高等学校教材

线性代数

王希云　主编

兵器工业出版社

高等学校教材

线 性 代 数

王希云 主编

兵器工业出版社

内 容 简 介

全书内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换共七章及计算机程序附录。对于加＊号内容，供学生选学。

本书结构新颖，内容丰富，阐述深入浅出，层次清晰，每章节后有本章小结，并有总复习题。可作为高等工科院校非数学类专业线性代数课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王希云主编．—北京：兵器工业出版社，2005.5

ISBN 7-80172-381-3

Ⅰ．线…　Ⅱ．王…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 018234 号

出版发行：兵器工业出版社	责任编辑．常小虹
发行电话：010-68962596,68962591	封面设计：仇雨婷
邮　　编：100089	责任校对：郭　芳
社　　址：北京市海淀区车道沟 10 号	责任印制：魏丽华
经　　销：各地新华书店	开　　本　787×1092　1/16
印　　刷：北京市艺辉印刷有限公司	印　　张　14
版　　次：2006 年 3 月第 1 版第 2 次印刷	字　　数：350 千字
印　　数．4001—5500	定　　价：22.80 元

贺　信

太原科技大学全体师生员工：

欣闻太原科技大学正式更名挂牌，我谨代表山西省人民政府，向你们表示热烈的祝贺！并向全体师生员工致以亲切的问候！

52年来，太原科技大学（原太原重型机械学院）为社会培养、输送了数以万计的高级专门人才，为我国的社会主义现代化建设事业做出了积极的贡献。

太原科技大学的正式更名挂牌，显示着太原科技大学的办学规模、办学水平和办学层次上了一个新台阶，是我省深化高等教育改革，坚持高等教育创新的又一硕果，必将对我省高等教育事业的改革与发展产生深远影响。希望太原科技大学以此为契机，积极贯彻落实科教兴省战略，继承和发扬优良传统，与时俱进，开拓创新，努力把学校建设成为一所特色鲜明的多科性大学，为全面建设小康社会做出新的更大的贡献！

山西省副省长　张少琴

2004年8月6日

总　　序

在国家教育部批准“太原重型机械学院”更名为“太原科技大学”的喜庆日子里，我校的专家学者出版这套学术丛书，让我们共同分享这些最新研究成果。

52年前，新中国刚刚成立不久，为了迎接国家经济建设高潮的到来，一所以培养机械工业高级专门技术人才为主的学校在华北大地诞生。从此，她伴随着祖国经济建设的蓬勃发展和时代前进的步伐，历经半个多世纪的风风雨雨，由小变大，由弱变强，现已发展成为一所以工为主，理、工、文、管、经、法、教育门类较为齐全、协调发展的特色鲜明的多科性大学。过去50多年来，太原重型机械学院为国家培养了大批高素质的各类创新人才，他们正奋战在祖国建设的各条战线上。今天，为了适应市场经济和高等教育发展的需要，这所曾经为共和国重工业发展做出过重要贡献的知名学院，正式更名为太原科技大学。不言而喻，这是太原重型机械学院办学实力不断增强、水平不断提高的明证，也是太原科技大学走向美好明天的开始。

浓郁的学术氛围是母校保持的优良传统。众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘、硕果累累，为神圣的科技教育事业和祖国的社会主义现代化建设做出了新的贡献。这套从书的编撰出版，定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享母校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长　郭勇义

2004年6月10日

前　言

本书是庆祝“太原重型机械学院”更名为“太原科技大学”的学术系列丛书中的一册。

线性代数是高等工科院校各类专业的一门重要基础理论课，是学习掌握其他数学学科和科学技术的基础。它的内容广泛存在于工程和科学技术的各个领域。随着计算机的日益普及，线性代数的理论和方法已成为工程技术人员不可缺少的工具。为了满足高等学校教学及各类工程技术人员工作的需要，我们特编写了这本《线性代数》。

本书以高等学校工科类本科学校《线性代数课程教学基本要求》为依据，参照工科部分专业的教学大纲和硕士研究生入学考试大纲，结合编者多年的教学实践而编写。我们力图使内容系统，叙述通俗，论证严谨；注重启发思维，培养能力；突出基本概念，基本理论与基本方法。本书可作为各工科院校本科生的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生及工程技术人员参考。考虑到各类专业与各类人员的不同要求，我们将部分内容注记“*”。如选用本书作为教材可根据具体情况加以取舍。

本书共分七章：行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。为了便于读者牢固地掌握每章内容，在每一节后都安排了适量的基本习题；每章结束后，都有本章基本要求、小结及总复习题，并在书末给出了习题的参考答案。附录还给出了部分计算机程序。

本书由王希云同志任主编；第一、二、三章由王希云同志编写；第四章由胡佑增同志编写；第五、六、七章及附录由董安强同志编写。

本书在编写与出版过程中得到了太原科技大学有关领导及太原科技大学印刷厂同志们的大力支持，我们在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

编　者

2005 年 1 月

目　录

第一章　行　列　式

行列式是一种重要的数学工具,是由人们求解线性方程组的需要而产生的。它不仅在数学中有广泛的应用,而且在物理学、力学等其他学科的研究中也经常用到。特别是在本门课程中,它是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具。

本章主要介绍行列式的概念、性质及计算方法,并介绍解线性方程组的克莱姆法则。

第一节　n 阶行列式

在中学时,我们学过二阶、三阶行列式,并用来解二元、三元线性方程组。为了讨论一般的 n 元线性方程组,需要把二阶、三阶行列式的概念加以推广,建立 n 阶行列式的概念。为此,先介绍排列的有关知识。

一、排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **元排列**。这里排列指 n 个不同数的全排列,所以 n 元排列共有 $\boldsymbol{n}!$ 种。

例 1　写出全部三元排列。

解　三元排列一共有 $3! = 6$ 个,它们是 123,132,213,231,312,321。

在上面的三元排列中,除了 123 是按自然顺序排列以外,其他排列中都可找到一个大数排在一个小数的前面,这样的排列顺序与自然顺序相反。例如,排列 132 中,3 排在 2 的前面;在排列 321 中,2 排在 1 的前面,3 排在 1 和 2 的前面。一般的,在一个排列中,若一个大数排在一个小数之前,就称这两个数构成一个**逆序**。在一个排列里出现的逆序总数叫做排列的**逆序数**。逆序数为偶数的排列叫**偶排列**;逆序数为奇数的排列叫**奇排列**。排列的奇偶性是定义 n 阶行列式的基础。为了方便,引进一个符号:如果 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是一个 n 元排列,把它的逆序数记作 $\sigma(j_1,j_2,\cdots,j_n)$。

例 2　确定排列 4321 和 1324 以及 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的奇偶性。

解　在排列 4321 中,因 2 在 1 之前构成一个逆序;3 在 1,2 之前构成两个逆序;4 在 1,2,3 之前构成三个逆序;此排列的逆序数 $\sigma(4321) = 1+2+3 = 6$,所以排列 4321 是偶排列。

在排列 1324 中,因 3 在 2 之前构成一个逆序,此排列的逆序数 $\sigma(1324) = 1$,所以排列 1324 是奇排列。

在排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 中,因

$$\sigma(n,n-1,\cdots,2,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=n(n-1)/2$$

当 $n=4k$ 或者 $n=4k+1$ 时,它是偶排列;而当 $n=4k+2$ 或者 $n=4k+3$ 时,它是奇排列,其中 k 为自然数。

在排列中,把任意两个数字互换位置,而其他数字不动,这种作出新排列的手续叫**对换**。对换具有性质:**一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性**。在这里我们不证明这个性质,仅以例说明它,如在例 2 中排列 4321 是偶排列,4 与 1 对换得排列 1324,它是奇排列。

二、n 阶行列式的定义

有了前面的准备知识,我们就可以对二阶、三阶行列式作进一步的讨论。

根据三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

我们可以看到:①三阶行列式的每一项都是位于不同行与不同列的三个元素的乘积,并且所有这种项,共有 3!(=6)项。②每项的元素都有两个下标,其中第一下标表示该元素所在的行数,第二下标表示所在的列数。每项的第一下标是按 123 的自然顺序排列,而第二下标恰好是全部的三元排列:123、231、312、321、213、132。前三个是偶排列,相应项的前面冠以"+"号;后三个是奇排列,相应项的前面冠以"-"号。

读者分析一下二阶行列式,也会发现有类似的结构规律,现在我们利用这个规律来定义 n 阶行列式。

定义　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素,仍然规定横排为行,竖排为列。取不同行与不同列的 n 个元素作乘积,并冠以正负号。这种乘积的一般项可以写成如下形式

$$(-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,这样的 $n!$ 项的和,叫做 n **阶行列式**,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)}(-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里$\sum$表示对所有n元排列求和。行列式也可简记为$\Delta(a_{ij})$或$|a_{ij}|$。利用对换的性质还可证明n阶行列式也可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

简言之，行列式等于不同行不同列的n个元素乘积的代数和。显然，n阶行列式是二阶、三阶行列式的推广。特别地，当$n=1$时，一阶行列式$|a|$就是数a。

一般来说，直接用定义去计算行列式是十分麻烦的，因为当n较大时，$n!$是增加很快的。如$4!=24$，$5!=120$，…。要写出这$n!$项是很不容易的，况且还要逐个地用排列的奇偶性确定其正负号。但是对一些特殊的行列式可以用定义来计算。

例3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 根据定义，D是$4!=24$项取自不同行不同列的4个元素乘积的代数和。然而，在这个行列式里，除了$acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$这四项外，其余项均含有零因子，因而等于零。与上面4项对应的排列依次是1234，1324，4321，4231。其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列。因此：

$$D = acfh - adeh + bdeg - bcfg$$

例4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由于第一列除了a_{11}之外其他元素都为0，于是想得非零项，第一列必须选a_{11}。而第二列不能选a_{12}，因为一行中只能选一个元素，所以第二列只能选a_{22}。同理第三列只能选a_{33}，…，第n列只能选a_{nn}。这样该行列式仅有唯一可能的非零项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，现在该项的行标与列标都是按自然顺序排列的，故$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

这样的行列式叫做**上三角形行列式**，它的值等于主对角线（行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线）上元素的乘积。同理可得**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称为**对角行列式**,其值也等于主对角线上元素的乘积。

习题 1-1

1. 确定下列排列的逆序数,指出它们的奇偶性：

32415,413265,6427531,$12\cdots n$。

2. 确定下列各项所冠的正负号：

(1) 在四阶行列式中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$；

(2) 在五阶行列式中 $a_{31}a_{12}a_{53}a_{24}a_{45}$；

(3) 在六阶行列式中 $a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}a_{13}a_{26}$。

3. 计算行列式：

(1) $D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(2) $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1),1} & a_{(n-1),2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$(4)\ D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,(n-1)} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1),2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

第二节　n 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,一般是较繁琐的。因此,我们要从定义推导出行列式的一些性质,以简化行列式的计算。

先介绍转置行列式的概念。对行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把它的行依次竖放成列就得到新的行列式

$$D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D^{T} 叫做 D 的**转置行列式**。

性质 1　行列式 D 等于其转置行列式 D^{T},即 $D = D^{T}$。

利用行列式的两种定义及转置行列式的定义直接可得结论。(证略)

例如

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=D^{T}$$

这个性质说明了行列式中行与列地位的对称性。由此可知,行列式中有关行的性质,对列也是成立的。

对换上述行列式 D 中的第二、三行得:

$$D_{1}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10=-D$$

一般有:

性质2 (反对称性质)对换行列式的两行,行列式变号。

证明 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (p < q)$$

对换第 p 行与第 q 行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } p \text{ 行} \\ \\ \text{第 } q \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

记 $D_1 = \Delta(b_{ij})$,则

$$a_{ij} = b_{ij}(i \neq p,q;j = 1,2,\cdots,n)$$
$$a_{pj} = b_{qj},a_{qj} = b_{pj}(j = 1,2,\cdots,n)$$

根据行列式的定义:

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{pj_p} \cdots b_{qj_q} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{qj_p} \cdots a_{pj_q} \cdots a_{nj_n} \\ &= - \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{pj_q} \cdots a_{qj_p} \cdots a_{nj_n} = -D \end{aligned}$$

证毕

以 r_p 表示行列式的第 p 行,c_p 表示行列式的第 p 列,则交换 p,q 两行(列)记作 $r_p \leftrightarrow r_q (c_p \leftrightarrow c_q)$。

推论1　行列式有两行(列)完全相同,则行列式的值等于零。

因为对换行列式相同的两行,有 $D_1 = D$,又据性质2,$D_1 = -D$,于是 $D = -D$,所以 $D = 0$。

性质3　用数 k 乘行列式的某行(列)等于用数 k 乘此行列式,或者说某行(列)的公因数 k 可提到行列式符号的外面,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{p1} & \cdots & ka_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

证明：记 $D_1 = \Delta(b_{ij}), D = \Delta(a_{ij})$，则

$$a_{ij} = b_{ij}(i \neq p, j = 1,2,\cdots,n)$$

$$ka_{pj} = b_{pj}(j = 1,2,\cdots,n)$$

根据行列式的定义：

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{pj_p} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots ka_{pj_p} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD。\quad \text{证毕} \end{aligned}$$

行列式第 p 行(列)乘以数 k 记作 $r_p \times k(c_p \times k)$，第 p 行(列)提取公因子 k，记作 $r_p \div k(c_p \div k)$，

例如

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \times 2} \begin{vmatrix} 2\times 2 & 1\times 2 & 2\times 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 = 2D$$

推论 2　行列式某行(列)的元素全为零，则行列式的值等于零。

因为由性质 3 公因数 0 可提到行列式的外面，0 乘行列式等于零。

推论 3　行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式的值等于零。

因为把比例系数提出后，行列式两行(列)完全相同，所以它的值等于零。

性质 4　行列式的某行(列)元素都为两数之和，则行列式等于两个行列式之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1}+c_{p1} & b_{p2}+c_{p2} & \cdots & b_{pn}+c_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{pj_p} + c_{pj_p}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{pj_p} \cdots a_{nj_n} + \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{pj_p} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}。\quad \text{证毕} \end{aligned}$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10$$

性质 4 显然可以推广到第 i 行(列)的元素是 m 项($m > 2$)的和的情形。

性质 5　将行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1}+ka_{p1} & a_{q2}+ka_{p2} & \cdots & a_{qn}+ka_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以数 k 乘第 p 行(列)加到第 q 行(列)上,记作 $r_q + kr_p(c_q + kc_p)$

例如

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+4 & 3+2 & 1+4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = D$$

这个性质可由性质 4 与推论 3 导出。

简化行列式计算的另一种主要方法是降阶,即将较高阶的行列式的计算转化为较低阶行列式的计算。为此,首先引入余子式和代数余子式等相关概念。对于行列式 D,把元素 a_{ij} 所在的行和列划去,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做 D 中元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},即

若 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} 再冠以 $(-1)^{i+j}$ 后叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}。

即：$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

例如，求四阶行列式 D 中元素 a_{32} 的余子式和代数余子式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32}$$

性质 6 （行列式展开定理）行列式的值等于行列式的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

为了证明性质6，我们介绍如下的引理。

引理　若 n 阶行列式 D 中的第 i 行除 a_{ij} 外，其他元素全为零，则 $D = a_{ij}A_{ij}$。

证明　先证明 $i = j = 1$ 的特殊情形，在 D 中含有 a_{11} 的项之和应为

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\sigma(1j_2\cdots j_n)} a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11}\sum(-1)^{\sigma(j_2\cdots j_n)} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}A_{11} \end{aligned}$$

再证明一般情形，在 n 阶行列式 D 中，设第 i 行除 a_{ij} 外其余元素均为零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们交换行列式 D 的行列，使 a_{ij} 位于第一行，第一列，并且使 a_{ij} 的子式不变。

为了达到这一目的，我们把 D 的第 i 行依次与第 $i-1, i-2, \cdots, 2, 1$ 行交换，这样共经过 $i-1$ 次交换两行的步骤，把 D 的第 i 行换到第一行的位置。然后，再与第 $j-1, j-2, \cdots, 2, 1$ 列交换，这样共经过 $j-1$ 次交换两列的步骤，把 D 的第 j 列换到第一列的位置。这时