非线性理论数学基础

姚妙新 陈芳启 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

非线性理论数学基础

姚妙新　陈芳启　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是以作者多年来为天津大学非数学类专业博士生讲授非线性数学课程的讲义为基础编写而成，内容包括：空间结构与映射、非线性泛函分析和现代变分法的基础、非线性动力系统基础知识、分岔与奇异性理论以及混沌和分形的基础知识.

本书注重相关概念和理论之间的联系，保持了较严谨的数学体系，将学习非线性理论基础知识与提高现代数学修养这两个目的有机结合. 可供高等院校非数学类专业博士生或对数学要求较高的硕士生选用部分或全部内容作为教材或教学参考书，也可供有关教师或科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性理论数学基础/姚妙新，陈芳启主编. —天津：天津大学出版社，2005.8
ISBN 7-5618-2181-6

Ⅰ.非… Ⅱ.①姚…②陈… Ⅲ.非线性－研究生－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088149 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 天津新华印刷三厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 10.25
字　　数 256 千
版　　次 2005 年 8 月第 1 版
印　　次 2005 年 8 月第 1 次
印　　数 1－2 300
定　　价 16.00 元

序　　言

现代自然科学和技术的飞速发展,对工科博士生的培养提出了更高的要求,他们应当具备相当好的现代数学修养和学习研究一些非线性的前沿的或跨学科的科学理论的能力.

为满足非数学专业博士生数学教学的需要,根据课程教学大纲的要求和近几年博士生的具体情况,我们在总结多年教学经验的基础上,精心编写了这本将提高现代数学修养和学习非线性理论的基础知识这两个目的有机结合的教材.

本教材共分为四部分:第一部分(第 1 章)为现代分析数学基础,主要包括抽象空间的拓扑结构、代数结构和测度结构以及线性泛函分析的基本知识,除包含学习本课程所必需的预备知识外,也为博士生进一步的后继学习和研究提供了一些必要的基本知识.已经有相当基础的学生可以跳过这一部分;第二部分(第 2 章和第 3 章)是非线性泛函分析和现代变分理论的基础知识,其中重点介绍了有很多应用的非线性映射的两种微分和隐函数定理;第三部分(第 4 章至第 6 章)为非线性动力系统的基础知识,主要包括分岔和混沌的基本理论,也重点介绍了研究分岔的奇异性理论;最后一部分仅用一章介绍了分形理论的基础知识.

本教材的特点是:针对非数学专业博士生已有的数学基础和学习本课程的目的,选材精当;注重相关概念或理论之间的联系;着重介绍一些非线性理论的基本知识和现代数学的重要理论和方法,而略去一些较艰深的数学证明,但仍保持较严谨的数学体系.

编写本教材时,除参考了国内外的有关书籍和文献外,还参考引用了陈志敏教授和朱大新教授多年前编写的有关讲义.作为天津大学研究生数学教学负责人之一的曾绍标教授积极支持和参加了编写工作,天津大学研究生院的领导和培养处的有关同志以及南开大学－天津大学刘徽应用数学中心的熊洪允教授对本教材的编写和修改都给予了很大的支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢.

由于本教材仍处于建设和改革的过程中,加之时间仓促,其中定会有不妥甚至错误之处,诚恳希望使用本教材的教师和博士生提出宝贵的意见,以便在教学中和重印时加以修正.

应用本教材时,建议教师根据各专业方向工科博士生的具体情况、课时安排和实际需要,选讲部分章节并配置一些习题,其余一些章节可作为学生自修研读的内容.

编者
2005 年 2 月于天津大学

目　　录

第 1 章　空间结构与映射

1.1　映射与势

集合之间的联系通过映射来实现,映射概念在数学中是基本的.本节简述映射的基本内容,并通过它定义集合的势,然后阐明可数集与不可数集的概念.

定义 1.1.1　设 A 和 B 是两个集合, $A,B\neq\varnothing$.如果按照某个确定的法则 f,使得 $\forall\, x\in A$,在 B 中都有唯一确定的元素 y 与 x 对应,则称 f 是一个从 A 到 B 的映射,记为 $f:A\to B$. y 称为 x 在 f 下的像,记为 $y=f(x)$. 集 A 称为 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$. 集 $\{y\in B:\exists\, x\in A \text{ s.t. } f(x)=y\}$ 称为 f 的值域,记为 $\mathscr{R}(f)$.

这里,“$\forall$”表示“任一”,“$\exists$”表示“存在”,“s.t.”表示“使得”,“$\varnothing$”表示空集.

定义 1.1.2　两个映射 f_1,f_2 称为相等的,如果它们都是从 A 到 B 的映射,且对每个 $x\in A$ 有 $f_1(x)=f_2(x)$.从 A 到 B 的一个映射 f 称为单射,若对每个 $y\in B$,至多只有一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$.单射也称为一一的映射.从 A 到 B 的一个映射 f 称为满射,若对每个 $y\in B$,都有至少一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$. 满射也称为映上的映射或覃射. 若 $f:A\to B$ 既是单射又是满射,则称 f 是 A 与 B 之间的一个一一对应或双射.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射, $A\subset X,B\subset Y$.我们用记号 $f(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 分别表示集合 $\{y\in Y:\exists\, x\in A \text{ s.t. } f(x)=y\}$ 和 $\{x\in X:f(x)\in B\}$,并分别称它们为 A 在 f 下的像集和 B 在 f 下的原像集.

若 $f:X\to Y$ 为映射,且 $A\subset X$,那么把 A 中元素按法则 f 对应到 Y 中元素,就得到一个 A 到 Y 的映射 f_1,当然 f_1 在 A 上的作用与 f 是一样的,我们称 f_1 为 f 在 A 上的限制,记为 $f|_A:A\to Y$. 当 $A\subset B$ 且映射 $f:A\to C$ 是 $g:B\to C$ 在 A 上的限制时,我们也称映射 g 是映射 f 在 B 上的一个延拓或扩张.

若 $f:X\to X$ 为映射,且对所有 $x\in X$ 有 $f(x)=x$,就称 f 是 X 上的恒等映射或单位映射.集 X 上的恒等映射可记为 i_X 或 Id_X,有时也简记为 I.

若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射,令 $h(x)=g(f(x))$, $\forall\, x\in X$,则 h 是从 X 到 Z 的映射,称为 f 与 g 的复合映射,记为 $h=g\circ f$ 或 $h=gf$.

容易证明下述定理.

定理 1.1.1　设 $f:X\to Y$ 为一个映射,则

(1) f 为单射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $g:Y\to X$,使 $gf=Id_X$;

(2) f 为满射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $h:Y\to X$,使 $fh=Id_Y$;

(3) f 为一一对应 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $f^{-1}:Y\to X$,使 $f^{-1}f=Id_X$ 且 $ff^{-1}=Id_Y$.

我们将上述定理中的映射 f^{-1} 称为一一对应 $f:X\to Y$ 的逆映射. 注意逆映射记号 f^{-1} 与原像集记号中 f^{-1} 的不同含义.

利用映射的概念可将两个集合的并与交的运算推广. 设有一个从集合 Λ 到基本集 X 的映射 f,则 $\forall \alpha\in\Lambda$,有 X 的唯一确定的子集 $A_\alpha=f(\alpha)$与之对应. 我们称$\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$为以 Λ 为指标集的一个集族,并分别定义这个集族的并与交为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\in X:\exists\,\alpha\in\Lambda,\text{s.t. }x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\in X:\forall\,\alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha\}.$$

在 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$或 $\Lambda=\mathbf{N}$ 的情形,$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 可分别写作$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 可分别写作$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

定理 1.1.2 设 $f:X\to Y$ 为映射,$A,B,A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$都是 X 的子集,则有

(1)$A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$;

(2)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,一般地,有 $f(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$;

(3)$f(A\cap B)\subset(f(A)\cap f(B))$,一般地,有 $f(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$.

定理 1.1.3 设 $f:X\to Y$ 为映射,$A\subset X$,而 $C,D,C_\alpha(\alpha\in\Lambda)$都是 Y 的子集,则有

(1)$C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$;

(2)$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$,一般地,有 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(C_\alpha)$;

(3)$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$,一般地,有 $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(C_\alpha)$;

(4)$f^{-1}(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$;

(5)$f^{-1}(C^{\mathrm{C}})=[f^{-1}(C)]^{\mathrm{C}}$,其中,$C^{\mathrm{C}}=Y-C$,$[f^{-1}(C)]^{\mathrm{C}}=X-f^{-1}(C)$;

(6)$A\subset f^{-1}[f(A)]$;

(7)$f(f^{-1}(C))\subset C$.

对于一个集合,最基本的问题之一是它含有多少个元素. 在集元素有限情况下,把它们数出来就行了,这实际上是把集合的元素与某个集合$\{1,2,\cdots,n\}$($n\in\mathbf{N}$)的元素一一对应起来(这里 $\mathbf{N}$ 为正整数集). 由此启发我们定出一个衡量任意集合含元素"多少"的方法.

定义 1.1.3 设 A,B 是两个集合. 若 A,B 都是空集,或者 A,B 非空且存在从 A 到 B 上的一个一一对应 $f:A\to B$,则称 A 与 B 是对等的或等势的集合,记为 $A\sim B$,$|A|=|B|$,或者 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 其中 $\overline{\overline{A}}$ 或$|A|$表示集 A 的势或基数,它是一切与 A 对等的集合共有的一个特性. 又若 A 与 B 的某个子集对等,则称 A 的势小于或等于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{A}}$;而若 A 与 B 的某个子集对等但不能与 B 本身对等,则称 A 的势小于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

显然,集合之间的对等关系满足:

(1)自反性:$A\sim A$,

(2)对称性:若 $A\sim B$,则 $B\sim A$,

(3)传递性:若 $A\sim B$, $B\sim C$,则 $A\sim C$,

因此它是一种等价关系. 确切地说,它是以一些集合为元素的任一集合上的一个等价关系.

注 在现代数学里, 集合 X,Y 的积集 $X\times Y$ 定义为全体由 X 中元素 a 和 Y 中元素 b 组成的有序对(a,b)(定义为集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$)所形成的集合,而集合 X 上的一个等价关系 R 定义为积集 $X\times X=\{(a,b):a,b\in X\}$的满足下列条件的一个子集:

(1)$\forall\,a\in X,(a,a)\in R$;

(2) $\forall a,b\in X,(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$;

(3) $\forall a,b,c\in X,\{(a,b),(b,c)\}\subset R\Rightarrow(a,c)\in R$.

当且仅当$(a,b)\in R$,可写 aRb,并可称 a 等价于b. 此外,元素 $a\in X$ 的等价类,记为$[a]$,定义为集合$\{x\in X:(x,a)\in R\}$.同时,全体等价类形成的集合$\{[a]:a\in X\}$称为 X(对于等价关系 R)的商集,记为 X/R .在一些特定的场合,例如,两个实数的差是整数时定为是等价的,可记相应的商集为 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$,又如,两个实数的差是一正数 T 的整数倍时定为是等价的,可记相应的商集为 $\mathbf{R}/T$,参见 6.1.

对于一个集合 A,若存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 A 与$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集对等,则称其为有限集,否则称其为无限集.有限集的势就是其所含元素的个数,空集的势就是数 0,于是势的概念就是有限集元素个数概念的推广,它反映出一切相互对等的集所共有的特性.我们称无限集的势为超穷数,下述定理是超穷数大小比较的基础.

定理 1.1.4(F. Bernstein)　设 A,B 为两个集合,若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$,且 $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$,则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明　不妨假设 $A\cap B=\varnothing$.由条件存在 $f:A\to B$ 和$g:B\to A$ 两个单射,现任取一个 $a\in A$,则 a 在g 下的原像在B 中可能不存在(此时称 a 是无前辈的),也可能是唯一的一个元素 b(此时称 b 为a 的前辈).同样可考虑每个 $b\in B$ 在f 下的原像.对 A 中元素a 可用这种方法追寻它的各代"前辈",则或者到某个 A 中无前辈的元a_0 处停止(此时称 a_0 为 a 的祖宗),或者到 B 中某个无前辈的元b_0 处停止(此时称 b_0 为 a 的祖宗),或者这种追寻过程没有尽头(此时称 a 无祖宗).

依此定义下列集合:

$A_1=\{a\in A:a$ 在A 中有祖宗$\}$;

$B_1=\{b\in B:b$ 在A 中有祖宗$\}$;

$A_2=\{a\in A:a$ 在B 中有祖宗$\}$;

$B_2=\{b\in B:b$ 在B 中有祖宗$\}$;

$A_3=\{a\in A:a$ 无祖宗$\}$;

$B_3=\{b\in B:b$ 无祖宗$\}$,

则这些集合互不相交,且 $f|_{A_1}$,$f|_{A_3}$和 $g|_{B_2}$分别是 A_1 与 B_1,A_3 与 B_3,B_2 与 A_2 之间的一一对应.定义 $h:A\to B$ 为

$$h(a)=\begin{cases} f(a), & a\in A_1\cup A_3,\\ g^{-1}(a), & a\in A_2,\end{cases}$$

则 h 是一一对应,故得 $A\sim B$,即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.证毕.

定义 1.1.4　凡能与正整数集 $\mathbf{N}$ 的一个子集对等之集合均称为可列集或可数集.可数无限集的势记为$\aleph_0$.

注　在有些文献中,所谓"可列集"相当于这里的可数无限集,所谓"至多可列集"则相当于这里的可数集.

显然,可数集的任一子集也是可数集.

由于 $\mathbf{N}$ 的元素可以排成一个无穷序列,故立即可得下述结果.

定理 1.1.5 集合 A 是可数集$\Leftrightarrow$集合 A 的全部元素可以排进一个无穷序列.

关于无穷序列的数学定义可参见定义 1.2.8 前面关于点列的叙述.

此定理在证明一些集合是可数集时很有用.

定理 1.1.6 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$都是可数无限集,令

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

则 S 是可数无限集.

证明 由于 S 包含可数无限集 A_1,故 S 是无限集.又设

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots\},n=1,2,\cdots.$$

考虑无限阵列:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \cdots \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} \arrow[d] & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

这个阵列含有 S 的全部元素,而这些元素可按箭头所指出的顺序排成一无穷序列:

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},\cdots,$$

因此 S 是可数集.证毕.

由此定理不难获得下述推论.

推论 1.1.1 设 Λ 是可数集,且对每个 $\alpha\in\Lambda$,A_α 是可数集.若 $T=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,则 T 是可数集.

推论 1.1.2 全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明 用 $\mathbf{Q}^+$,$\mathbf{Q}^-$ 分别表示正、负有理数集,则

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}.$$

令 $A_i=\left\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\frac{3}{i},\cdots\right\}$,则 A_i 是可数集,$i=1,2,\cdots$.于是 $\mathbf{Q}^+=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 是可数集.同理可证 $\mathbf{Q}^-$ 是可数集.所以 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\mathbf{Q}^-\cup\{0\}$是可数集.证毕.

下面的定理表明$\aleph_0$是超穷数中最小的.

定理 1.1.7 任一无限集 M 包含一个可数无限子集.

证明 由于 $M\neq\varnothing$,可从 M 中取一元素记为a_1,因为 M 是无限集,故 $M-\{a_1\}\neq\varnothing$,于是在 $M-\{a_1\}$中又可取一元素 a_2,显然 $a_2\neq a_1$,这样进行下去,设已取出 M 中互不相同的 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,由于 M 是无限集,$M-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\varnothing$,故可在 $M-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中取一元素 a_{n+1},它与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆不同,所以,由数学归纳法,我们得出一个由 M 中互异的元素作成的无穷序列:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$, 显然,集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是 M 的可数无限子集.证毕.

注 本定理的这一证明是不严格的,严格的证明需要用到选择公理,在此从略.此后的某些定理也有类似情况,但我们不再一一注明.

定义 1.1.5 不是可数集的无限集称为无限不可数集或简称为不可数集.

定理 1.1.8 实数集 $\mathbf{R}$ 是一个不可数集.

证明 由于可数集的子集是可数集,我们只需证明 $\mathbf{R}$ 的子集$[0, 1]$不是可数集就能得到 $\mathbf{R}$ 是不可数集的结论.用反证法.若无限集$[0, 1]$是可数的,则存在一个从正整数集 $\mathbf{N}$ 到$[0,1]$的一一对应 f,使

$$[0,1]=\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots\}.$$

设在十进制小数表示下,$f(i)=0.a_{i1}a_{i2}\cdots$, $i\in\mathbf{N}$ 其中 $a_{ij}\in\{0,1,\cdots,9\}$, $i,j\in\mathbf{N}$,则若取 $b_i\in(\{3,8\}-\{a_{ii}\})$, $i\in\mathbf{N}$,就使数 $B\equiv 0.b_1b_2\cdots$一方面在$[0,1]$中,另一方面又不在$\{f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots\}$中(数 B 在十进制表示中形式是唯一的,但对任 $i\in\mathbf{N}$,因 $b_i\neq a_{ii}$ 而有 $B\neq f(i)$),这是矛盾.证毕.

由映射 $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\tan\dfrac{(2x-1)\pi}{2}$是$(0,1)$与 $\mathbf{R}$ 之间的一个一一对应,知$(0,1)$与 $\mathbf{R}$ 等势.再由$(0,1)\subset[0,1]\subset\mathbf{R}$,应用定理 1.1.4,即得$[0,1]$与 $\mathbf{R}$ 等势.于是,若记 $\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\aleph_c$,则据定理 1.1.8 可知$\aleph_c>\aleph_0$.

利用实数的二进制表示还可证明$\aleph_c$是 $\mathbf{N}$ 的幂集 $2^{\mathbf{N}}$ 的势.这里,我们用 2^A 表示集 A 的幂集,即 A 的一切子集构成的集.A 的幂集也可记为 $\mathscr{P}(A)$.

下面的定理表明,不可能存在一个最大的势.

定理 1.1.9 设 A 是一个非空集合,则$\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$.

证明 显然,$A\sim\{\{a\}:a\in A\}\subset 2^A$,故只需证 A 与 2^A 不对等即可.

假设 $A\sim 2^A$,则存在 A 与 2^A 间的一个一一对应φ,令 $B=\{a\in A:a\notin\varphi(a)\}\subset A$.因 $B\in 2^A$,从而应有 $b\in A$ 使$\varphi(b)=B$.但这时,$b\in B$ 或$b\notin B$ 都不能成立:

$$b\in B\Rightarrow b\in\varphi(b)\Rightarrow b\notin B,$$
$$b\notin B\Rightarrow b\notin\varphi(b)\Rightarrow b\in B.$$

这一矛盾说明 A 不能与 2^A 对等.从而$\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$.证毕.

是否存在势 β 使 $\aleph_0<\beta<\aleph_c$?著名的连续统假设断言,这样的 β 不存在.已经证明,这一假设对于现有的集合论公理系统是独立的.

1.2 距离空间与连续映射

在抽象的集合中引进距离(度量),主要目的在于刻画集合中元素的“任意逼近”概念,使集合本身成为带有某种结构的“空间”,其元素可称为“点”.我们将讨论距离空间中具有各种性质的点集,也要讨论与处理“极限”问题紧密联系的映射的连续性概念.

定义 1.2.1 设 X 是一个非空集合.如果一个映射 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 满足下列三个条件:

(1)$d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,

(2)$d(x,y)=d(y,x)$,

(3)$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

其中 x,y,z 是X 中任意元素,则称 d 为X 上的一个度量或距离.

例 1.2.1 在集 $\mathbf{R}^n=\{x:x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), x_i\in\mathbf{R}, 1\leqslant i\leqslant n\}$上定义函数

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$d_{\infty}(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|,$$

或

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

则 d_1,d_{∞} 或 d 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离，后者是通常的.

例 1.2.2 在$[a,b]$上定义的全体连续的实值(或有时考虑复值)函数所构成的集记为 $\mathrm{C}[a,b]$. 若定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,\ \forall\, x,y\in \mathrm{C}[a,b],$$

则 d 是 $\mathrm{C}[a,b]$上的距离，因为 d 显然满足定义1.2.1中的条件(1)(2)，而且

$$\begin{aligned}d(x,z)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|\\&=d(x,y)+d(y,z),\end{aligned}$$

故 d 也满足条件(3).

定义 1.2.2 如果在非空集合 X 上定义了一个距离 $d:X\times X\to\mathbf{R}$，则 X 与 d 一起，称为一个度量空间或距离空间，记作(X,d)或简记为 X. X 中元素和子集分别称为(X,d)中的点(或元素)和子集.

例 1.2.3 集 $\mathrm{C}[a,b]$按例 1.2.2 中定义的距离 d 成为一个距离空间，常简记为 $\mathrm{C}[a,b]$. 今定义

$$\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t,\ \forall\, x,y\in \mathrm{C}[a,b],$$

则$(\mathrm{C}[a,b],\rho)$也是一个距离空间.

例 1.2.4 设 X 是任一非空集合，对任意的 $x,y\in X$，定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\1, & x\neq y,\end{cases}$$

则易验证(X,d)是一个距离空间，称之为离散距离空间.

设 A 是距离空间(X,d)的非空子集，则 d 在 $A\times A$ 上的限制显然是 A 上的一个距离. 因此$(A,d|_{A\times A})$也是一个距离空间，称之为(X,d)的一个子空间，简记为(A,d)或 A.

从已知的距离空间引出新的距离空间，除作为子空间外，还可作为积空间. 设(X_1,d_1)和(X_2,d_2)是两个距离空间，令 $X=X_1\times X_2$，且令

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=([d_1(x_1,y_1)]^2+[d_2(x_2,y_2)]^2)^{\frac{1}{2}},\ \forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X,$$

则易验证(X,d)是一个距离空间，称为(X_1,d_1)和(X_2,d_2)的积空间，记作

$$(X_1,d_1)\times(X_2,d_2),\text{或 } X_1\times X_2.$$

上述空间的乘积可以推广到多于两个空间的情形. 这样，$\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$可以理解为 n 个 $\mathbf{R}$ 的乘积. 此外，常把 $\mathbf{R}$ 写为 $\mathbf{R}^1$.

定义 1.2.3 如果距离空间(X_1,d_1)与(X_2,d_2)之间存在一个一一对应 f，使得

$$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y)),\ \forall\, x,y\in X_1.$$

则称 f 是从(X_1,d_1)到(X_2,d_2)上的等距映射,并称这两个距离空间是等距同构的.

开集、闭集、闭包和收敛点列是距离空间中的四个重要的基本概念,我们在邻域的基础上给出它们的定义.

定义 1.2.4　设 x_0 是距离空间(X,d)中一点,ε 是一正数,则集

$$B(x_0;\varepsilon)=\{x\in X:d(x,x_0)<\varepsilon\}$$

称为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的开球,也称为点 x_0 在(X,d)中的 ε 邻域或一个邻域;集

$$\widetilde{B}(x_0;\varepsilon)=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant\varepsilon\}$$

称为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的闭球.

“球”这个词来源于通常的三维空间 $\mathbf{R}^3$. 在一般的距离空间中,它不一定再具有球的外形了.

注　在距离空间(X,d)中的子集 A 也常称为某点 $x_0\in X$ 的一个邻域,若存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x_0;\varepsilon)\subset A$.

例 1.2.5　在 $C[a,b]$按例 1.2.2 定义距离所成的距离空间中,若用 θ 表示$[a,b]$上恒等于零的函数,则 $B(\theta;1)$是所有图像在$[a,b]$上严格含于以横轴为中心线、宽度为 2 的矩形区域里的连续函数的全体.

例 1.2.6　在离散距离空间 X 中,如果 $\varepsilon\in(0,1]$,则 $B(x_0;\varepsilon)=\{x_0\}$;而如果 $\varepsilon>1$,则 $B(x_0;\varepsilon)$是整个空间 X.

定义 1.2.5　设 A 是(X,d)的一个子集,若 $x\in A$ 且存在一邻域 $B(x;\varepsilon)\subset A$,则称 x 为 A 的一个内点. 若 $x\in A^C$,且存在一邻域 $B(x;\varepsilon)\subset A^C$,则称 x 为 A 的一个外点. 若 $x\in X$ 既非 A 的内点也非 A 的外点,则称 x 为 A 的一个边界点. A 的内点全体称为 A 的内部,记为 A^o. A 的外点全体称为 A 的外部,记为 A^e. A 的边界点全体称为 A 的边界,记为 A^b.

显然,对任一 $A\subset(X,d)$, $X=A^o\cup A^e\cup A^b$.

定义 1.2.6　设 A 是(X,d)是一个子集,若 $A=A^o$,即对任一 $x\in A$ 存在 $B(x;\varepsilon)\subset A$($\varepsilon>0$),则称 A 为(X,d)中的一个开集;若 $A^C=X-A$ 是(X,d)中的开集,则称 A 为(X,d)中的一个闭集.

容易证明,距离空间中的任一开球 $B(x;\varepsilon)$(闭球 $\widetilde{B}(x;\varepsilon)$)都是开集(闭集),这反映了它们的名称中用字“开(闭)”的合理性.

例 1.2.7　在 $\mathbf{R}^1$ 中,设 $a,b\in\mathbf{R}$ 满足 $a<b$,则开区间(a,b)是开集,闭区间$[a,b]$是闭集,而$[a,b)$既不是开集也不是闭集.

例 1.2.8　若(X,d)中集 X 是有限集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$($n\in\mathbf{N}$),令 ε 适合

$$0<\varepsilon<\min_{1\leqslant i,j\leqslant n}d(x_i,x_j),$$

则 $B(x_i;\varepsilon)=\{x_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$,由此不难得出 X 中任一子集既是开集又是闭集.

定理 1.2.1　(X,d)中开集具有下列三性质:

(1) X 与 $\varnothing$ 是开集;

(2) A 与 B 是开集 $\Rightarrow A\cap B$ 是开集;

(3) $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$都是开集 $\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是开集.

证明　(1)由邻域及内点定义可知,X 中每一点都是 X 的内点,故 X 是开集. 空集的内部是空集,故空集也是开集.

(2)若 $A\cap B=\varnothing$,由(1)知其为开集.若 $A\cap B\neq\varnothing$,因 A 与 B 是开集,故对任一 $x\in A\cap B$,存在 $B(x;\varepsilon_1)\subset A$,$B(x,\varepsilon_2)\subset B$,于是取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,就有 $B(x;\varepsilon)\subset A$,$B(x;\varepsilon)\subset B$,故 $B(x;\varepsilon)\subset A\cap B$,从而 x 是 $A\cap B$ 的内点.所以 $A\cap B$ 是开集.

(3)对任一 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使 $x\in A_{\lambda_0}$.又因 A_{λ_0} 是开集,存在 $B(x;\varepsilon)\subset A_{\lambda_0}$,从而 $B(x;\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,故 x 是 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的内点.所以 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是开集.

根据定义 1.2.6,并利用 De Morgan 公式容易得出如下定理.

定理 1.2.2 (X,d)中的闭集具有下列三性质:

(1)X 与 $\varnothing$ 是闭集;

(2)A 与 B 是闭集 $\Rightarrow A\cup B$ 是闭集;

(3)$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$都是闭集 $\Rightarrow\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是闭集.

定义 1.2.7 设 A 是(X,d)的一个子集,$x\in X$.如果 $\forall\varepsilon>0$,$B(x;\varepsilon)\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,则称 x 为 A 的一个聚点.A 的全体聚点所成集合称为 A 的导集,记为 A^d.并集 $A\cup A^d$ 称为 A 的闭包,记为 $\bar{A}$.$A-A^d$ 中的点称为 A 的孤立点.若 A 是无孤立点的闭集,则称 A 为一个完全集.

对于(X,d)中两个子集 A 与 B,若 $\bar{A}\supset B$,我们称 A 在 B 中稠密.特别,若 $A\subset(X,d)$在 X 中稠密,则称 A 是 X 的一个稠子集.另一方面,当 $\bar{A}$ 的内部是空集时,称 A 是(X,d)中的疏子集,或说 A 是无处稠密的或是疏朗的.

显然,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 的稠子集;$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$是 $\mathbf{R}^1$ 的疏子集,它有一个唯一的聚点 $0\notin A$.

下面的例子给出一个著名的疏朗的完全集.

例 1.2.9 Cantor 三分集 A_0 的构造过程如下:将闭区间$[0,1]$用分点$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$三等分,删去中间的开区间 $G_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,剩下两个闭区间 $I_0=\left[0,\frac{1}{3}\right]$,$I_1\left[\frac{2}{3},1\right]$,其长度均为$\frac{1}{3}$;把剩下的两个闭区间分别再三等分,再分别删去中间的开区间:$G_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$,$G_2^{(2)}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$,剩下四个闭区间:$I_{00}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$,$I_{01}=\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$,$I_{11}=\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$,$I_{10}=\left[\frac{8}{9},1\right]$.其长度均为$\frac{1}{3^2}$,如此继续进行下去,在第 n 次三等分时删去 2^{n-1} 个开区间(称为第 n 级区间)是:$G_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right)$,$G_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right)$,$\cdots$,$G_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$,剩下的 2^n 个闭区间 $I_{00\cdots0},\cdots,I_{11\cdots1}$ 的长度均为$\frac{1}{3^n}$,$n=1,2,\cdots$.这样便得到所谓 Cantor 三分集 A_0 与 Cantor 开集 G_0(所有被删去的开区间之并):

$$G_0=G_1^{(1)}\cup G_1^{(2)}\cup G_2^{(2)}\cup\cdots\cup G_1^{(n)}\cup G_2^{(n)}\cup\cdots\cup G_{2^{n-1}}^{(n)}\cup\cdots,$$

$$A_0=[0,1]-G_0=[0,1]\cap G_0^{C}.$$

Cantor 三分集 A_0 有如下性质:

(1)A_0 是完全集.因为 A_0 是闭集,只需再证 A_0 不含孤立点,即 $A_0\subset A_0^d$.由 A_0 的定义

知,在第 n 次删去 2^{n-1} 个开区间后,剩下的 2^n 个闭区间的长度均为 $\frac{1}{3^n}$, $n=1,2,\cdots$,记这 2^n 个闭区间为 $I_{s_1s_2\cdots s_n}$ ($s_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots,n$),于是 $\forall x\in A_0$, $\varepsilon>0$,总有正整数 N 存在,使 $\frac{1}{3^N}<\varepsilon$,且 $x\in$ 某个 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$,从而 $I_{s_1s_2\cdots s_N}\subset B(x;\varepsilon)$. 因闭区间 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 的两个端点都是属于 A_0 的点,因此 $(B(x;\varepsilon)-\{x\})\cap A_0\neq\varnothing$,即 $x\in A_0^d$. 这说明 $A_0\subset A_0^d$.

(2)A_0 是疏朗集. 因 $A_0=\bar{A}_0$ 不能包含任何内点(否则,有某个 $x\in A_0$ 及一个正数 $\varepsilon>0$,使得 $B(x;\varepsilon)\subset A_0$,但如(1)中所得,$x\in$ 某个 $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 而 $I_{s_1s_2\cdots s_N}\subset B(x;\varepsilon)$, $I_{s_1s_2\cdots s_N}$ 中间的占三分之一长度的开区间含于 G_0,故有 $B(x;\varepsilon)\cap G_0\neq\varnothing$,此与 $B(x;\varepsilon)\subset A_0$ 矛盾!),所以 A_0 是疏朗集.

由(1)、(2)知,Cantor 三分集 A_0 是 $\mathbf{R}^1$ 中疏朗的完全集.

容易证明下述定理.

定理 1.2.3　设 A 是 (X,d) 的一个子集,则

(1)$\bar{A}=A\cup A^b$;

(2)$\bar{A}$ 是闭集;

(3)A 是闭集 $\Leftrightarrow A=\bar{A}$.

定理 1.2.4　(X,d) 中闭包具有下列四性质:

(1)$\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2)$A\subset\bar{A}$;

(3)$\bar{\bar{A}}=\bar{A}$;

(4)$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

集 X 中的一个无穷点列(或称无穷序列,简称点列或序列)就是一个从 $\mathbf{N}$ 到 X 的映射. 通俗地说,若 $f:\mathbf{N}\to X$ 是映射,则称

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

为 X 中一个点列,常记作 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 或 $\{x_n\}$,其中 $x_n=f(n)$, $n=1,2,\cdots$.

定义 1.2.8　设 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 是 (X,d) 中一个点列,$x_0\in X$. 若 $n\to\infty$ 时有 $d(x_n,x_0)\to0$,则称 x_0 为 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 的一个极限点,或称 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 收敛到点 x_0,记为 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

容易证明,距离空间中收敛点列的极限点是唯一的.

定理 1.2.5　(X,d) 的子集 A 以 x_0 为聚点 $\Leftrightarrow$ 存在一个收敛于 x_0 的由 $A-\{x_0\}$ 中不同点组成的点列.

定义 1.2.9　(X,d) 中子集 A 称为是有界的,如果存在某个开球 $B(x_0;\varepsilon)$,使得

$$A\subset B(x_0;\varepsilon).$$

易证在 (X,d) 中,集 A 有界 $\Leftrightarrow\operatorname{diam}A<+\infty$. 这里 $\operatorname{diam}A$ 称为 A 的直径,定义为

$$\operatorname{diam}A=\begin{cases}\sup\{d(x,y):x,y\in A\}, & \text{当 } A\neq\varnothing,\\ 0, & \text{当 } A=\varnothing.\end{cases}$$

显然,若点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 收敛,则集 $\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是有界的,反之不一定成立.

下面,我们把数学分析中连续函数的概念推广到距离空间上.

定义 1.2.10　设 X,Y 是两个距离空间,$f:x\to Y$ 是映射,点 $x_0\in X$. 如果对 $f(x_0)$ 在 Y

中任一给定的邻域$B(f(x_0);\varepsilon)(\varepsilon>0)$,存在 x_0 在 X 中一个邻域$B(x_0;\delta)(\delta>0)$,使得

$$f(B(x_0;\delta))\subset B(f(x_0);\varepsilon),$$

则称 f 在点x_0 连续.若 f 在X 中每一点连续,则称 $f:X\to Y$ 为连续映射.

我们略去证明而指出下述结论.

定理 1.2.6 设(X,d_1),(Y,d_2)是两个距离空间.对于映射 $f:X\to Y$,下列五个条件两两等价:

(1)f 是连续映射;

(2)Y 中的每一开集在f 下的原像都是X 中的开集;

(3)Y 中的每一闭集在f 下的原像都是X 中的闭集;

(4)$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subset X$;

(5)若 X 中点列$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$收敛于点 $x\in X$,则在 Y 中点列$\{f(x_n)\}_{n\geqslant 1}$收敛于点 $f(x)$.

定义 1.2.11 设 f 是从距离空间X 到距离空间Y 的映射,$\Omega\subset X$.称 f 在Ω 上连续,若 f 在 Ω 中每点连续;称 f 在Ω 上一致连续,若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得只要 $x_1,x_2\in\Omega$ 满足$d(x_1,x_2)<\delta$ 时,就有 $d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

在实数集里,一个点列是收敛的当且仅当点列是 Cauchy 序列,这实际上反映了实数的完备性,现在把有关概念推广到距离空间上来.

定义 1.2.12 称(X,d)中一点列$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$为一个 Cauchy 序列,如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,\ \forall n,m\geqslant n_\varepsilon.$$

若(X,d)的子集 M 中的每一 Cauchy 序列都收敛于 M 中的点,则称 M 是完备的;当(X,d)本身是完备的,则称(X,d)为完备的距离空间.

显然,空间 $\mathbf{R}^n$ 是完备的.任何离散空间也是完备的.非完备空间在应用上往往不方便,例如在这种空间中,方程可能无解.存在确定的方法能使非完备的距离空间完备化,方法的实质是把所有的 Cauchy 序列作为新的元素增加到原空间中去.

在完备的距离空间中,我们有下述重要的不动点原理.

定理 1.2.7(Banach 压缩映射不动点原理) 设(X,d)是完备的距离空间,$f:X\to X$ 是X 上一个压缩映射,即存在一个常数 $\alpha\in[0,1)$(称为 f 的压缩比或压缩率),使得

$$d(f(x),f(y))\leqslant\alpha d(x,y),\ \forall x,y\in X,$$

则存在唯一的点 $\bar{x}\in X$,使得 $f(\bar{x})=\bar{x}$.称 $\bar{x}$ 为f 的不动点.

证明 先证存在性.任取一点 $x_0\in X$,不妨假设由递推关系式

$$x_{n+1}=f(x_n),\ n=0,1,2,\cdots$$

产生一个无穷点列$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$.重复运用映射的压缩性及距离的三角不等式性质,得到

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p},x_n)&=d(f(x_{n+p-1}),f(x_{n-1}))\\
&\leqslant\alpha d(x_{n+p-1},x_{n-1})\\
&\leqslant\alpha^2 d(x_{n+p-2},x_{n-2})\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant\alpha^n d(x_p,x_0)\\
&\leqslant\alpha^n[d(x_p,x_{p-1})+d(x_{p-1},x_{p-2})+\cdots+d(x_1,x_0)]
\end{aligned}$$