

陀螺理论与应用

TUOLUOLILUNYUYINGYONG●

北京航空航天大学出版社

●以光衢 编著

简 介

本书共九章,包括:运动学基础的第一章和属运动学的四元数与刚体定位;转子型陀螺的质量几何与动力学基础;自由陀螺运动的解析法和几何法;外力作用下的陀螺运动;框架支承陀螺;闭环陀螺组成和特点;误差补偿;光学陀螺,包括激光和光纤陀螺。

本书可作为陀螺与惯性导航、飞行控制专业的研究生、本科生使用,也可供从事这方面的工程技术人员参考。

责任编辑 姜 毅

陀 螺 理 论 与 应 用

以光衢 编著

TUOLUOLILUN YU YINGYONG

北京航空航天大学出版社出版 北京通县觅子店印刷厂印装

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

787×1092 1/16 印张:19 字数:486千字

1990年11月第一版 1990年11月第一次印刷 印数:1500册

ISBN 7-81012-180-4/TH·009 定价:4.10元

前 言

陀螺理论与应用的内容十分丰富。应当说,陀螺作为刚体定点运动的理论已十分详尽,它技术应用范围广。从福科1852年1月利用陀螺给地球的自转以新的证明开始,现在陀螺已广泛应用于航空、航天、航海、大地测量等领域。高精度惯性导航技术的发展向陀螺提出了新的要求。

●陀螺古典理论,尤其是重陀螺的理论,曾对数学力学工作者产生巨大的吸引力,对获得非线性运动方程的可能精确解,曾作了巨大的贡献。

●继机电型转子陀螺后,新型支承原理的陀螺,以至于光学陀螺也获得发展和应用。

●陀螺作为研究对象已不仅限于力学范畴,闭环陀螺的研究方法就涉及控制理论的观点和方法。

●研究刚体运动学的四元数理论和方法显示出优越性。

因此,本书在内容的安排上注意到如下方面:

●选择陀螺有关理论中最基本的内容,避开繁琐的缺乏应用意义的部分,因此选择了欧拉情况 and 对称重陀螺的拉格朗日情况,至今这些理论仍有实际意义。

●转动物体普遍存在陀螺力矩和陀螺效应,讨论了工程技术中的这种现象,使陀螺具有更广泛的意义。

随着陀螺技术的发展,它在解决高速转子的支承和驱动方式方面取得了新的进步。五十年代出现的液浮陀螺以及近二十年来发展的静电陀螺、挠性支承陀螺都是陀螺转子在支承方式上的创新;根据物理现象创造的其它类型陀螺的工作也取得很大进展,如压电陀螺,振动陀螺和流体转子陀螺等。由Sagnac效应研制的光学陀螺是有发展前景中的一类。陀螺这一名词已发展到表示没有转子而功能与经典陀螺等同的装置。

●结合陀螺定点运动基本理论的应用,在自由陀螺中讲述了静电陀螺,在闭环陀螺中讲述了动力调谐陀螺,在第九章讲述了光学陀螺。框架支承陀螺被单独作为一章,本章讲述了动基座运动方程及简化,这就从更一般性的情况得出简化的陀螺技术方程。框架误差的推导方法简单,容易掌握,这是在应用框架陀螺时常遇到的问题。

●闭环陀螺是陀螺技术应用的发展,本书对闭环陀螺作了较多和深入的讨论,还讨论了高精度陀螺应用中的误差补偿问题。单独写第七章闭环陀螺是本书适应陀螺技术发展的一个特点。

利用矩阵演算方法进行向量变换适合于计算机的应用。四元数理论作为向量旋转已有一百多年的历史,由于计算机的广泛普及和应用,给这个理论带来了新的生机。对同一问题,四元数方法较其他方法计算时间少,计算容量要求小。将四元数用于定位,它既代表一个实际转动,又是一个变换算子,为解决刚体运动学、导航姿态、空间机构等问题,提供了一种方便的工具。注意到应用理论的发展,将四元数与刚体定位列入第二章,是本书的另一特点。

作为运动学基础知识,第一章编写了陀螺及其应用,尤其是惯性导航的应用中坐标变换

的基本方法和理论。这些内容的掌握对学习陀螺和惯性导航的文献和资料会带来方便。

在各章中都注意了所述基本理论和方法的应用。

“陀螺仪”是测量物体相对惯性空间转角或角速度的装置。本书没有专门用这个名词，因为陀螺理论讨论的是更一般性的模型。本书中提到的某些陀螺，应是陀螺仪的意思，那是不言而喻，容易了解的。

本书的主要对象是陀螺与惯性导航的研究生、大学本科生及工程技术人员。

由袁宜之、蓝晓月、伊竞、林体同志参加了部分编写工作；张维叙、靳伟同志对第九章进行了修改、补充；陈峰浴同志对本书提出宝贵意见；全书插图由孙奎兰同志所描。对以上同志深表谢意。

书中存在着缺点和错误，敬请读者批评指正。

目 录

第一章 运动学..... (1)

§1.1 向量及其矩阵.....	(2)
§1.2 方向余弦矩阵及其正交性.....	(5)
§1.3 两类欧拉角的方向余弦矩阵.....	(9)
§1.4 用向量角描述刚体的角位置.....	(13)
1.4.1 有限转角和小转角.....	(13)
1.4.2 接近重合的坐标系的坐标变换.....	(15)
§1.5 刚体的角速度.....	(16)
§1.6 角速度矩阵.....	(18)
§1.7 以欧拉角表示的角速度矩阵.....	(21)
§1.8 相似变换及其应用.....	(22)
§1.9 转动方向余弦矩阵的微分方程.....	(24)
§1.10 角速度向量变换.....	(26)
§1.11 哥氏定理.....	(27)
§1.12 速度、加速度及其变换.....	(28)
§1.13 在地球附近运动的物体坐标系选取与变换.....	(30)
1.13.1 实用的惯性参考系.....	(31)
1.13.2 经度、纬度及当地地理坐标系.....	(34)
1.13.3 当地地平坐标系和机体坐标系.....	(34)
§1.14 地球.....	(35)

第二章 四元数与刚体定位..... (39)

§2.1 四元数的表示方法.....	(39)
§2.2 四元数代数.....	(41)
2.2.1 加减法、乘积.....	(41)
2.2.2 共轭四元数与范数.....	(45)
2.2.3 三个四元数相乘.....	(46)
2.2.4 四元数除法.....	(47)
§2.3 用四元数变换描述空间定点转动.....	(49)
§2.4 用四元数变换描述转动坐标变换.....	(52)
§2.5 利用旋转定理建立转动四元数与方向余弦矩阵的关系.....	(54)
§2.6 用瞬时转轴和有限转角表示的方向余弦矩阵.....	(55)
§2.7 合成转动的演算.....	(57)
§2.8 角速度、速度、加速度向量变换.....	(59)

2.8.1	角速度向量变换	(59)
2.8.2	速度、加速度向量变换	(60)
§2.9	四元数微分方程	(61)
2.9.1	四元数微分方程推导	(61)
2.9.2	四元数微分方程的解	(64)
2.9.3	四元数微分方程的数值积分	(65)
§2.10	四元数在空间飞行器运动控制中的应用	(68)
2.10.1	姿态的稳定	(69)
2.10.2	姿态的机动(变轨)控制	(72)
2.10.3	轨道坐标系的修正	(72)
第三章	质量几何与动力学基础	(75)
§3.1	转动惯量与惯量积	(75)
§3.2	惯量椭球与惯量主轴	(79)
§3.3	刚体的一般运动、动能、动量矩	(85)
3.3.1	一些结论	(85)
3.3.2	动能	(86)
3.3.3	动量矩	(87)
§3.4	主轴、转动轴及动量矩轴	(89)
§3.5	动量矩定理、陀螺运动方程	(90)
3.5.1	动参考系的欧拉方程	(90)
3.5.2	欧拉方程的四元数形式	(92)
3.5.3	第二类拉格朗日方程	(93)
第四章	自由陀螺运动	(96)
§4.1	椭圆函数理论的某些知识	(96)
§4.2	自由陀螺运动的古典研究(欧拉情况)	(98)
§4.3	主轴的运动	(104)
§4.4	陀螺绕惯性主轴旋转的稳定性	(106)
§4.5	陀螺的规则进动	(110)
4.5.1	规则进动的定(动)瞬时轨迹面方程	(110)
4.5.2	平衡对称陀螺的规则进动	(112)
4.5.3	$A=B=C$ 的规则进动	(115)
§4.6	自由陀螺运动研究的几何方法	(117)
4.6.1	几何描绘的基本途径	(117)
4.6.2	本体极迹方程	(120)
4.6.3	用本体极迹研究转动运动的稳定性	(124)
§4.7	应用——兼讨论阻尼对规则进动的影响	(124)
4.7.1	静电支承陀螺的基本组成和原理	(125)
4.7.2	静电支承陀螺的自然规则进动	(127)
4.7.3	阻尼对规则进动的影响	(130)

第五章 陀螺在外力作用下的运动	(133)
§5.1 陀螺力矩与陀螺效应.....	(133)
5.1.1 定轴转动	(133)
5.1.2 绕任意轴的转动	(138)
§5.2 外力的作用.....	(141)
5.2.1 力矩的作用	(141)
5.2.2 撞击的作用	(142)
§5.3 重陀螺定点运动问题的综述.....	(145)
§5.4 轴对称重陀螺的定点运动 (拉格朗日情况)	(148)
§5.5 轴对称重陀螺的章动方程积分与分析.....	(150)
§5.6 重陀螺的规则进动.....	(155)
§5.7 重陀螺运动的稳定性.....	(157)
第六章 框架支承陀螺	(162)
§6.1 前言.....	(162)
§6.2 动基座上二自由度陀螺运动方程.....	(163)
6.2.1 坐标系	(163)
6.2.2 运动微分方程	(164)
§6.3 静基座运动方程及简化.....	(167)
6.3.1 关于力矩 M_{y1} 、 M_{x2} 、 M_{z2}	(168)
6.3.2 简化	(170)
§6.4 动基座上的进动方程.....	(172)
6.4.1 进动方程	(172)
6.4.2 表观运动	(174)
6.4.3 运载体速度的影响	(175)
§6.5 技术方程分析方法的简述.....	(177)
§6.6 基座运动引起的陀螺漂移.....	(180)
§6.7 陀螺的一些运动现象.....	(182)
6.7.1 转子的动不平衡影响	(182)
6.7.2 沿转子轴方向力矩的影响	(182)
6.7.3 陀螺的起动和停转特性	(183)
6.7.4 章动漂移	(184)
§6.8 单自由度陀螺运动方程.....	(185)
6.8.1 运动方程	(185)
6.8.2 速率陀螺	(186)
6.8.3 积分陀螺	(187)
§6.9 框架误差.....	(188)
第七章 闭环陀螺	(197)
§7.1 动力调谐陀螺.....	(197)

7.1.1	结构与工作原理	(197)
7.1.2	平衡环的振荡(扭摆)运动	(198)
7.1.3	平衡环的动力调谐	(200)
7.1.4	动力调谐陀螺的调谐	(201)
7.1.5	动力调谐陀螺的传递函数	(202)
§7.2	力平衡回路的类型	(206)
7.2.1	模拟力平衡回路	(205)
7.2.2	数字力平衡回路	(206)
§7.3	调宽脉冲力平衡回路的基本组成	(209)
§7.4	一种调宽脉冲伺服放大器原理线路	(216)
7.4.1	前置放大器	(210)
7.4.2	带通滤波器	(210)
7.4.3	解调器	(212)
7.4.4	频率校正网络	(213)
7.4.5	脉宽调制器	(215)
§7.5	调宽脉冲力平衡回路误差通道的传递特性	(219)
7.5.1	交流系统理论分析	(221)
7.5.2	力平衡回路交流通道等效传递函数	(224)
7.5.3	频率校正网络的传递函数	(227)
7.5.4	脉宽调制器传递函数	(227)
7.5.5	力平衡回路方块图	(227)
§7.6	设计力平衡回路的若干约束	(228)
7.6.1	数据分辨率	(228)
7.6.2	数据的量化误差约束	(229)
7.6.3	采样约束条件	(229)
7.6.4	影响误差信号处理器动态范围的信号	(231)
7.6.5	随机噪声	(233)
§7.7	力平衡回路的设计方法	(234)
7.7.1	调谐陀螺的逆阵解耦	(234)
7.7.2	回路的数字仿真	(242)
7.7.3	数字力平衡回路	(242)
7.7.4	控制解耦与测量解耦	(247)

第八章 误差补偿

§8.1	陀螺漂移	(250)
§8.2	误差力矩的分析	(251)
8.2.1	支承中的摩擦力矩	(251)
8.2.2	内框架组件及外框架静不平衡——与加速度成比例的误差力矩	(253)
8.2.3	结构非等弹性——与加速度平方有关的误差力矩	(255)
§8.3	漂移的静态数学模型与误差补偿	(256)
§8.4	漂移的动态数学模型与误差补偿	(258)

§8.5 圆锥误差	(260)
8.5.1 圆锥运动	(260)
8.5.2 圆锥误差	(262)
8.5.3 整流漂移误差的误差源	(263)
§8.6 随机漂移误差模型 (简述)	(265)
8.6.1 相关分析法	(266)
8.6.2 白噪声和几种有色噪声	(266)
8.6.3 时间序列分析法	(269)
8.6.4 陀螺随机模型的滤波与平滑估计	(270)
第九章 光学陀螺	(273)
§9.1 前言	(273)
§9.2 激光陀螺	(274)
9.2.1 无源的Sagnac干涉仪	(274)
9.2.2 激光陀螺的工作原理	(275)
9.2.3 混合两激光束的方案	(278)
§9.3 激光陀螺的误差因素	(279)
§9.4 光纤陀螺	(282)
9.4.1 工作原理	(282)
9.4.2 提高灵敏度的方法	(284)
9.4.3 全光纤陀螺和集成光学光纤陀螺	(287)
附录一 典型环节算法	(290)
附录二 主要程序	(292)
参考文献	(294)

第一章 运 动 学

本章陀螺及在惯导应用中的运动学知识，方向余弦矩阵，角速度矩阵，矢量变换的矩阵演算，近地运动中的坐标系选取与变换。

刚体的移动、定轴转动、定点转动都是刚体运动的特殊情况。刚体运动的一般情况，即刚体在空间能得到任意位置的一般情况，是刚体的一般运动。

设不受约束的自由刚体对固定参考系 $OXYZ$ （图1-1）有一般运动。另外，刚体内任意点 O' 固连于坐标系 $O'xyz$ ， $O'xyz$ 为动坐标系。在 O' 点作坐标系 $O'X'Y'Z'$ ，三坐标轴在刚体运动时分别保持与固定参考系三坐标轴 X 、 Y 、 Z 平行。

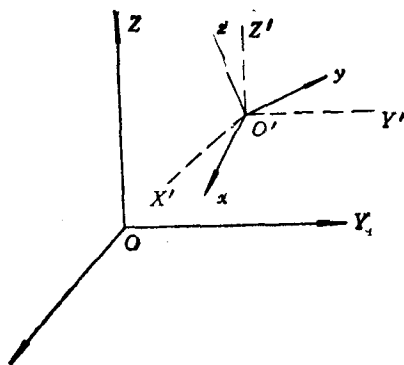


图 1-1 刚体一般运动坐标系

当动系 $O'xyz$ 的位置确定后，自由刚体在空间的位置也就完全确定。为此：①需要确定动系原点 O' 的位置 (X_o, Y_o, Z_o) ，②需要确定 $O'xyz$ 对于 $O'X'Y'Z'$ 的位置，这个位置可由三个欧拉角 ψ 、 θ 、 φ 确定。因此，当刚体作一般运动时，

$$\left. \begin{aligned} X_{o'} &= X_o(t), & Y_{o'} &= Y_o(t), & Z_{o'} &= Z_o(t) \\ \psi &= \psi(t), & \theta &= \theta(t), & \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\}$$

是其运动方程式。

将刚体作一般运动的六个运动方程应用于陀螺和惯性导航研究时，都需要相对一定的参考系，而且往往还需要用到几个不同的坐标系，而这些坐标系间还有相对运动。将一个坐标系里的运动（角速度、动量矩、加速度、外力矩等）变换到另一坐标系去是经常遇到的。

确定坐标系之间的方位关系、进而建立一个坐标系里的运动向另一坐标系变换的方法有多种，可分为三类：三参数法，四参数法和九参数法。

三参数法是利用三个欧拉角确定刚体绕固定点运动角位置的方法。

四参数法主要是四元数。

九参数法是基于方向余弦的概念，亦称方向余弦法。

§ 1.1 向量及其矩阵

图1-2在直角坐标系 $OXYZ$ 中 M 点的位置可用位置向量 r 表示。

直角坐标系决定于它的原点和基矢 i_1, i_2, i_3 ，这三基矢彼此垂直，即有

$$\left. \begin{aligned} i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 &= 1 \\ i_1 \cdot i_2 = i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

位置向量 r 可以用它的坐标分量 X, Y, Z 表示，其向量式为

$$r = Xi_1 + Yi_2 + Zi_3 \quad (1-2)$$

矩阵式为

$$r = [i_1 \ i_2 \ i_3] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

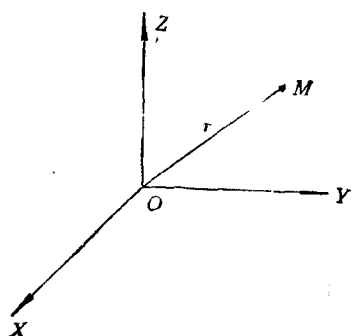


图 1-2 M 点的位置向量

坐标分量可组成列矩阵

$$r = [X \ Y \ Z]^T \quad (1-3)$$

(1-2)、(1-3)式表达了同一向量，两者运算方法不同。

我们定义位置向量 a, b, c 的列矩阵为 A, B, C ，向量的加减运算或向量与标量 λ 的乘积完全等价于相应的矩阵运算，

$$a = b + c, \text{ 即 } A = B + C$$

$$a = \lambda b, \text{ 即 } A = \lambda B$$

向量 a 与 b 的标积等价于行矩阵 A^T 与列矩阵 B 的乘积：

$$\lambda = a \cdot b, \text{ 即 } \lambda = A^T B$$

对于三维向量的向量积

$$c = a \times b = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}$$

它等价于

$$C = A_0 B$$

式中 B 是列矩阵， A_0 为三维反对称方阵。

* 本书中所有 i_1, i_2, i_3 均代表单位向量 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$C = -B_a A$$

此时 B_a 为以下的三维反对称方阵

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix}$$

A 为列矩阵。

双重向量积 (注意: 不遵守结合律)

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

等价于

$$D = AB_a C$$

混合积

$$\lambda = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

等价于

$$\lambda = A^T B_a C$$

存在

$$i_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

等价于相应的反对阵为

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且有

$$i_1 \cdot i_2 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_1 \times i_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在直角坐标系里, 向量 r 的坐标分量 X, Y, Z 有简明的几何意义。取 r 与 i_1, i_2, i_3 的标积, 有

$$X = r \cdot i_1, \quad Y = r \cdot i_2, \quad Z = r \cdot i_3$$

若 r 用单位向量表示, 则

$$r = r\bar{n} \quad (1-4)$$

式中 $\bar{n}$ 是位置向量 r 的单位向量。

两个非零向量 r_1, r_2 之间角度公式为

$$\cos\theta = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1| \cdot |r_2|} \quad (1-5)$$

可见标量积可以单值地确定空间的角度。

若 r_1, r_2 中的一个, 例如 r_2 为单位向量, 即 $|r_{20}| = 1$, 则

$$r_1 \cdot r_{20} = |r_1| \cos\theta$$

是 r_1 在 r_{20} 方向垂直投影的代数长。若 r_1, r_2 都是单位向量, 即 $|r_{10}| = |r_{20}| = 1$, 则

$$r_{10} \cdot r_{20} = \cos\theta$$

即两个单位向量的标积等于它们之间夹角的余弦。

r 在 $OXYZ$ 中的方位由 $\bar{n}$ 的三个方向余弦来确定, 即由 $\bar{n}$ 与 X, Y, Z 轴对应的三个单位向量的内积确定, 即

$$\bar{n} = \cos\alpha i_1 + \cos\beta i_2 + \cos\gamma i_3 \quad (1-6)$$

式中

$$\cos\alpha = \cos(\bar{n}, i_1) = \bar{n} \cdot i_1$$

$$\cos\beta = \cos(\bar{n}, i_2) = \bar{n} \cdot i_2$$

$$\cos\gamma = \cos(\bar{n}, i_3) = \bar{n} \cdot i_3$$

若 $r \neq 0$, 已知 α, β, γ 依次为 r 和 i_1, i_2, i_3 之间的角度, 有

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos\alpha = r \cos(\bar{n}, i_1) \\ Y &= r \cos\beta = r \cos(\bar{n}, i_2) \\ Z &= r \cos\gamma = r \cos(\bar{n}, i_3) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

这样 M 点的位置向量 r 还可以用 (1-7) 式的 $r, \cos(\bar{n}, i_1), \cos(\bar{n}, i_2), \cos(\bar{n}, i_3)$ 四个参数表示。

由 (1-4) 式有

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} (\cos\alpha i_1 + \cos\beta i_2 + \cos\gamma i_3) \\ &= Xi_1 + Yi_2 + Zi_3 \end{aligned}$$

对单位向量 $\bar{n}$ 有

$$\bar{n} = \frac{X}{r} i_1 + \frac{Y}{r} i_2 + \frac{Z}{r} i_3 \quad (1-8)$$

设 $r_1 = X_1 i_1 + Y_1 i_2 + Z_1 i_3, r_2 = X_2 i_1 + Y_2 i_2 + Z_2 i_3$, 为任意两个向量, 有

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 \quad (1-9)$$

特殊地

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (1-10)$$

若两向量垂直, 则

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

根据(1-7)、(1-10)式得关于一个非零向量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦恒等式:

$$\cos^2(\mathbf{r}, i_1) + \cos^2(\mathbf{r}, i_2) + \cos^2(\mathbf{r}, i_3) = 1 \quad (1-11)$$

所以(1-7)式中四个参数只有三个独立的, 它的四个参数需要满足约束关系式(1-11)式。

§ 1.2 方向余弦矩阵及其正交性

如图1-3, M 点在 $OXYZ$ 中有坐标 X_0, Y_0, Z_0 , 在 $Oxyz$ 中坐标 x, y, z 。开始如两坐标系重合, M 点保持不动, 当 $Oxyz$ 绕固定点 O 转到空间某一位置时, 则 M 点在 $Oxyz$ 中的坐标 x, y, z 发生变化。

设 i_1, i_2, i_3 为 $OXYZ$ 的单位向量, e_1, e_2, e_3 为 $Oxyz$ 的单位向量。对于三个线性无关的不同单位向量, 同一向量的坐标是不同的。 $Oxyz$ 绕 O 点转动亦为 $Oxyz$ 的单位向量 e_1, e_2, e_3 的转动。

图1-4是一个二维的例子, 当 e_1, e_2 相对于 i_1, i_2 有一个旋转, 逆时针转过 θ 角, 得

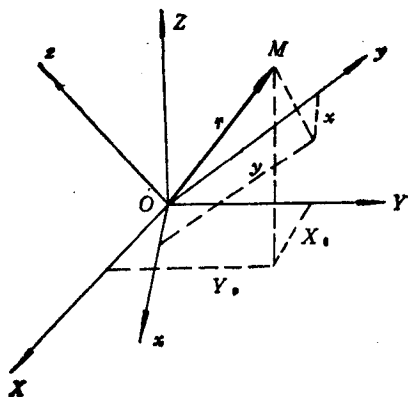


图 1-3 三维 M 点位置向量

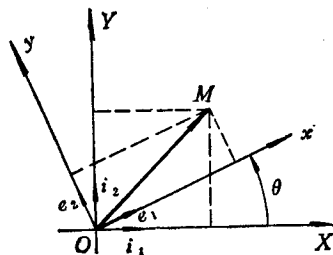


图 1-4 二维坐标系旋转

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= i_1 \cos \theta + i_2 \sin \theta \\ e_2 &= -i_1 \sin \theta + i_2 \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

可见, 一组单位向量可由另一组单位向量线性表出。

$$[e_1 \ e_2] = [i_1 \ i_2] \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [i_1 \ i_2] A^T \quad (1-12)$$

或

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

称为从单位向量 (基矢 i_1, i_2) 到 (e_1, e_2) 的过渡阵。对应地坐标变换为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

当 A 满秩, 且坐标系是正交系时, 得到

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

以上属于坐标系之间的相对旋转, 此时 M 点 (位置向量 $\overrightarrow{OM}$) 是不动的; 单位向量和坐标的变换也可坐标不动, 由位置向量反向旋转获得 (图 1-5)。

由图有

$$[e_1, e_2] = [i_1, i_2] A \quad (1-14)$$

或 $[e_1, e_2] = A^T [i_1, i_2]$

相应地坐标变换有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

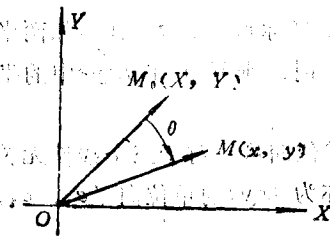


图 1-5 位置向量反向旋转

可以看出, 坐标系旋转与位置矢量旋转的过渡阵互为转置。

在陀螺与惯性导航技术中, 常是将坐标系 $Oxyz$ 依附于刚体, 即与对象固连, $OXYZ$ 代表固定参考系。经常遇到的问题是要求确定 $Oxyz$ 相对 $OXYZ$ 的方位。对于线性变换则是一种旋转变换, 为此, 只要知道 $Oxyz$ 系各轴的方向余弦即可。例如, 设 Ox 轴的方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{X, x}) &= i_1 \cdot e_1 = c_{11} \\ \cos(\widehat{Y, x}) &= i_2 \cdot e_1 = c_{12} \\ \cos(\widehat{Z, x}) &= i_3 \cdot e_1 = c_{13} \end{aligned} \right\}$$

式中 $(\widehat{X, x})$ 、 $(\widehat{Y, x})$ 、 $(\widehat{Z, x})$ 为两相应轴之间正向夹角, c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} 则为相应的方向余弦。

$$x = Xc_{11} + Yc_{12} + Zc_{13}$$

同理, 可用相应的方向余弦确定 y 、 z 轴的方向。

上述变换说明, 对应于刚体坐标系 $Oxyz$ 的一个旋转, 就能唯一地确定一个过渡阵, 即一组方向余弦。

位置向量 r 对 $OXYZ$ 与 $Oxyz$ 分别为

$$r = Xi_1 + Yj_1 + Zk_1$$

$$r = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

因而

$$Xi_1 + Yj_1 + Zk_1 = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (1-16)$$

将上式顺次点乘以 e_1, e_2, e_3 , 可得

$$\begin{cases} x = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z \\ y = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z \\ z = c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

类似地将 (1-16) 式点乘以 i_1, i_2, i_3 , 得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

(1-17) 式右端第一项是坐标系旋转的过渡阵。由于陀螺与惯性导航技术中都是三维空间, 对坐标系旋转

$$r = [e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [i_1 \ i_2 \ i_3] A^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [i_1 \ i_2 \ i_3] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

求过渡阵 A 首先要选定基矢, 其次要知道 $OXYZ$ 和 $Oxyz$ 之间采取的是一种什么线性变换。 A 是一种旋转变换下的阵表示。

过渡阵可用 C_s^m 表示, 故由 (1-17) 式得

$$r^m = C_s^m r^s \quad (1-19)$$

式中 $r^m = [x \ y \ z]^T$, $r^s = [X \ Y \ Z]^T$

$$C_s^m = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

在技术上, C_s^m 称方向余弦矩阵。 C_s^m 表示了从 $OXYZ$ (标号 s) 变换到 $Oxyz$ (标号 m) 的转动变换。对于方向余弦矩阵的这种记法, 可将重复标号消去, 例如

$$C_s^s = C_s^m C_m^s$$

因而带来方便。

同样, (1-18) 式为

$$r^i = C_m^i r^m \quad (1-20)$$

C_m^i 表示了从 $Oxyz$ 变换到 $OXYZ$ 的方向余弦矩阵。

下面讨论方向余弦矩阵的性质。

性质一 方向余弦矩阵的九个元素只有三个独立参数。

因为

$$e_1 = (i_1 \cdot e_1)i_1 + (i_2 \cdot e_1)i_2 + (i_3 \cdot e_1)i_3$$

$$e_2 = (i_1 \cdot e_2)i_1 + (i_2 \cdot e_2)i_2 + (i_3 \cdot e_2)i_3$$

$$e_3 = (i_1 \cdot e_3)i_1 + (i_2 \cdot e_3)i_2 + (i_3 \cdot e_3)i_3$$

式中 $(i_1 \cdot e_1)$, $(i_2 \cdot e_1)$, $(i_3 \cdot e_1)$ 代表单位向量 e_1 在 i_1, i_2, i_3 上的投影, 其余类似。

故得

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= c_{11}i_1 + c_{12}i_2 + c_{13}i_3 \\ e_2 &= c_{21}i_1 + c_{22}i_2 + c_{23}i_3 \\ e_3 &= c_{31}i_1 + c_{32}i_2 + c_{33}i_3 \end{aligned} \right\}$$

元素可归纳为 c_{jk} , 它代表参考系中的第 k 根轴与动系中的第 j 根轴之间的方向余弦。

进行 e_1, e_2, e_3 所有可能的点积运算:

$$e_1 \cdot e_1; e_2 \cdot e_2; e_3 \cdot e_3; e_1 \cdot e_2; e_2 \cdot e_3; e_3 \cdot e_1$$

得

$$\left. \begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1 \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1 \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1 \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} &= 0 \\ c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} &= 0 \\ c_{31}c_{11} + c_{32}c_{12} + c_{33}c_{13} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

即

$$\sum_{i=1}^3 c_{ij}c_{ji} = \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1-22)$$

当 $i=j$, $\delta_{ij}=1$; 当 $i \neq j$, $\delta_{ij}=0$

由(1-21)式知, 九个方向余弦存在六个约束条件, 只有三个是独立的。(1-21)为正交条件, 正交条件还有另一种形式,

因

$$e_1 \times e_2 = e_3; e_2 \times e_3 = e_1; e_3 \times e_1 = e_2$$

故

$$\left. \begin{aligned} c_{31} &= c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} \\ c_{32} &= c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23} \\ c_{33} &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \\ c_{11} &= c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32} \\ c_{12} &= c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33} \\ c_{13} &= c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31} \\ c_{21} &= c_{32}c_{13} - c_{33}c_{12} \\ c_{22} &= c_{33}c_{11} - c_{31}c_{13} \\ c_{23} &= c_{31}c_{12} - c_{32}c_{11} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$