GAB=\angle BCH, \quad \angle BGA=\angle BHC,$$

所以 $\triangle BCH \backsim \triangle BAG$. （相似三角形判定定理1）

因此 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{GB}{BH}$.

又因 四边形$GBED$和$BHFE$都是平行四形，由此可得

$$GB=DE, \quad BH=EF.$$

因此 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

思考与讨论

定理中的三条直线可以换为任意多条直线吗? 即

已知n条互相平行的直线l_1，l_2，$\cdots l_n$截任意两条直线m_1，m_2截得的两组线段依次为a_1、a_2、$\cdots$、a_n，b_1、b_2、$\cdots$、b_n，比例式

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

成立吗?

推论 平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线),所得的对应线段成比例.

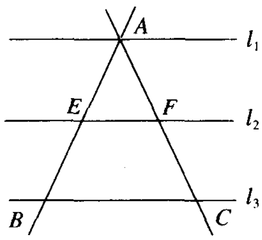


图 1-10

想想看,经过三角形一边中点并且与另一边平行的直线,是否必平分第三边(图 1-10)?

例 已知:AT 为$\triangle ABC$的$\angle BAC$的平分线(图 1-11),

求证:$\frac{BT}{TC}=\frac{AB}{AC}$.

证明:作 $CD // TA$ 交 BA 的延长线于点 D,则

$$\frac{BT}{TC}=\frac{BA}{AD}.$$

因为 $\angle BAT=\angle CAT$,$\angle BAT=\angle ADC$,

$\angle CAT=\angle ACD$,

所以 $\angle ADC=\angle ACD$.

所以 $AC=AD$.

所以 $\frac{BT}{TC}=\frac{AB}{AC}$.

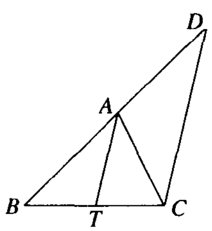


图 1-11

思考与讨论

如下图用一张矩形纸,你能折出一个等边三角形吗?先把矩形 $ABCD$ 纸对折,设折痕为 MN;然后放平再把 B 点叠在折痕线上,得到 Rt$\triangle ABE$,沿着 EB 线折叠,就能得到等边$\triangle EAF$,想一想,为什么?

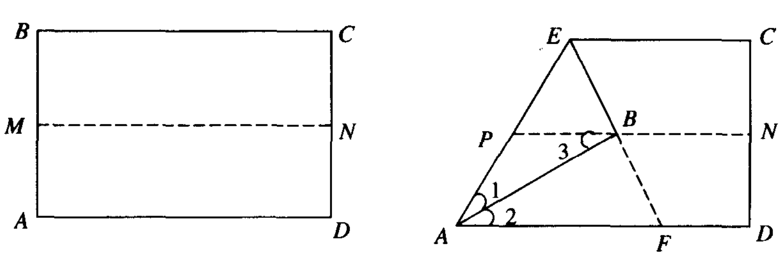
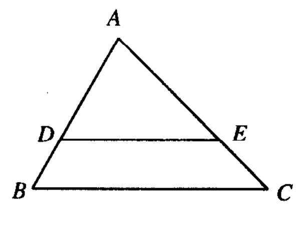


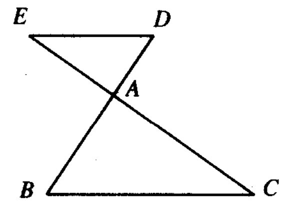
图 1-12

练习

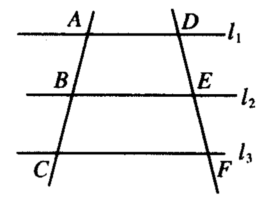
1. 已知：如图，$DE /\!/ BC$，$AB=12$，$AC=16$，$AD=7.5$，求 AE 的长.



(第1题)

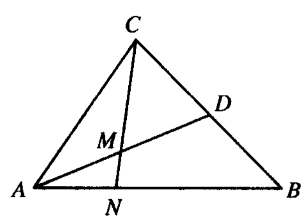


(第2题)

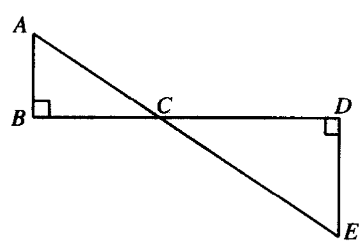


(第3题)

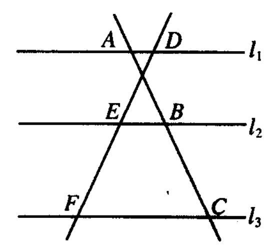
2. 已知：如图，$ED /\!/ BC$，且 $AB=5$，$AC=7$，$AE=2.8$，求：BD 的长.
3. 已知：如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$AB=a$，$BC=b$，$EF=c$，求 DE.
4. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，M 是 AD 的中点，CM 延长线交 AB 于 N，$AB=24$ cm，求 AN 的长.



(第 4 题)



(第5题)



(第6题)

5. 已知：如图，$AB \perp BD$，$ED \perp BD$，垂足分别为 B、D.

   求证：$\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{BC}{DC}$.

6. 已知：如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$.

   求证：$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{m}{m+n}$.

1.1.4 锐角三角函数与射影定理

由直角三角形相似的条件可知，含有相等锐角 α 的所有直角三角形都相似（图 1-13），由此我们定义了锐角三角函数(或三角比)：

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}},\quad \tan\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}.$$

这就是说在一个锐角等于 α 的所有直角三角形中，对边比斜边，邻边比斜边，对边比邻边的比值分别都相等.

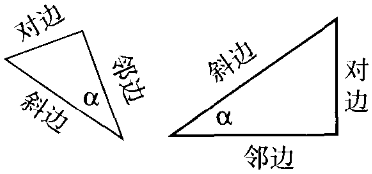


图 1-13

由以上分析可知，锐角三角比不过是相似直角三角形性质的另一种表达形式. 这种表达方式更加精炼地表述了相似直角三角形的性质.

下面我们用锐角三角比，进一步研究直角三角形的一些重要性质.

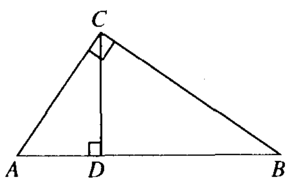


图 1-14

已知：CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高（图 1-14）.

求证：(1) $AC^2=AD\cdot AB$;

(2) $BC^2=BD\cdot AB$;

(3) $CD^2=AD\cdot BD$.

证明：(1) 在图 1-14 中，含有 $\angle A$ 的直角三角形有两个：Rt$\triangle ACD$ 和是 Rt$\triangle ABC$，于是

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

因此 $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) 含有 $\angle B$ 的直角三角形有两个：Rt$\triangle CBD$ 和 Rt$\triangle ABC$，于是

$$\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}.$$

因此 $BC^2=BD\cdot AB$.

(3) 在 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle CBD$ 中，$\angle A=\angle BCD$，于是 $\tan\angle A=\tan\angle BCD$，由此可得

$$\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD},$$

即 $CD^2=AD\cdot BD$.

目前，可以查到的证明勾股定理的方法有很多，你能用射影定理的结论证明勾股定理吗？

AD、BD 是直角边 AC、BC 在斜边 AB 上的正射影. 所以上面得到的两个结论，通常叫做**射影定理**. 射影定理可用自然语言叙述如下：

射影定理　直角三角形中，每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项；斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项.

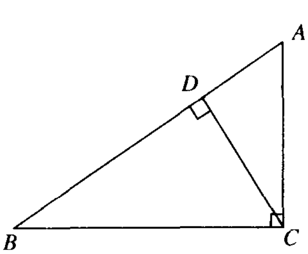


图 1-15

例　用射影定理证明勾股定理.

已知：Rt$\triangle ABC$，$\angle C=90^\circ$，

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$.

证明：作 $CD \perp AB$ 于点 D，由射影定理，得

$$AC^2 = AD \times AB \quad ①$$

$$BC^2 = BD \times AB \quad ②$$

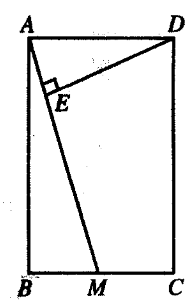
①+②，得

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

即 $$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

练习

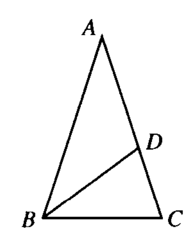
1. CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高.
   (1) 已知 $AD=4$ 厘米，$CD=6$ 厘米. 求 BD 和 BC；
   (2) 已知 $AB=15$ 厘米，$AC=9$ 厘米，求 CD 和 BD.
2. 设 CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高，求证：
   (1) $\dfrac{AC^2}{CB^2}=\dfrac{AD}{DB}$；　　(2) $CA \cdot CD = CB \cdot AD$.
3. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 是 BC 的中点，$DE \perp AM$，E 是垂足，求证：$DE=\dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.



(第 3 题)

习题 1-1

1. 已知：如图，等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，$\angle B$ 的平分线交 AC 于 D. 求证：$BD^2=AC \cdot DC$.



(第 1 题)

2. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，$AC>AB$，AD 是高，M 是 BC 的中点，求证：$AC^2-AB^2=2DM \cdot BC$.
3. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，AD 是高，DE 是$\triangle ABD$ 的高，求证：$AD^2=AC \cdot DE$.
4. 如图，P 是$\triangle ABC$ 内一点，过点 P 作三边 AB，BC，CA 的平行线分别交其他两边分别为 M、F，E、H，D、G，已知 $AD : DE : EB = a : b : c$，求 $S_{\triangle PHM} : S_{\triangle PDE} : S_{\triangle PGF}$.
5. 如图，已知，M、P 分别是正方形 $ABCD$ 边 BC、AB 上的一点，过 M 作 $ME \perp PD$，垂足为 E，连结 PM、DM，如果 $ME^2=PE \cdot ED$，求证：$\triangle PBM \backsim \triangle MCD$.
6. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是直角，AD 是高，求证：