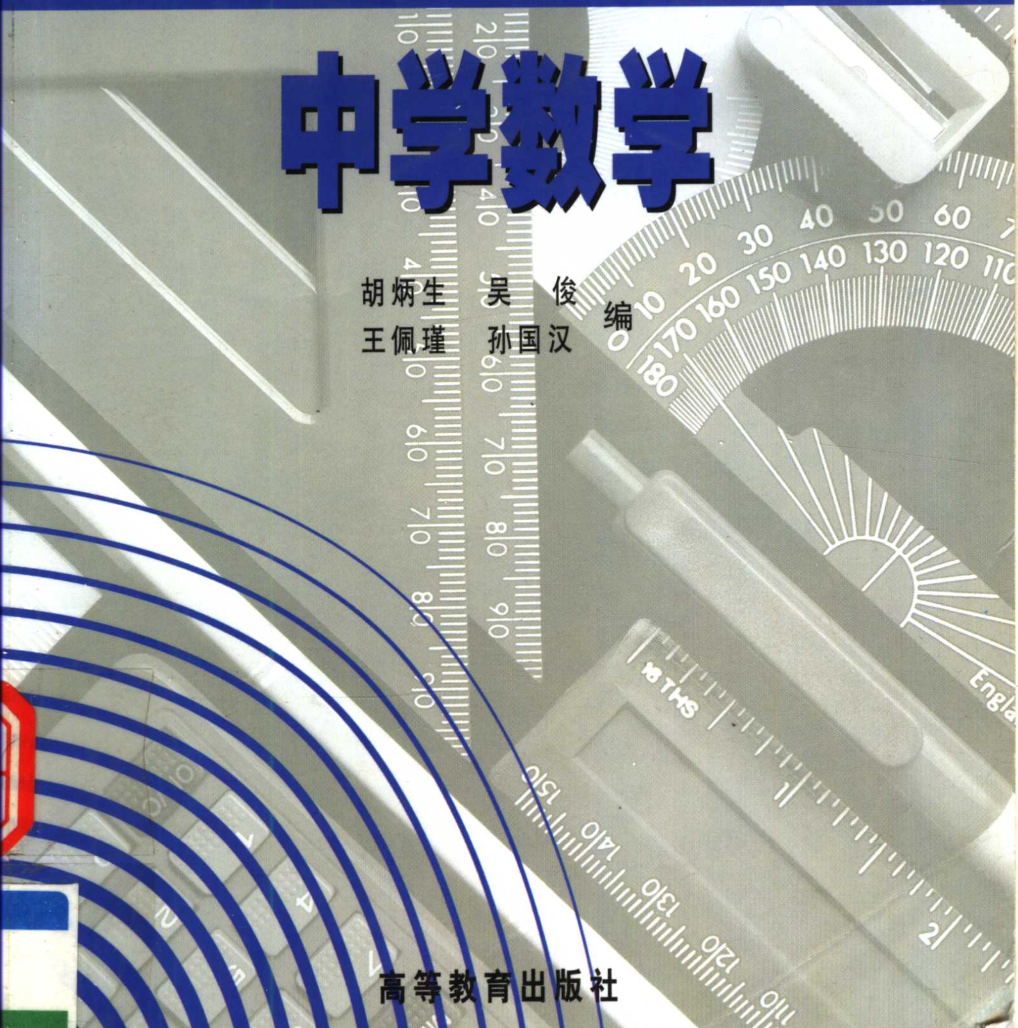
XIANDAI SHUXUE GUANDIAN XIA DE
ZHONGXUE SHUXUE

现代数学观点下的

中学数学



胡炳生　吴　俊
王佩瑾　孙国汉　编

高等教育出版社

现代数学观点下的中学数学

胡炳生　吴　俊
王佩瑾　孙国汉　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书内容包括绪论、集合和映射、代数、数系、几何、图形、实值函数、不等式、概率统计等，用现代数学的观点沟通高等数学与中学数学的联系，可供高师院校、师专、教育学院数学专业作选修课教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学观点下的中学数学/胡炳生等编 .—北京：高等教育出版社，1999 (2001重印)
ISBN 7-04-006985-7

Ⅰ.现… Ⅱ.胡…Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 31504 号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	人民教育出版社印刷厂		
开　本	850×1168 1/32	版　次	1999年5月第1版
印　张	10	印　次	2001年6月第3次印刷
字　数	250 000	定　价	9.80元

前　言

在我国高等师范院校(包括教育学院)中,无论是文、史、地、还是理、化、生等各专业,所开设的专业课程,都是中学相应课程内容的加深、加广,螺旋式上升.因此,这些专业的毕业生到中学任教后,能够较好地解决“居高临下”的问题.而数学专业则是个例外.除微积分外,大学数学课程所讲的高等数学,与中学数学的研究对象、研究方法都有本质的不同,中学数学到大学数学是直线上升.大部分高等数学课程与中学数学严重脱节,学生所学高等数学与中学数学联系不上,“居高”而不能“临下”.以致数学专业毕业生到中学后,往往需要重新学习相当长一段时间,才能熟悉和掌握中学数学教材,胜任教学工作.

因此,高师数学专业教学改革的一个迫切任务,就是要解决如何在现代数学观点指导下,加强高等数学与中学数学的联系.

本书是我国高师八五教材规划中数学教育系列选修课教材之一.它的主要任务就是,在现代数学观点下,沟通高等数学与中学数学的联系.它的内容主要有三个方面:一是将现代数学的思想和方法渗透到中学数学中去;二是用具体材料来说明高等数学对中学数学的指导意义;三是指出中学数学某些难以处理的问题的高等数学背景.

本书假定读者已学过大学数学专业基础课程——数学分析、高等代数、高等几何、概率统计等.书中所联系的中学数学,是指现行中学数学教材和竞赛数学中的某些内容.

全书共九章,除绪论外,以中学数学内容(除微积分外)为线索,分别讲述集合与映射、代数、数系、几何、图形、数值函数、不等式和概率统计.各章之间,既注意到一定的逻辑联系,又具有相对

独立性.每章编有研究和思考题,书末附有这些问题的提示和答案,以及参考书目.

考虑到高师数学本科、专科和继续教育的不同需要,其中部分可作选读的内容加了“*”号.全书安排教学课时在54～72之间.

在本书编写和审稿过程中,得到过下列各位先生的帮助和指导:张奠宙教授、邹一心教授(华东师大)、李长明教授(贵州教育学院)、唐复苏教授(苏州大学)、戴再平教授(浙江教育学院)、赵振威教授(常熟高专)、沈幼璋、沈传龙、卢冠军、王岳庭副教授(杭州教院)、任毅副教授(芜湖教院)、孙熙椿副教授(江西师大)和丁万鼎教授(安徽师大)等.谨向他们表示衷心的感谢.我们还要特别感谢高等教育出版社的高尚华副编审,他在本书编写的全过程中,始终给以极大的关心、支持和指导.

本书是在初稿《中学数学的现代理论基础》(讲义)的基础上修改而成的.初稿由下列先生提供:胡炳生(第一、二、十章,第七章第三节,第八章第一、五节),吴俊(第三、四章),孙国汉(第五、六章),王佩瑾(第九、十一章,第七、八章其余部分).胡炳生根据审稿会意见和建议,并参考其他作者的意见,对全书进行全面修改,将原稿十一章精简成九章.吴俊参加了全稿的修改工作,并对书中术语、外国人译名和符号,进行了统一和标准化工作.

编写本书是作者的一个尝试,是关于这个课题研究的初步结果.尽管我们作了种种努力,广泛吸收国内外有关研究成果,但限于知识水平和教学经验,许多问题还未很好研究,对某些问题的看法也未必妥当,书中一定还存在不少缺点和错误.诚恳希望广大读者予以批评和指正.

作者于安徽师大
1997年12月

目　　录

第一章 绪 论

本书的主题是,在现代数学观点指导下,研究高等数学与中学数学的联系.因此,我们首先要说明什么是现代数学,什么是中学数学,以及高等数学与中学数学联系的途径和方法.

1. 现代数学及其特点

一般说来,现代数学是指19世纪30年代以后诞生的数学.它的主要标志是:Lobatchevsky(1792—1856)、Gauss(1777—1855)和J.Bolyai(1802—1860)创立非欧几何,Galois(1811—1832)创立群论,Hamilton(1805—1865)创立四元数,以及Cantor(1845—1918)创立集合论.从那以后发展起来的非欧几何、抽象代数、集合论、拓扑学、泛函分析、数理逻辑、数学基础等,都是现代数学内容.

现代数学,跟以微积分、解析几何为基本内容的古典高等数学相比,在研究对象和研究方法上都与初等数学有显著的不同.

在研究对象上,初等数学以数和三维空间的图形为主要研究对象,现代数学则以任意集合及其间的种种关系为研究对象.在现代数学中,数推广成一般集合的元素;数的计算推广为集合中元素的一般运算;函数推广为集合的映射;曲面、曲线推广为一般空间的任意流形,等等.

如果说,恩格斯在一百多年前所说,纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,主要是对集合论产生以前的数学研究对象的科学概括的话,那么,对现代数学而言,今天就要对“空间形式”和“数量关系”作本质上的推广.“空间形式”应理解为抽象空间的任一子集;“数量关系”应理解为集合与集合之间的一般关系.

在思想观念和方法上,现代数学以集合论为基础,普遍采用公

理化方法和数学结构观点进行统一处理. 如 Kolmogorov(1903—1987)所说:现代数学的观念就是:[①]

(1) 纯集合论是所有数学的基础.

(2) 数学的各专门分支研究某一特殊类型的数学结构,每一结构类型由相应的公理体系确定. 数学所感兴趣的仅仅是结构的一些性质,它们是由所采用的公理体系导出的,即研究结构仅仅精确到同构.

因此,集合论观点、公理化观点、结构观点和同构观点,是现代数学的基本观点.

此外,电子计算机进入数学研究领域,"机器证明论"的兴起,正在改变以前人们只承认逻辑证明的传统观点.

在数学语言上,现代数学全面使用集合论符号和数理逻辑符号,使其语言更加统一和形式化,因此,也更加准确和简炼.

在应用上,不仅现代数学在力学、物理、天文、化学、机械学等传统领域中的应用不断拓广和加深,而且对于生物学、地学、经济学,甚至语言学、历史学和社会学等原来不用或少用数学的学科领域,数学的应用也越来越广泛,越来越显得重要.

现代数学发展到今天,它已经划分为基础数学、应用数学和数学技术三大部分,而数学技术是"未来高科技的核心"[②].

2. 中学数学改革的新要求

中学数学,是指在中学数学教材和课外活动(数学竞赛等)中所包含的数学. 因此,随着中学教材的改革和更新,随着数学竞赛活动的发展,中学数学的内容也在不断变化和发展.

从现在起到21世纪初,正是我国中学数学教学改革、教材全面更新的时期. 九年义务教育初中数学教材已经普遍使用;与此相衔接的新编高中数学教材(试验本)1997年已经在部分省市试用,

---

① 引自书末主要参考书目[4].

② 严士健,面向21世纪的中国数学教育改革,数学教育学报,1996(1).

并将于1999年在全国使用.与原有中学数学教材相比,新教材在编写思想和内容选择等方面,有很大的进步.

首先,新编高中教材更新了内容,删减了传统初等数学中次要的、用处不大的,或学生学习有困难的内容,如幂函数、指数方程、对数方程、一些三角恒等式、反三角函数、三角方程,以及立体几何中的棱台、圆台等;新增了向量、简易逻辑、概率统计和微积分初步.

其次,改革了传统数学知识的处理方式和数学语言,广泛地使用集合符号、逻辑符号和标准计量单位和符号,使用向量代数方法证明余弦定理,处理空间线、面关系等.

第三,高中数学不再分科编写,而是把多科数学内容综合为一门数学教材,注意沟通各科知识之间的内在联系,注意数学知识的实际应用.

与此同时,全国中学生数学竞赛,主要是全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克和国际数学奥林匹克(IMO)的水平不断提高,现代数学的思想和方法的渗透越来越普遍和深入.

这就要求中学数学教师拓宽知识面,提高综合素质.因此,高师数学专业不仅要有足够多的现代数学课程,而且要有相应的课程指导学生用现代数学思想、观点和方法,将高等数学与中学数学结合起来,同时要培养学生的数学应用意识和应用能力.

3. 高等数学联系中学数学的途径和方法

尽管现代数学的高度抽象性,使它与中学数学拉大了距离,但从数学发展的历史来看,现代数学是多级抽象的结果.它的原型和特例大都来自变量数学,变量数学的原型和特例又来自常量数学,而数学无疑最终还是扎根于现实世界的空间形式和数量关系之中.

中学数学的内容,是常量数学和变量数学的初步知识,是现代数学的基础,是现代数学中许多(不是全部)概念和理论的原型和特例所在.因此,从现代数学观点来看中学数学,首先就要把现代

数学中的某些概念和理论与中学数学里相应的原型和特例联系起来.这样,就不仅能够加深对现代数学的理解,而且能使我们准确把握中学数学的本质和关键.从而高屋建瓴地处理中学教材,用现代数学的思想方法指导中学数学教学,提高教学质量和教学水平.

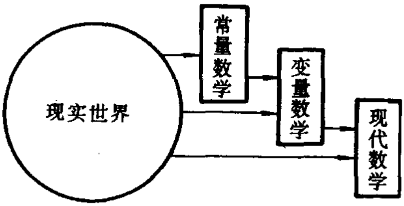


图 1－1

例如,数集和点集(平面的和空间的)是集合的特例.在高一讲述"集合"之后,在代数、立体几何和其他数学内容的教学中,可以而且应当普遍使用集合符号,逐步使数学语言规范化.

整数环是可换环的原型,有理数域是域的原型,数的四则运算是二元运算的特例,数值函数是映射的特例,变换又是特殊的函数.它们都是集合元素之间的对应,而对应法则并不限于解析表达式.由此,对于非常规运算和非常规函数(如取整函数[x]等)的理解,就不会发生困难.

平面和三维欧氏空间,是一般度量空间的原型,平面和立体几何中有关概念、公式,如两点间距离、三角形不等式、邻域、开集、闭集等,都可以向高维空间、一般空间推广.而距离空间又是拓扑空间的特例.反过来,从现代数学观点来看欧氏空间,三角形不等式是一个基本不等式,邻域是一个基本概念.

其次,对于中学数学中某些不易交待清楚的问题,要了解其在数学史上产生和解决的过程,弄清楚它们在高等数学里的背景.例如,为什么把"0"作为第一个自然数?自然数与有理数、实数相比较,孰多孰少?何谓作图不能问题?如何来判定它们……这些对

于中学生未必要搞清的问题,中学数学教师则必须弄清楚其中道理.这就要求我们利用数学史和高等数学知识,对这些问题予以说明.当学生提出这些疑问时,能够通俗地给以科学的回答.

第三,用现代数学思想方法,指导中学的问题解决.例如,根据同构观点,利用“关系映射反演原则”(RMI)对数学问题进行等价变换和求解.利用逻辑真假值表来检验命题证明过程的正确性.利用向量代数方法证明平面和立体几何题.利用射影变换、仿射变换方法对某些几何题寻求证明思路等.

又如,从公理化观点来看,任何一门学科都要有一些基本概念和公理作为理论的出发点;各个命题之间,都要有逻辑的先后顺序,中学数学当然也不能例外.现在高中数学教材是各科知识的综合和融会,更要注意此点.既不能对其中基本概念(如集合等)给以“定义”,也不能犯“循环定义”的毛病.既不能对已明确为“公理”的命题(如“边角边”公理等)给以“证明”,也不能犯“循环论证”的错误.

总之,要力求将现代数学思想全面渗透入中学数学,要在高等数学概念、理论的通俗化,与中学数学概念、理论的抽象化上,寻找现代数学与中学数学的结合点.以下各章,就是这种努力的一些初步结果.我们希望读者能从这些材料中得到若干启示,在现代数学观点下,继续深入研究和发掘高等数学与中学数学更普遍、更深入的联系.

第二章　集合和映射

集合论是现代数学的理论基础，映射是集合论中用以建立现代数学概念和理论的基本工具和手段．不仅如此，集合和映射作为现代数学的一种重要思想方法，一种简单而明确的数学语言，有效地适用于数学的各个分支．自然，集合和映射，也是整个中学数学的理论基础．

集合和映射，现已列入中学数学教材，这是实现中学数学教材现代化的必要条件之一．但是，这并不等于说，集合论的思想方法就已融入了整个中学数学教材，贯彻于中学数学教学之中．

要做到这一点，需要中学数学教师从现代数学观点出发，深刻理解集合和映射的意义，掌握集合论的方法和语言，并用来处理教材，指导教学．

第一节　集合和集合论

1．朴素集合论

集合，是一个不加定义的基本概念．我们说给定了一个集合 A，就是给定了一个明确的标准，根据它可以确定哪些东西是 A 的元素，哪些东西不是 A 的元素．如集合论创始人 Cantor 所说，"集合"是指人们直观上或思想中完全确定的、不同事物 x 合成的一个整体 A．这些事物 x 称为 A 的元素，或者说 x 属于 A，记作 $x\in A$．

但 Cantor 的话并不能作为集合概念的定义，因为"整体"一词并不比"集合"更浅显明白．还有人试图作如下定义："集合就是具

有某种共同属性的事物的全体". 这也不行. 例如,集合{(1,2),H}中的两个元素——数对(1,2)和氢原子 H,很难说它们有什么共同的属性. 而 4 与 1、2、3 都是自然数,但 4 却不是集合{1,2,3}的元素.

事实上,集合作为一个抽象概念,它概括的内容非常广泛,很难给它下一个定义使之适合每一种具体情况. 而且在演绎数学体系中,为避免循环定义,总要选定一些不加定义的基本概念作为理论的出发点,如在几何中以"点"、"线"、"面"、"体"作为基本概念那样. 有鉴于此,方便的做法是,把"集合"作为整个数学的一个基本概念而不加定义.

对于基本概念,我们虽然不加定义,但可以用与它邻近的概念或形象的比喻来描述它,说明它. 如把集合说成是一些东西的"汇集"、"总汇"、"整体",就是对集合这一概念的描述. 通过描述,可以帮助我们对这一概念加深理解.

19 世纪 70 年代 Cantor 创立的集合论,虽然在上世纪末已被数学家广泛接受,并用它作为构筑整个数学大厦的基础,但是它本身却是用说明的方式建立的,未被严格理论化,因此被后人称为"朴素"的集合论. 尽管如此,在我们中学数学教科书或一般高等数学(非数学基础学科)书中所讲、所用的集合论知识,正是这种朴素的集合论. 关于它,我们作几点说明.

集合外延性原则　集合由它所含的元素而唯一确定. 两个集合 A 与 B 相等,即 $A=B$,当且仅当

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

集合中的元素不重复计算,即一个集合中任意两个元素都是彼此不同的.

空集 $\varnothing$ 被认为是一个集合,它不含任何元素. 由集合外延性原则知,空集是唯一存在的. 把空集当作一个集合,这既是出于现实的考虑,也是理论上的需要. 例如,{北极企鹅}是一个元素十分明

确的集合,但未经实证以前,其中有没有元素存在并不知道,也就是说它可能是个空集.要保证任何两个集合都可以作交集运算,也需要承认空集的存在.

只含一个元素 a 的集合 $\{a\}$,称为单元素集合或单子集.这时要注意 a 与 $\{a\}$ 的区别:a 是个体,$\{a\}$ 是整体,两者是不同层次的概念.

一个集合的元素可以是集合.有时为方便起见,把集合的集合称为集族.

例如,设 A 是直线 $x+y=1$ 上所有点的集合,B 是平行线 $x+y=p$ 的集合,于是集合 A 是集合 B 的一个元素,$A\in B$.

概括性原则 可以用一类事物的某一共有的特殊性质 p,来规定一个集合:凡具有性质 p 的事物 x(记为 $p(x)$)合成一个集合 $p=\{x\mid p(x)\}$.

这样,上面两个集合就可写成

$$A=\{(x,y)\mid x+y=1\}$$
$$B=\{l_p\mid l_p:x+y=p\}$$

子集 把集合 A 中一部分元素合成一个整体所形成的集合 M,称作 A 的子集,记作 $M\subseteq A$(或 $A\supseteq M$).上例中的集合 A 是集合 B 的元素,但不是 B 的子集,因为 A 的元素 (x,y) 不是 B 的元素.

特别地,对任何集合 A 而言,都有

$$A\subseteq A,\varnothing\subseteq A$$

即任何非空集合都有两个当然子集:自身和空集.空集则只有唯一的子集——它自身.空集是任何集合的子集.一个集合的非当然子集,称为真子集.

在一般情况下,无需区别一个集合的当然子集和真子集,因此用一个包含符号"$\subseteq$"就行了.如果 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$,则记为 $A\subsetneqq$

B,读作 A 真包含于 B.

属于"$\in$"与包含"$\subseteq$"这两种符号的意义是不同的.前者是元素(个体)与集合(整体)之间的关系;后者是集合与集合之间的关系.另外,两者的性质也不同.

例如,集合的包含关系具有反身性和传递性,即对任意集合 A、B、C,都有

Ⅰ. $A\subseteq A$(反身性);

Ⅱ. 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(传递性).

但属于关系$\in$却不具有上述性质.

幂集 设 A 为任意集合,由 A 的所有子集(包括 A 和$\varnothing$)作为元素的集合,称为 A 的幂集,记为 $P(A)$.若 A 是有限集,元素个数为 n,那么 $P(A)$也是有限集,且有 2^n 个元素.

2. 集合的运算

设 A、B 为两集合,则如下规定它们的并集、交集和差集:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$
$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}$$

特别地,若在我们考虑范围中,A 是所有对象合成的集合——全集 I,那么它与集 B 的差集,称为 B 的补集(或余集),它由所有不属于 B 的元素组成:

$$\complement B=\complement_I B=I\setminus B=\{x\mid x\overline{\in} B\}$$

利用 Venn(1834—1923)创造的文氏图,可以把集合运算的结果直观地表示出来,并可证明如下运算律:

Ⅰ. 等幂律 $A\cup B=A$,$A\cap A=A$

Ⅱ. 交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

Ⅲ. 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

Ⅳ. 分配律　　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Ⅴ. 吸收律　　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$

Ⅵ. 对合律　　$\complement(\complement A)=A$

Ⅶ. 德·摩根律　　$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$

$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$

该公式可以推广到任意多个集合的并与交的情况.

例 1 (IMO－14)　给出一个集合,它由 10 个互相不同的两位十进制的正整数组成.证明:这个集合必有两个无共同元素的子集,这两个集中各数之和相等.

证　设此 10 元素集为 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$,其互不相同的子集共有 $2^{10}=1024$ 个.但每个 $a_i(i=1,2,\cdots,10)\leqslant 99$,故每个子集中各数之和$\leqslant\sum\limits_{i=1}^{10}a_i\leqslant 99\times 10=990$.

因此,必有两个不空子集 A、B,二者之中各数之和相等.

若 $A\cap B=\varnothing$,则 A、B 即所求.若 $A\cap B\neq\varnothing$,令

$$A_1=A\setminus(A\cap B), B_1=B\setminus(A\cap B)$$

则 $A_1\cap B_1=\varnothing$,且 A_1、B_1 中各数之和仍相等,故 A_1、B_1 为所求.

总之,在 S 的子集中,一定存在两个无共同元素的集合,它们之中各数之和相等.

3. 集合的笛卡儿积

设 X、Y 为任两非空集合,把所有以 X 中元素 x 为第一元,Y 中元素 y 为第二元的序对 (x,y) 组成的集合,称为 X 与 Y 的笛卡儿积,记为

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$$

若 X 或 Y 是空集,规定 $X\times Y=\varnothing$.

特别地,当 $X=Y$ 时,$X\times X$ 记为 X^2.