

Xiandai

Daqi

严豪健 符养 洪振杰 著

Zheshe

Yinlun

现代大气

折射引论

上海科技教育出版社

现代大气折射引论

严豪健 符养 洪振杰 著

上海科技教育出版社

责任编辑 卞毓麟
装帧设计 桑吉芳

现代大气折射引论

严豪健 符养 洪振杰著

出版发行 上海世纪出版集团有限公司
上海科技教育出版社
地 址 上海冠生园路 393 号
邮政编码 200235
网 址 www.ewen.cc
www.sste.com
经 销 各地新华书店
印 刷 上海长阳印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 5.5
字 数 153 000
版 次 2006 年 1 月第 1 版
印 次 2006 年 1 月第 1 次印刷
印 数 1-1200
书 号 ISBN 7-5428-3989-6/P·11
定 价 27.00 元

构筑天梯 超越大气 (代序)

打开《现代大气折射引论》的书稿,我的视线被这一个个美丽的连分式所吸引。它们宛如一架通天的长梯,引领我的视线拾级而上,直至太空,来俯瞰我们地球的大气。大气的“功德”众所周知,肯定和颂扬的说词至少也能写上这么一本书。可是从天文观测的角度来审视,大气对观测结果的“危害”,则早已被天文学家所揭示。约在公元前 2 世纪,古希腊学者波塞东尼乌斯 (Poseidonius) 发现了大气折射对测量的影响。在中国,晋代的姜岌已认识了大气折射。天文学家与之作了长期的“斗争”,一切努力在于修正大气折射的影响,使天文观测理想化,超越大气,好比到大气层外去观测。

大气折射理论及其改正的研究在天文学和大地测量学中占有很重要的地位,自古以来就受到学术界的重视。但是由于大气结构和活动的复杂性,这个问题呈现了特殊的困难。自牛顿以来,近代自然科学包括天文学不断发展,一代又一代的学者投入大气折射问题的研究,为满足经典光学观测所建立的模型和处理方法尽管取得了显著成就,但其观测精度和高度角适用范围始终不能突破。到了当代,从 20 世纪 60 年代以来,以无线电观测为基础的雷达测距、人卫多普勒测量、甚长基线干涉测量 (VLBI)、全球定位系统 (GPS) 和以激光观测为基础的月球激光测距 (LLR) 和人卫激光测距 (SLR) 等新技术相继问世 (这些新技术可概称为空间测量技术),大气折射的研究又面临了新的课题。一是研究的对象扩展了,不仅涉及折射 (传播方向的改变),还涉及延迟 (传播路径和传播时间的延长)。而且无线电波在大气中的传播规律与光波有所不同,无线电波在潮湿对流层内的折射是一个更复杂的难题。激光测距虽然是在光学波段进行,但涉及的对象已不再是经典观测的测角。二是空间测量的观测精度远较经典观测为高,观测覆盖范围也比经典观测为大 (例如 VLBI 的观测高度角可在 5° 以下)。大气折射是当前空间测量技术中主要的误差源之一。空间技术的测量精度已经达到厘米和亚厘米量级,而大气折射的改正精度还停留在厘米量级;如何提高大气

折射的计算精度是当前空间技术的研究重点之一。况且，现代大气折射的研究价值业已超出了上述高精度测量领域，而延伸到飞行器制导，地面、海洋和大气监测等与国民经济和国防相关的领域。所有这些都对大气折射的研究提出了新的挑战和要求。

为适应这些新的要求，大气折射改正的方法相对于传统方法有所发展和改进，例如当前普遍使用以连分式表示的映射函数来求大气延迟。但是，在很长的时期内，人们所使用的连分式基本上属于猜测得到的数学形式，并没有得到严格证明。这只是一架基础不太牢固的“天梯”。因此，迄今为止的一切进展，只能在有限程度上满足空间观测技术中改正大气折射和大气延迟的需要。诚如上所述，大气折射的改正精度制约着空间测量技术的发展，而要从根本上解决大气折射问题，更是无法预期。主要问题可归结为两个方面，即大气模型和计算方法。它们仍是当前学术界深入攻关的方向。我国学者在大气折射的研究方面已经起步，并且取得了可喜的成就。

中国科学院上海天文台严豪健研究员从 20 世纪 90 年代初着手大气折射的研究，至今仍在这一领域工作。无论在理论探索或实际工作上，以严先生为首的研究组都取得了积极的成果。这些成果有些已应用于实际工作，并取得实效，它们受到国内外同行的重视，在本书中有较充分的反映。这些成果主要为：

在理论上，创立了大气折射母函数方法。作者发现并证明了大气延迟积分的解析解可以近似地用余误差函数来表示，余误差函数则是其参数取某特定值的不完全伽玛函数，而不完全伽玛函数又能以连分式展开的形式来表达。这样，作者首次证明了在球对称大气假设下，用连分式表示的映射函数来计算大气延迟的理论根据，并从而创立了大气折射母函数方法。进而再用最小二乘拟合得到它的展开系数，就可以直接用大气延迟积分的近似解析解来描述大气延迟映射函数。这样的方法避免了原先使用映射函数的某些盲目性，从而得到更好的精度和收敛性。由此构筑的“天梯”，便植根于坚实的基础之上。

其次，作者把映射函数理论引入光学观测的蒙气差改正中，从

理论上证明了余误差函数也是蒙气差积分的近似母函数,即可把大气延迟母函数方法同样应用于天文大气折射研究中,从而建立了蒙气差改正的映射函数的定义和数学表示。作者还在光学波段建立了频率相关的连分式映射函数,改进了 SLR 技术的测距精度和高度覆盖;并对低轨目标加入了有限距离目标改正。

在实际工作中,作者根据其创建的大气折射母函数方法,对于大气延迟映射函数写出了一种改进的连分式形式,并分别对标准大气模型和 Hopfield 大气模型求出其参数,建立了 UNSW931 和 UNSW932 模型。VLBI 观测的基线重复率和高度截止角实验以及 PRARE 定轨实验验证了前一个模型的结果,证实了其先进性。

在作者的主持下,上海天文台独立发展了自己的大气折射计算软件包,称为 SHAOMF。这个软件包收纳了国际普遍采用的映射函数,包括作者建立的 UNSW931 和 UNSW932 模型。它的收敛标准达 $10^{-14} \sim 10^{-12}$,随观测高度角的变化而调整。它的积分的视高度角覆盖从 85° 到 1.25° ,高度角变化的采样密度随高度角的下降而加密。这一软件包后来又两度加以改进,功能比国际通用的相应软件(如《国际地球自转服务规范》所采用的)更加完善。

作者基于长期的研究心得和工作经验,作为他们研究工作的总结,撰写了这部学术专著,来探讨地球大气对天文观测产生各种影响的理论和改正方法。本书从论述大气折射的研究历史和现状出发,全面、系统地阐述关于大气折射的基本理论和研究方法,大气对天文观测的多方面影响,包括光学观测中的天文折射、无线电观测中的大气延迟和电离层折射,以及对这些影响的各种改正模型和它们的应用。本书不仅广泛地展示了当前国际上普遍采用的改正模型,更可贵的是还融合了作者自己多年的研究成果,它们不仅在理论上对已有的大气折射理论加以发展,而且在实际应用上也显示了很高的精度。

大气折射问题是一个天文学上的难题。作者迎难而上,足见其学术勇气。作为一本学术专著,科学性是它的生命。本书对已有的学说广征博引,用确切合理的推导和翔实丰富的数据构建起令人容

易接受的叙述基础和框架。这是本书的特色。从眼前跃动的文字和数字，不难读出作者在科学的道路上孜孜兀兀、殚精竭虑地顽强拼搏的情景。

在国内外的文献目录中，至今还没有一本论述当代空间测量技术中大气折射改正的专著。本书主要为从事 GPS、VLBI、SLR 等空间测量新技术的专业科技工作者编写，也可作天文、大地测量、地球物理等相关专业的研究生、大学生的参考书。本书的问世，对于我国的天文和大地测量事业的发展，必将起推动作用。

我与严豪健先生相识多年，既是校友，又是同行。早年他以优异的成绩考入南京大学天文系，入学后两年半就服从安排赴农村参加“社教运动”，随后遇到了“史无前例”的大动乱，又在此期间被分配到基层。经过农场劳动，最终担任乡镇中学的教师。在改革开放之后，终得归队从事天文工作。他抓住这难得的机遇，奋起直追。二十多年期间，在他从事的课题上，都做出了骄人的成绩。他在大气折射方向上的这些成就，自在意料之中。本书作者群体中的另两位，都是青年才俊，他们敢于在大气折射这一难题中攻关并取得成果，我们似乎已预见到他们辉煌的前程。

我要为本书的出版，感谢上海科技教育出版社。在当今出版界竞赶“市场大潮”的背景下，以诸如本书这样“专深”的学术著作作为选题，显示了编者的远见卓识。学者和编者携手，共同修筑攀登科学高峰的“天梯”，必将有力推动我国科技事业的发展。

萧耐园

2005 年 1 月于南京大学天文系

目 录

构筑天梯 超越大气 (代序)

第一章 引言	1
1.1 大气折射的研究历史	3
1.2 大气折射的研究近况	6
第二章 基本理论	10
2.1 介质中电磁波的传播方程	10
2.2 大气折射指数和大气折射率	11
2.3 Fermat 定律、Snell 公式和 Bouquer 公式	13
2.4 Smith-Weintraub 方程	16
2.5 大气折射的基本方程	19
2.6 等效地球大气参数	20
2.7 异常大气折射	24
第三章 大气模型和大气剖面	30
3.1 指数模型	32
3.2 Hopfield 的多方大气模型	34
3.3 标准大气模型	37
3.4 探空气球的实测大气剖面	38
第四章 天文大气折射 (蒙气差)	43
4.1 天文大气折射的经典计算方法	44
4.2 大气折射表和大气折射的实测方法	49
4.3 天文观测中的蒙气差改正	52
4.3.1 天文大气折射对天体坐标影响的改正	52
4.3.2 天文大气较差折射	54
4.3.3 天文大气折射对角距和位置角的影响	55
4.4 经典时纬观测中的蒙气差改正	57
第五章 大气延迟	58
5.1 级数展开法和 Saastamoinen 公式	59
5.2 天顶延迟、映射函数及其连分式表示	63

5.3 地面气象参数相关的连分式映射函数和 Davis 公式 (CfA2.2 模型)	65
5.4 探空气球资料的应用及 MTT 模型	67
5.5 大气延迟积分的母函数方法	69
5.5.1 母函数理论及其展开	69
5.5.2 逆光路积分法、UNSW931 和 UNSW932 模型	72
5.5.3 SHAOMF 软件包	74
5.6 测站地理位置和观测历元相关的 Niell 模型 (NMF 模型)	77
5.6.1 全球映射函数的可能性	78
5.6.2 测站高度改正	81
5.7 大气延迟的保形理论	83
5.8 大气折射改正的直接积分法	83
5.9 小结	85
第六章 电离层大气折射	92
6.1 电离层大气折射改正	92
6.2 用双频观测消除电离层效应	95
6.3 电离层大气折射指数和电离层延迟的深入讨论	96
第七章 空间观测技术中的大气折射改正	103
7.1 无线电波段的大气延迟改正	103
7.1.1 VLBI	103
7.1.2 GPS	106
7.1.3 PRARE	107
7.2 光学波段的大气延迟改正	107
7.3 有限距离观测目标的修正	110
第八章 大气折射母函数方法的发展	114
8.1 蒙气差计算的母函数方法	114
8.2 大气折射母函数的其他展开形式	118
8.3 光学波段的频率相关映射函数	119
第九章 大气折射研究中的若干问题	124

9.1 大气折射湿分量和大气折射率的水平梯度	124
9.1.1 低对流层中水汽对大气折射的影响	124
9.1.2 大气折射率水平梯度及其数学表示	126
9.2 低高度角的观测处理	129
9.3 各种映射函数的比较和建议	130
9.4 级数展开法和映射函数	130
9.5 地基和空基 GPS 气象学	131
第十章 大气波导	132
10.1 大气波导的产生和分类	132
10.2 大气波导的截止波长和最低陷获频率	135
练习题	138
参考文献	141
附录 A Γ 函数、不完整 Γ 函数、余误差函数及其展开	148
附录 B 母函数方法和映射函数	154
附录 C 映射函数系数偏微分及其递推公式	157

第一章 引言

大气折射是天文学和大地测量学中的一个经典研究课题，它具有相当长的研究历史。Newcomb (1906) 在 20 世纪初他的名著 *A compendium of spherical astronomy* (《球面天文概论》) 中曾经说过：“There is, perhaps, no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory” (在实用天文学中，或许没有哪一个分支像天文大气折射问题发表这样多的文章，而其状态又仍然是那样的不能令人满意)。方位天文学在过去的一个世纪中已经发生了重大的变化；尤其在近几十年中，空间测量新技术的产生和发展，无论在观测方法上，还是在观测精度上，都有了突破性的进展。当然，大气折射的研究同样也遇到了新的挑战。我们认为，Newcomb 的这段论述仍然能说明今天大气折射的研究现状。

在过去的几百年中，曾经有一批著名的天文学家、数学家和物理学家，如 Bouguer、Bradley、Laplace、Bessel、Newcomb 等，对大气折射的理论、大气折射积分的数学表示和地球大气模型的研究做出过重要的贡献。在近几十年中，计算数学、物理学、电子学、仪器技术等领域均得到空前发展，但是在大气折射领域中却很少有著名科学家参与；在此领域中有影响的研究论文也相对较少。正如 Newcomb(1906) 所分析的那样，造成这种状况的原因是大气折射研究中存在两个根本性的困难：地球大气分布模式的复杂性和时变性，以及大气折射积分的解析不可积性。

今天，在图书馆中，很难找到一本适合现代天体测量、现代大地测量、卫星和空间测量等新技术的大气折射专著，这形成我们编写本书的目的之一。编写本书的另一个动机是：不但近代空间测量新技术对现代大气折射提出新的要求，而且其他相关领域，如大气探测、地基和空基 GPS 气象学、卫星技术等，也都需要高精度的大气折射理论和方法。

介质的存在，使电磁波信号的传播速度发生了变化，产生了时

延 (delay) 效应; 在非均匀介质中, 同时产生电磁波信号传播路径的弯曲 (bending)。它们分别形成大气折射 (atmospheric refraction) 的两个研究方向: 大气延迟 (atmospheric delay) 和天文大气折射 (astronomical refraction, 亦称蒙气差)。本书将分别叙述弯曲和时延这两个大气折射效应。介质对信号的吸收和散射则产生信号强度的衰减和谱线的变化。大气的吸收和散射是天体物理学中一个很重要的研究方向, 但是它们不属于本书讨论的范围。在大气反演技术中 (如空基 GPS 气象学中的振幅反演和物理反演), 大气对信号振幅的影响还是一个重要的观测参数。

地球大气是非均匀介质, 其密度分布最明显的特性是随着高度而衰减。真实地球大气层的密度和成分的分布受到季节、气象条件、地理位置、地形、昼夜变化等众多物理因素的影响, 我们几乎不可能用简单的大气模型去精确地描述测站附近的大气层结构及其时间变化。从带电特性分类, 地球大气又可粗略地看成由低层的中性大气层和高层的电离层组成; 除了气体分子和离子以外, 还包含有少量的尘埃粒子, 其分布也是随地面高度的变化而连续变化。

天文大气折射 (蒙气差) 是方位天文学和大地测量学的主要研究课题之一。20 世纪 60 年代以前, 天文大气折射是天文方位观测、天文导航、天文大地测量、时间和纬度服务的主要误差源之一。20 世纪 60 年代以来, 以卫星观测为代表的空间观测技术的出现和发展, 使观测形式和观测精度均获得重大的改变和提高, 大气折射又成为现代空间测量技术的主要研究方向之一。今天, 大气折射研究不仅具有传统的高精度定位的应用价值, 而且在地球内部物理结构和动力学变化、航空和航天定位、导弹和现代高新武器的精确制导, 甚至包括地球表面运动、大气和海洋变化的监测等科研、国民经济、国防领域, 均具有重要现实意义。异常大气折射中的波导 (ducting) 效应更是现代国防建设中至今还在不断探索的对象之一。

由于蒙气差和大气延迟两个积分在数学形式上的差别, 传统上都将它们分别进行独立研究, 而未注意到它们之间的可能联系。近

年来发展的大气折射母函数理论 (Yan and Ping 1995, Yan 1996) 证实了: 作为大气折射的两个不同的观测效应, 大气延迟和蒙气差之间存在某种数学形式上的共同特性; 它们的积分不但具有数学结构类似的母函数 (generator function), 而且可以用形式相似的展开式去描述它们各自的映射函数 (mapping function)。

大气折射理论研究上的进步, 不仅改善了观测技术的归算精度, 而且有望降低仪器的观测高度截止角, 扩大仪器对目标的观测弧段, 提高仪器的使用效益。从另一个角度来看, 空间观测精度的不断提高, 也给我们提供了把原先属于观测噪声的信息进行重新处理的机会, 从而获得我们感兴趣的、新的物理现象的参数。20 世纪 80 年代末发展起来的地基和空基 GPS 气象学就是利用精密的大气延迟和弯曲测量, 来反演地球大气参数。反演得到的大气信息又可以进一步用于气象学、气候学、大气物理学、空间气候学等学科的研究中, 更好、更有效地为科研、国民经济和国防服务。

1.1 大气折射的研究历史

大气折射 (这里主要指的是蒙气差) 具有相当悠久的历史。早在公元 1 世纪, Cleomedes 就认识到大气折射的性质和它的影响。以后, Ptolemy 在他的光学工作中已经论述了大气折射问题。在 16 世纪, Tycho Brach 建立了具有很高精度的大气折射表。到了 Kepler 时代, 他又对大气折射表作了进一步的改进。但是, 在这些早期的研究者中, 还不了解大气折射的物理机制; 也就是说, 他们对大气折射的研究和大气折射表的建立均来自实测结果的分析。

在 17 世纪以前, 人们对地球大气的结构和物理性质的了解甚少。在当时的精度要求下, 当天顶距不是很大时, 大气温度和其他大气特征量的精确分布在大气折射的计算中还不是一个关键问题。但是, 就今天的观测精度而言, 大气参数已经成为大气折射研究的重要因素。

从 17 世纪以来, 在 Cassini、Bouquer、Newton 等人各自建立的大气折射表中, 所选用的大气密度分布模型存在很大的差别, 有

的还含有人为的假设，它们同今天已知的真实地球大气均有很大的差异。然而，在高度角小于 80° 的范围内，它们却均能给出类似的结果。在天顶距大于 80° 的范围中，大气折射计算结果对大气密度模型的依赖就很大了，其原因来自大气折射展开式中高阶项的贡献。今天，水平大气折射的计算仍然是大气折射研究中的一个难题；没有一个理论能很好地解决这个问题。因此，大气密度分布模型已经是大气折射研究中的关键问题之一。

1861 年，Bruhns 出版了德文的 *Astronomische Strahlenbrechung*（《天文大气折射》）一书。书中很好地综合了以前发表的大气折射有关文章。其中包括 Ivory 在 1823 和 1838 年的研究工作。以后 Gylden 的文章“*Untersuchungen über die Konstitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in der selben*”（以同种方法建立大气和大气折射的研究）对大气折射表的编写有重要的作用。Fuss 的 *Beobachtungen und Untersuchungen über die Astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes*（水平附近天文大气折射的观测和计算）成为编写 Polkovo 大气折射表的重要参考文献。Radau 在 1889 年 Paris 天文台的备忘录中讨论了大气中水汽对大气折射的贡献，并给出湿大气折射计算表。在早期的大气折射表中，Bessel 在 *Fundamenta Astronomiae*（《基础天文学》）一书给出的结果是基于 Kramp 的理论推导和 Bradley 的观测资料，而高度角小于 5° 的大气折射值均来自观测；同时，他也注意到 Bradley 观测资料中温度计的误差。应该说，在众多的早期大气折射表中，Bessel 的工作是比较出色的，因此在以后较长的一段时间，它都用来作为计算大气折射的参考。

俄罗斯的 Polkovo 天文台一直从事天文大气折射表的编制工作，他们的理论依据是 Gylden 的研究工作。他们在 1870 年出版的一本大气折射表几乎替代了当时的所有折射表。他们的工作至今在国际上还具有相当的影响 (Orlov 1956)。20 世纪 40 年代发展起来的 Willis(1941) 和 Garfinkel(1944, 1967) 的折射理论，对以后折射表的编制也起了很重要的作用。

在 20 世纪中,尤其是 60 年代以来的 40 多年,科学和技术发生巨大的变化,特别是计算机和人造卫星技术获得惊人的成就。这个变更给测量技术领域带来了新的机遇和挑战,出现了以卫星测量为代表的新一代空间测量技术;它们在根本上改变了传统的自然天体方位测量模式。这个变化也给大气折射的研究和应用带来了新问题,它们大致可以归结为如下几个方面:

(1) 自从甚长基线干涉测量 (VLBI)、卫星激光测距 (SLR)、月球激光测距 (LLR) 和全球定位系统 (GPS) 等新一代空间测量技术相继问世以来,我们对目标的测量已经从过去单纯的方位观测转向以距离观测为主。也就是说,大气折射的研究重点已经从过去的天文大气折射转移到今天的大气延迟;

(2) 观测波段已经从过去天文和测地中主要使用的光学波段向今天的无线电等全波段和激光扩充;

(3) 空间测量新技术的测距精度已经从初始的米级,逐渐提高到目前的亚厘米或毫米级,几乎改进了 3 个量级;

(4) 观测模式已经从过去单一的地面测站对空间目标的观测,发展到今天包括地对空、空对地和空对空的全方位观测;

(5) 观测目标的距离从过去“无穷远”的自然天体,到今天“有限距离”的人造天体。

以上现实迫使我们重新考虑观测资料处理的计算模型;一方面需要加入一些在低精度观测时因改正量级较小而被忽略的改正项,如广义相对论修正等;另一方面必须重新考虑以前计算精度不够高的改正项,大气折射就是其中之一。实践证明:由于各种限制,目前大气折射计算公式的绝对精度还只能达到厘米的量级;这造成当前空间测量新技术的归算精度在一定程度上受到大气折射公式不精确的限制 (Herring et al. 1990, Davis et al. 1991, Elgered et al. 1991)。

今天,大气折射的研究还在不断深入,构建低高度角 (小于 10°) 观测资料的改正公式还是大气折射的重要任务;我们离根本上解决这个问题还有很长的一段距离。

1.2 大气折射的研究近况

我们知道,限制大气折射归算精度的原因,在于地球大气剖面的描述和大气折射积分的解析不可积性。大气折射计算方法的研究,基本上是随着观测精度的提高和大气模型的改进而发展的。

大气折射研究中所使用的大气模式可以分成两大类:理论大气模型和实测大气剖面。前一类是在一定的物理约束条件下(如流体静力学方程、理想气体方程、连续性假设等),通过全球或局部的大气探测资料,建立一个数学上的解析模型。在近代大气折射研究中,使用的理论大气模型主要有:指数模型、Hopfield 模型、Saastamoinen 及与之相似的标准大气模型。从理想气体状态方程出发,在等温条件下导出的指数大气折射率模型是最简单的理论大气模型。虽然其他两种理论大气模型比指数模型更加接近于实际大气分布,但是它们数学形式的相对复杂性会带来大气折射理论研究的复杂性,以及计算过程中需要更加多的计算机时。第二类大气模式是直接用实测大气剖面(profile)进行描述,最常用的是探空气球资料。它们的特点是真实地描述测站上空的大气分布。它们的缺点是具有很强的时间上和空间上的局限性。因此,选择大气模型是大气折射研究中首先考虑的问题之一。

研究大气折射积分(包括弯曲和延迟)的数学方法大致可以分成三大类:第一类是把大气折射积分中的被积函数按高度角(或天顶距)的三角函数进行级数展开,然后在一定的大气模型下逐项进行积分。这种方法已经沿用了几百年之久,展开形式也已发展到十分精巧的地步(Saastamoinen 1972 a, b, 1973, Garfinkel 1967)。第二类是从 Marini 连分式基础上发展起来的映射函数方法,它原先用于大气延迟研究中。这方法的特点是:在一定的大气模型下,用沿信号路径数值积分方法求出不同高度角的大气延迟改正;再用选定的映射函数形式(常用的有各种形式的连分式),对积分值按高度角(或天顶距)的三角函数进行拟合,求出拟合系数。必须注意的

是：它所使用的连分式映射函数都是属于经验形式。第三类是大气折射母函数方法。它首先在数学上导出大气折射映射函数的近似解析解及其相应的参数化展开函数，然后在一定的大气模型下进行展开函数的系数拟合。

大气折射积分的级数展开法在天文大气折射计算中具有较好的收敛性，可以满足一般方位天文观测的需要。直到今天，天文年历中给出的大气折射计算公式还是来自级数展开；它在天顶距不是极低的观测中，还是适用的。然而，级数展开法应用在大气延迟的研究中却出现了困难。其原因是：(1) 空间新技术在测距上有更高的精度和更低的观测角（如 VLBI 已经接近毫米的精度和小于 3° 的高度角覆盖）；(2) 相比于天文大气折射，大气延迟的级数展开解在大天顶距时的收敛性较差，一般在 10° 高度角以下就无法收敛。对稍大于 10° 的观测，大气延迟的级数展开法还需要考虑一些高阶改正项（如光程弯曲改正）；它们在计算和应用过程中显得比较复杂，有时只能用表列值方法来表示；(3) 大气模型的误差也会在级数展开法中得到放大。但是，级数展开法具有数学上的直观性。在较大高度截止角（大于 15° ）的观测纲要中，我们还是可以运用此方法的结果（如常规 GPS 和 SLR 观测）。

第二类方法中采用的连分式映射函数，最初来自平行平面大气近似下的一种猜测和经验的凑合。相比于级数展开法，在大气延迟计算中，它们能达到更高的精度和更广的高度覆盖。但是在极低高度角时，这类映射函数的收敛性也受到一定的限制。

第三类母函数方法得到的改进的连分式映射函数不但具有数学上的严密性，而且在更低的高度角上具有较好的收敛性。

低层地球大气中含有一定的水汽，它不仅是形成降雨过程的主要物理因素，还是大气潜热等大气活动的主要因素，同时又是大气成分中最不稳定的分量之一。它不但具有较强的时间和空间变化特性，而且通常具有明显的局部非球对称性。研究水汽的分布及其不对称性对大气折射的影响是当前一个重要的研究方向。

最后必须指出，计算机技术的飞速发展给大气折射研究带来