新课标2006

配合北师大版

紧扣新课标考纲

透视中考考点热点

反映最新命题趋向

中考数学

命题热点与考点透视（上）

（精析精讲）

俞剑波 俞凯／主编

气象出版社

《中考数学命题热点与考点透视（上）精析精讲》编委名单

主　编： 俞剑波　俞　凯

副主编： 郑　勇　张念椿　朱玲娜　刘国南

编　委： 俞剑波　俞　凯　叶泳泳　顾定安
胡官道　郑飞海　俞全波　郑　辉
梁文雯　乐丽娜　张　萍　何建文
靳建颖　彭　红　孔　侠　张安江
韩廷亮　李　雪　刘长忠　吴兆全

编 者 的 话

素质教育召唤我们，教学改革必须走“提高教学效率，减轻学生过重负担”之路。理论与实践告诉我们，讲练结合、精讲精练，是学生掌握知识、强化能力、提高素质的关键。因此，新课标中考讲什么、练什么、怎么讲、如何练、考什么、如何考，这些越来越成为广大教师、学生及家长关注的焦点。《中考数学命题热点与考点透视》就是为了解决这一问题而编写的。

本书是我们在深入研究《课程标准》和《考试大纲》，深入研究近两年课改实验区中考原题，总结命题规律，分析中考动态，吸纳中考信息，预测命题趋势，在充分融汇实验区中考改革的思想和精神的基础上，以严肃、认真、科学、负责的态度编写而成的。我们从体例的制定，章节的划分，到习题的选配，均经过仔细斟酌和严格推敲。力求体现以教师为主导，学生为主体的现代教育思想，使广大师生能在及时反馈中获得更多的信息量。着眼新课程全面素养的打造，从根本上快速提升学生综合素质和应试能力。通过考点聚焦与解读、热点透视、总结规律、点拨技巧、专题分层训练使学生了解中考、感受中考、体验中考、为决胜 2006 年中考做准备。

本书在编写过程中我们以分层递进教学原理为指导，每一单元中均设计了分层练习。我们认为分层练习是课堂上实施分层递进教学的一种重要形式。通过分层练习来体现分层目标的要求，有助于师生把握教学目标；在课堂上进行分层练习，可以使各层次学生都能比较充分地参与学习活动，也便于教师的区别、有针对性的指导；分层练习中的“阶梯”为中、低层次学生中的学有余力者、设立了递进的目标，提供了递进的机会。我们相信，这项工作对大面积提高初中数学教学质量将会产生有益的作用，同时也会促进分层递进教学的研究和实践进一步深化。

全书由两部分组成：

第一部分是同步辅导，按照知识体系分为二十三讲。通过这一部分的复习，使学生全面而且有重点地掌握初中数学内容，达到巩固、提高的目的。每一讲以考点为切入点，对照经典例题进行解读，每一道例题都有详尽的分析和解答；每一讲的典型考题例析中都安排综合探究应用，主要是引导学生实施自主性、启发性、探究性的学习与复习，综合考点，精心选题，开启学生心窍，提高学生综合探究能力。

第二部分是专题辅导，在这一部分，根据初中数学重点内容、方法和中考要求共分为六讲。在每个专题中，阐述所涉及的内容、方法在中考中的地位和作用，不避疑难，进一步加强对解题规律和数学思想方法的总结，强化对知识能力的综合要求，使学生的应考能力有切实的提高。

在编写本书的过程中，我们力求对初中数学总复习的全过程达到优化设计，为广大师生提供一本较好的复习用书。尽管我们付出了较大的努力，但因能力有限、时间仓促，如还有不尽如人意的地方，恳请广大读者提出宝贵意见。最后我们期待着它能成为更多初三学生打开中考数学题库的金钥匙，愿它能成为身处无边题海中的初三学生送去一叶小舟，一付双桨，顺利到达理想的彼岸。

至真至诚地祝福，亲爱的读者，你会成功！

作者　俞剑波

2005 年 9 月于浙江

目　　录

第一部分　同步辅导篇

第二部分　专题辅导篇

第一部分　同步辅导篇

§1.1　实数及其运算

一、考点聚焦与解读

1. 实数的分类

(1) 实数按定义分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{matrix}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

(2) 实数按大小分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\\text{零}\\\text{负实数}\end{cases}$$

2. 数轴

(1) 数轴的三要素：原点、正方向和单位长度.

(2) 数轴上的点与实数一一对应.

3. 相反数

实数 a 的相反数是 $-a$，零的相反数是零.

(1) a，b 互为相反数 $\Leftrightarrow a+b=0$.

(2) 在数轴上表示相反数的两点与原点对称.

4. 倒数

乘积是 1 的两个数互为倒数，零没有倒数.

5. 绝对值

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}.$$

6. 算术根

(1) 正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根，零的算术根仍是 0.

(2) 当 $a\geqslant0$，n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$（当 $n=2$ 时，有 $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$ 成立）.

(3) 实数的三个非负性：$|a|\geqslant0$，$a^2\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0$ $(a\geqslant0)$.

(4) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

7. 科学记数法

(1) 把一个数记成 $a\times 10^n$ 的形式（其中 $1\leqslant a<10$，n 是整数），这种记数法叫做科学记数法.

(2) 记数的方法：

①确定 a：a 是只有一位整数数位的数.

②确定 n：当原数大于或等于 1 时，n 等于原数的整数位数减 1；当原数小于 1 时，n 是负整数，它的绝对值等于原数中左起第一个非零数字前零的个数（含整数位上的零）

8. 近似数与有效数字

一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位. 这时，从左边第一个不是 0 的数字起，到精确的数位止，所有的数字，都叫做这个数的有效数字.

9. 实数的运算

在实数范围内加、减、乘、除、乘方运算都可以进行，但开方运算不一定能进行，如负数不能开偶次方. 实数运算的基础是有理数运算，有理数的一切运算性质和运算律都适用于实数运算. 正确地确定运算结果的符号和灵活运用各种运算律来进行运算是掌握好实数运算的关键.

10. 实数大小的比较

正数大于零，负数小于零，正数大于一切负数；两个正数，绝对值大的较大；两个负数，绝对值大的反而小. 从数轴上看，数轴上右边的点表示的实数大于左边的点所表示的实数.

11. 奇数与偶数

在整数中，能被 2 整除的数是偶数，可用 $2k$ 表示；不能被 2 整除的数是奇数，可用 $2k\pm 1$ 表示（其中 k 是整数）. 通常我们所说的“单数”、“双数”，也就是奇数和偶数，即 ± 1，± 3，± 5，…是奇数；0，± 2，± 4，± 6，…是偶数. 这里特别注意 0 是偶数.

二、五个防患点

1. 区别“除”与“除以”.
2. 括号前面是负号，去掉括号各项变号.
3. 零没有倒数.
4. 同级运算从左到右依次计算.
5. 零的零次幂没有意义.

三、典型考题例析

考点 1　实数的分类

例 1　选择题

(1)（2004 年浙江衢州市）下列各数中，是无理数的是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. -2　　C. π　　D. 1.732

(2) 在数 3.14，$\sqrt{2}$，π，0.3，$\sin 60°$，$\frac{1}{7}$，$\sqrt{9}$中有理数的个数为（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

(3) 若无理数 a 满足不等式 $1<a<4$，请写出两个你熟悉的无理数 a：______；

解：(1) C　　　(2) C　　　(3) 答案不惟一，如 π，$\sqrt{5}\cdots$

考点 2　倒数、相反数

例 2　(1)（2003 年江苏泰州市）一个数的倒数是 $\frac{3}{2}$，这个数的相反数是______.

(2) 已知 a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，那么 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\sqrt{cd}=$______；

(3) 已知 x、y 是实数，且 $|x+y-1|$ 与 $\sqrt{2x-y+4}$ 互为相反数，求实数 yx 的倒数.

解：(1) $-\frac{2}{3}$；(2) -1；(3) 2.

考点 3　绝对值

例 3　(1) 绝对值不大于 3 的整数有（　　）个

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 7

(2) a 为有理数，则 $a+|a|$ 的值（　　）

A. 一定是正数　　B. 一定不是正数　　C. 一定是负数　　D. 一定不是负数

(3)（2004 年黑龙江哈尔滨市）已知 $|a|=3$，$|b|=2$，且 $ab<0$，则 $a+b$ 的值等于______.

解：(1) D　　　(2) D　　　(3) 1 或 -1

考点 4　科学记数法与近似数

例 4　(1)（2004 年广西南宁市实验区）南宁国际会展中心是即将举办的中国一东盟博览会的会址，其总建筑面积为 112100 平方米，用科学记数法表示为______（保留三个有效数字).

(2)（2004 年黑龙江省）生物学家发现一种病毒的直径约为 0.000043 米，用科学记数法表示为______.

(3) 2003 年 6 月 1 日 9 时，举世瞩目的三峡工程正式下闸蓄水，首批 4 台机组率先发电，预计年内可发电 5500000000 度，这个数字用科学记数法表示，记作______度. 近似数 0.30 精确到______位，有______个有效数字.

解：(1) 1.12×10^5 平方米　(2) 4.3×10^{-5} 米　(3) 5.5×10^9；百分，两

考点 5　平方根与算术平方根

例 5　(1) 16 的平方根是______；$\sqrt{16}$ 的算术平方根是______；-8 的立方根是____；

(2)（2003 年山东济南市）请你观察思考下列计算过程：$\because 11^2=121$，$\therefore \sqrt{121}=11$；同样：$\because 111^2=12321$，$\therefore \sqrt{12321}=111$；……

由此猜想 $\sqrt{12345678987654321}=$______.

(3) 已知某正数的平方根为 $2a-3$ 和 $a-3$，而数 x 在数轴上对应点的位置在数 a 与 -1 之间，化简：$|x+2|+\sqrt{(x+5)^2}$.

解：(1) ±4；4；-2. (2) $\overbrace{1\cdots1}^{9个1}$. (3) $2x+7$.

考点 6　数轴

例 6　(1)（2004 年湖北宜昌市）实数 x 在数轴上的位置如图 1-1-1 所示，则（　　）

图 1-1-1

A. $|x|<1$　　B. $|x|<0$　　C. $|x|>1$　　D. $|x|=0$

(2) 实数 a、b 在数轴上的位置如图 1-1-2 所示，则下面结论正确的是（　　）

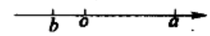

图 1-1-2

A. $a+b>a>b>a-b$　　B. $a>a+b>b>a-b$

C. $a-b>a>b>a+b$　　D. $a-b>a>a+b>b$

解：(1) C

(2) 从数轴上看：$a>0$，$b<0$，$|a|>|b|$，从而 $0<a+b<a$，$a-b>a$，得出 $a-b>a>a+b>b$　故应选 D.

[评析] (1) 去掉绝对值符号的关键是看绝对值符号内数的符号. (2) 两点落在原点两旁时，对应的两数和（差）的符号就特别留心.

考点 7　实数大小的比较

例 7　(2003 年江苏扬州市) 规定一种新的运算：$a\Delta b=a\times b-a-b+1$，如 $3\Delta 4=3\times 4-3-4+1$，请比较大小：$(-3)\Delta 4$ ______ $4\Delta(-3)$（填"<"，"="或">"）.

解：由题意，$(-3)\Delta 4=(-3)\times 4-(-3)-4+1=-12$，

$4\Delta(-3)=4\times(-3)-4-(-3)+1=-12$，

所以，$(-3)\Delta 4=4\Delta(-3)$.

考点 8　实数运算

例 8　(1)（2004 年浙江宁波）计算：$(\pi-3)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+(-1)^3-\sin^2 45°$

解：原式 $=1-4-1-\frac{1}{2}=-4\frac{1}{2}$.

(2)（2004 年安徽芜湖市实验区）计算：$\left[\frac{1}{2}\right]^{-2}-2^3\times 0.125+2004^0+|-1|$

解：原式 $=4-8\times 0.125+1+1$

$=4-1+2$

$=5$.

综合探究应用

例 9　问题：比较 2004^{2005} 和 2005^{2004} 的大小. 为了得出结论，从特例入手比较 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小. (1) 通过计算比较下列各组数的大小：1^2 ______ 2^1，2^3 ______ 3^2，3^4 ______ 4^3，4^5 ______ 5^4，5^6 ______ 6^5….

(2) 归纳发现：当 $n<3$ 时，n^{n+1} ______ $(n+1)^n$；当 $n\geqslant 3$ 时，n^{n+1} ______ $(n+1)^n$，于是可以得出结论：2004^{2005} ______ 2005^{2004}.

解：(1) $1^2=1<2^1=2$，$2^3=8<3^2=9$，$3^4=81>4^3=64$，$4^5=1024>5^4=625$，$5^6=15625>6^5=7776$….

(2) 当 $n<3$ 时，$n^{n+1}<(n+1)^n$；当 $n\geqslant 3$ 时，$n^{n+1}>(n+1)^n$，于是可以得出结论：$2004^{2005}>2005^{2004}$.

[评析] (1)"从特例入手，总结归纳出一般结论，运用一般结论解决问题"是解答这类题目的一般方法.

(2) 围绕一个具体的目标开展学习和研究活动，并总结归纳出一般结论，这种学习方法称为研究性学习. 近几年中考试题加强了对学生研究能力的考查，这类考题很多，本例只是一个缩影.

§1.2 整式运算与分解因式

一、考点聚焦与解读

1. 用运算符号把数与表示数的字母连接而成的式子叫代数式. 单独一个数或一个字母也是代数式.

2. 整式：没有除法运算或虽有除法运算而除式里不含字母的有理式叫做整式.

3. 整式的运算

(1) 数的运算律对代数式同样适用.

(2) 整式的加减：整式的加减法实际上就是合并同类项，遇到括号，一般要先去掉括号，去括号的方法：

$+(a+b-c)=a+b-c$；$-(a+b-c)=-a-b+c$.

(3) 幂的运算法则；(m，n 为正整数)

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$ $(a\neq0)$.

(4) 整式的乘法：单项式与单项式相乘，把系数、同底数幂分别相乘，作为积的因式，只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

单项式与多项式相乘及多项式与多项式相乘方法如下：

$m(a+b-c)=ma+mb-mc$；$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$.

(5) 整式除法：单项式除以单项式，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

多项式除以单项式，把这个多项式的每一项除以这个单项式，然后把所得的商相加.

(6) 乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

(7) 零指数和负整数指数：

规定 $a^0=1$ $(a\neq0)$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$ (p 为正整数).

4. 因式分解

(1) 因式分解：把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

(2) 因式分解的基本方法　①提取公因式法；②公式法.

(3) 因式分解常用的公式如下：

①$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；②$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

二、三个防患点

1. 求代数式的值，一般先化简后再求值.

2. 正确认识单项式的系数与次数，多项式的项与次数，常数项.

3. 因式分解应在指定范围内分解到不能再分解为止，遇相同的因式应写成幂的形式.

三、典型考题例析

考点 1　列代数式

例 1　填空题

(1) 用代数式表示：a 的相反数的平方是______；a 的平方的相反数是______；a、b 的

平方和是______.

(2) a 的一半与 b 的绝对值的$\frac{1}{3}$的差是______.

(3) 某印刷厂四月份印刷了科技书籍 20 万册，第二季度平均每月增长的百分率为 x，那么六月份印刷科技书籍______万册.

(4) 若甲比乙的 2 倍大 3，设乙为 x，则甲为______；设甲为 x，则乙为______（都用 x 的代数式表示).

解：(1) $(-a)^2$，$-a^2$，a^2+b^2. (2) $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}|b|$. (3) $20(1+x)^2$. (4) $2x+3$，$\frac{x-3}{2}$.

例 2　选择题

(1) 在代数式 xy^2 中，x 与 y 的值各减少 25%，则代数式的值（　　）

A. 减少 50%　　B. 减少 75%　　C. 减少其值的$\frac{37}{64}$　　D. 减少其值的$\frac{27}{64}$

(2) 随着通讯市场竞争日益激烈，某通讯公司的手机市话收费标准按原标准每分钟降价了 a 元后，再次下调 25%，现在的收费标准是每分钟 b 元，则原收费标准每分钟为（　　）

A. $\left(\frac{5}{4}b-a\right)$元　B. $\left(\frac{5}{4}b+a\right)$元　C. $\left(\frac{3}{4}b+a\right)$元　D. $\left(\frac{4}{3}b+a\right)$元

解：(1) C. (2) D.

[评析] 用代数式表示简单的数量关系，它实际上就是考查数学的语言表达能力. 在用字母表示数时，要注意运算顺序和括号的使用方法.

例 3　(1) 已知 $a-b=3$，$b+c=-5$，则代数式 $ac-bc+a^2-ab$ 的值是（　　）

A. -15　　B. -2　　C. -6　　D. 6

(2) 若代数式 $2y^2+3y+7$ 的值是 8，那么 $4y^2+6y-9$ 的值是（　　）

解：(1) C. (2) C.

[评析] (1) 求代数式的值时，一般先把字母的值代入，再进行计算，结果要化为最简.

(2) 求代数式的值时，有时灵活运用整体代入思想，常能使问题得到简捷迅速的解决，这也是求条件代数式值的常用方法之一.

考点 2　分解因式

例 4　分解因式

(1)（2004 年江苏南京市）分解因式 $3x^2-3=$______.

(2)（2004 年陕西省）分解因式 $x^3y^2-4x=$______.

(3)（2004 年青海西宁市）分解因式 $2x(a-2)+3y(2-a)=$______.

(4)（2004 年青海湟中县实验区）分解因式 $x^2y-4xy+4y=$______.

(5)（2004 年宁夏回族自治区）分解因式 $1-x^2+2xy-y^2=$______.

(6)（2004 年内蒙古呼和浩特）分解因式 $x-x^2-y+y^2=$______.

解：(1) 原式$=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$.

(2) 原式$=x^3y^2-4x=x(x^2y^2-4)=x[(xy)^2-2^2]$

$=x(xy+2)(xy-2)$.

(3) 原式$=2x(a-2)-3y(a-2)=(a-2)(2x-3y)$.

(4) 原式$=y(x^2-4x+4)=y(x-2)^2$.

(5) 原式$=1-(x^2-2xy+y^2)=1-(x-y)^2=(1-x+y)(1+x-y)$.

(6) 原式$=(x-y)-(x^2-y^2)=(x-y)(1-x-y)$.

考点3　整式的运算

例5　(1)（2004年江西南昌市）先化简，再求值 $[(x-y)^2+(x+y)(x-y)]\div 2x$，其中 $x=3$，$y=-1.5$

解：原式$=(x^2-2xy+y^2+x^2-y^2)\div 2x=(2x^2-2xy)\div 2x=x-y$

当 $x=3$，$y=-1.5$ 时，原式的值$=3-(-1.5)=4.5$.

(2)（2005广东茂名市实验区）已知 $A=(a+2)(a-2)$，$B=2(6-\frac{1}{2}a^2)$，求 $A+B$.

解：$\because A=(a+2)(a-2)$，$B=2(6-\frac{1}{2}a^2)$，

$\therefore A+B=(a+2)(a-2)+2(6-\frac{1}{2}a^2)$

$=a^2-4+12-a^2$

$=8$.

综合探究应用

例6　（2004年山西临汾市）阅读材料并解答问题：我们已经知道，完全平方公式可以用平面几何的面积来表示，实际上还有一些代数恒等式也可以用这种形式表示，例如：$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$ 就可以用图1-2-1或图1-2-2等图形的面积来表示.

(1) 请写出图1-2-3所表示的代数恒等式：________________.

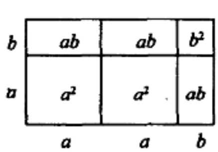

图1-2-1

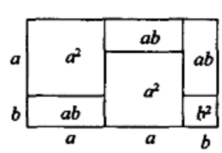

图1-2-2

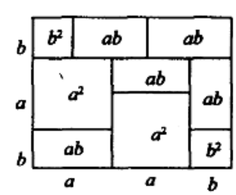

图1-2-3

(2) 试画出一个几何图形，使它的面积能表示：$(a+b)(a+3b)=a^2+4ab+3b^2$

(3) 请仿照上述方法另写一个含有 a、b 的代数恒等式，并画出与之对应的几何图形.

解：(1) $(2a+b)(a+2b)=2a^2+5ab+2b^2$；

(2) 画出几何图形，如图1-2-4；

(3) 按题目要求写出一个与上述不同的代数恒等式，画出与所写代数恒等式对应的平面几何图形（留给读者自己完成）.

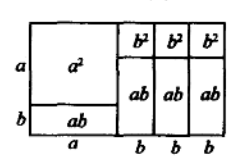

图1-2-4

§1.3　分式与根式

一、考点聚焦与解读

1. 分式

(1) 分式：整式 A 除以整式 B，可以表示成$\frac{A}{B}$的形式. 如果除式 B 中含有字母，那么称$\frac{A}{B}$为分式，其中 A 称为分式的分子，B 称为分式的分母. 对于任意一个分式，分母都不能为零.

(2) 分式的基本性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$　$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（$M$ 为不等于 0 的整式）

(3) 分式的运算

①加减法：$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$，$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$；

②乘除法：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$；

③乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）；

④符号法则：$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{-b}=-\frac{-a}{b}$.

(4) 约分：根据分式的基本性质，把分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分.

(5) 通分：根据分式的基本性质，把异分母的分式化成和原来的分式分别相等的同分母的分式，叫做分式的通分.

2. 分式方程的有关概念

(1) 分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

(2) 解分式方程的基本思路：把分式方程转化为整式方程求解，注意验根.

(3) 解分式方程的主要步骤：首先要找出最简公分母，然后根据分式的基本性质去分母，再解整式方程，最后要验根.

3. 二次根式

(1) 基本概念：二次根式、最简二次根式

(2) 二次根式的主要性质

① $(\sqrt{a})^2=a$　$(a\geqslant 0)$；

②$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$；

③$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$　$(a\geqslant 0，b\geqslant 0)$；

④$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$　$(b\geqslant 0，a>0)$.

(3) 二次根式的运算

①二次根式的加、减法；②二次根式的乘、除法.

二、四个防患点

1. 分式的分母不能为零.

2. 运用分式的基本性质时，乘以或除以的数或整式的值不能为零.

3. 解分式方程要验根.

4. $\sqrt{a}$必须满足$a\geqslant0$.

三、典型考题例析

考点1 分式的概念

例1 分式$\frac{|a|-2}{(a-2)(a+5)}$

(1) 当a为何值时，分式有意义；

(2) 当a为何值时，分式无意义；

(3) 当a为何值时，分式的值为零.

[评析] 当分式的分母为零时，分式无意义；只有分母的值不为零时分式才有意义. 分式的值为零的前提是分式有意义. 必须满足两个条件，一是分母不为零，二是分子的值为零.

解：(1) 由$(a-2)(a+5)=0$ 解得$a=2$或$a=-5$

所以当$a\neq2$且$a\neq-5$时，分式有意义.

(2) 由$(a-2)(a+5)=0$ 解得$a=2$或$a=-5$

所以当$a=2$或$a=-5$时，分式无意义.

(3) $\because|a|-2=0$ $\because a=\pm2$

$\because$当$a=2$时，分母$(a-2)(a+5)=0$，当$a=-2$时，分母$(a-2)(a+5)\neq0$

$\therefore$当$a=-2$时，分式的值为零.

考点2 分式的基本性质

例2 (2003年江西省) 写出一个分母至少含有两项，且能够约分的分式：______.

答案：$\frac{x}{x^2-x}$等.

[评析] 1. 弄清题目要求和约分含义是关键.

2. 根据分式基本性质运用逆向思维方法求解. 即$\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x(x-1)}=\frac{x}{x^2-x}$.

考点3 分式的化简和计算

例3 (1) (2004年浙江舟山) 计算：$\frac{1-a}{a}\div\left(1-\frac{1}{a}\right)$的正确结果是 ( )

A. $a+1$ B. 1 C. $a-1$ D. -1

(2) (2004年浙江宁波) 已知a、b为实数，且$ab=1$，设$M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$，$N=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$. 则$M$、$N$的大小关系是 ( )

A. $M>N$ B. $M=N$ C. $M<N$ D. 不确定

解：(1) 原式$=\frac{1-a}{a}\div\frac{a-1}{a}=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{a}{-(1-a)}=-1$，所以选D.

(2) $M=\frac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{2ab+a+b}{ab+a+b+1}=\frac{2+a+b}{a+b+2}=1$，

$N=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}=\frac{2+a+b}{ab+a+b+1}=\frac{2+a+b}{2+a+b}=1.$

$\therefore M=N$　即选 B.

考点 4　分式的求值

例 4　已知 $x=2\sqrt{2}-2$，求 $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{x^2-4x+4}+\frac{1}{x+2}$

解：原式 $=\left(\frac{x^2+2x-x^2+2x}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\frac{(x-2)^2}{4x}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{x-1}{x+2}.$

当 $x=2\sqrt{2}-2$ 时，

原式的值 $=\frac{2\sqrt{2}-2-1}{2\sqrt{2}-2+2}=\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$

[评析] 分式的分子、分母是多项式，在乘除运算中要进行因式分解，然后再约分，化简结果必须是最简分式，化简结果再代入求值.

考点 5　分式方程的解法

例 5　(1) 解方程：$\frac{2}{x}+\frac{x}{x+3}=1.$

解：方程两边同乘以 $x(x+3)$，得

$2(x+3)+x^2=x(x+3)$

$2x+6+x^2=x^2+3x$　$\therefore x=6$

检验：把 $x=6$ 代入 $x(x+3)=54\neq 0$

∴原方程的解为 $x=6$.

(2) 解方程：$x-\frac{6}{x}=1.$

解：方程两边同时乘以 x，得

$x^2-6=x.$

$x^2-x-6=0.$

解得　$x_1=3$，$x_2=-2.$

经检验：$x_1=3$，$x_2=-2$ 都是原方程的解.

∴原方程的解为 $x_1=3$，$x_2=-2.$

(3) 解方程 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x-3}{x+1}=2.$

解：原方程变为 $(x+1)^2-3(x-1)^2=2(x+1)(x-1)$

整理得 $x^2-2x=0$

解得 $x_1=0$，$x_2=2$. 经检验均是原方程的根

∴原方程的解为 $x_1=0$，$x_2=2.$

综合探究应用

例 6　请先阅读下列一段文字，然后解答问题.

“要比较 a 与 b 的大小，可以先求出 a 与 b 的差，再看这个差是负数、正数还是零.”由此可见，要判断两个代数式值的大小，只要考察它们的差就可以了.

问题：甲、乙两人两次同时在同一粮店购买粮食（假设两次购买粮食的单价不相同）. 甲每次购买粮食 100 千克，乙每次购买粮食用去 100 元. 设甲、乙两人第一次购买粮食的单价为每千克 x 元，第二次购买粮食的单价为每千克 y 元.

(1) 用含 x，y 的代数式表示：甲两次购买粮食共需付粮款______元；乙两次共购买______千克粮食. 若甲两次购买粮食的平均单价为每千克 Q_1 元，乙两次购粮的平均单价为每千克 Q_2 元，则 $Q_1=$______，$Q_2=$______.

(2) 若规定：谁两次购买粮食的平均单价低，谁的购买方式就更合算，请你判断甲、乙两人的购粮方式哪个更合算些，并说明理由.

解：(1) $100(x+y)$，$\frac{100}{x}+\frac{100}{y}$，$\frac{x+y}{2}$，$\frac{2xy}{x+y}$.

(2) $Q_1-Q_2=\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}$.

$\because x\neq y$，$\therefore (x-y)^2>0$，又 $x>0$，$y>0$.

$\therefore \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$，

$\therefore Q_1>Q_2$.

故乙的购粮方式更合算些.

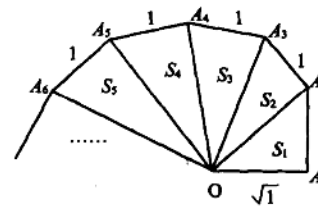

图 1-3-1

例 7　细心观察图 1-3-1，认真分析各式，然后解答问题：

$(\sqrt{1})^2+1=2$，$S_1=\frac{\sqrt{1}}{2}$；$(\sqrt{2})^2+1=3$，$S_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$(\sqrt{3})^2+1=4$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$；……　…….

(1) 请用含有 n（n 是正整数）的等式表示上述变化规律；

(2) 推算出 OA_{10} 的长；

(3) 求出 $S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_{10}^2$ 的值.

解：(1) $(\sqrt{n})^2+1=n+1$；$S_n=\frac{\sqrt{n}}{2}$.

(2) $\because OA_1=\sqrt{1}$，$OA_2=\sqrt{2}$，$OA_3=\sqrt{3}$，…，$\therefore OA_{10}=\sqrt{10}$.

(3) $S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_{10}^2=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}(1+2+3+\cdots+10)=\frac{55}{4}$.

[评析] (1) 本例是将课本中的一道作图题改编成的探索数式规律的题. 解答此例需认真分析各式的排列规律.

(2) 我们把第 (3) 问进行思维延伸，若求 $S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_n^2$，则为

$S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_n^2=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdots+\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{4}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{8}n(n+1)$.

§1.4 方程与方程组

一、考点聚焦与解读

1. 一元一次方程的有关概念

(1) 一元一次方程的定义：在一个方程中，只含有一个未知数（元），并且未知数的指数是1（次），这样的方程叫做一元一次方程.

(2) 一元一次方程的一般形式：$ax=b$ $(a\neq 0)$.

(3) 方程的解：使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解.（一元方程的解也叫根）

(4) 一元一次方程求解的一般步骤：

去分母，去括号，移项，合并同类项，化为最简方程 $ax=b$，两边同除以未知数的系数 a $(a\neq 0)$，得到方程的根 $x=\frac{b}{a}$.

2. 一元二次方程的有关概念

(1) 只含有一个未知数 x 的整式方程，并且都可以化为 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）的形式，这样的方程叫做一元二次方程.

(2) 一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，其中 a 为二次项系数，b 为一次项系数，c 为常数项.

3. 一元二次方程的解法

(1) 开平方法：$ax^2=b$ 型

$x^2=a$ $(a\geqslant 0)$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$.

(2) 配方法：$x^2+px+q=0$ 型

直接配方 $(x+\frac{p}{2})^2=\frac{p^2-4q}{4}\Rightarrow$ 当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时，$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

(3) 求根公式法 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(4) 分解因式法：当一元二次方程的一边为0，而另一边易于分解成两个一次因式的乘积，这种解一元二次方程的方法称为分解因式法.

4. 一元二次方程根的判别式

(1) 方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，则 b^2-4ac 叫做一元二次方程根的判别式.

(2) 一元二次方程根的判别

当 $b^2-4ac>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

当 $b^2-4ac=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

当 $b^2-4ac<0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

5. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 根与系数的关系

若 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

6. 二元一次方程和二元一次方程组的有关概念

(1) 含有两个未知数，并且所含未知数的项的次数都是1的方程叫做二元一次方程.

(2) 含有两个未知数的两个一次方程所组成的一组方程，叫做二元一次方程组.

(3) 适合一个二元一次方程的一组未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解.

(4) 二元一次方程组中各个方程的公共解，叫做这个二元一次方程组的解.

(5) 解二元一次方程组的基本思路是“消元”——把“二元”变为“一元”.

(6) 解二元一次方程组的方法有：代入消元法、加减消元法、图象法.

注：两个一次函数图象的交点坐标就是二元一次方程组的解.

二、二个防患点

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中二次项系数 $a\neq0$

2. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，要分 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况讨论.

三、典型考题例析

考点1　方程、方程组及其解的概念

例1　(1) 关于 x 的方程 $ax^2-3x+2=0$ 是一元二次方程，则（　　）

A. $a>0$　　B. $a\neq0$　　C. $a=1$　　D. $a\geqslant0$

(2) 已知方程 $(m^2-4)x^2-(m+2)x+1=0$. 当 m ______时，它是一元二次方程；当 m ______时，它是一元一次方程.

解：(1) B；(2) $\neq\pm2$，$=2$.

例2　(2005年江西省) 若方程 $x^2-m=0$ 有整数根，则 m 的值可以是______.（只填一个）；

[评析] 题目虽小，但综合考查了一元二次方程根的情况及平方根的性质、方程有整数根，则 $m\geqslant0$，且 m 为能开得尽方的整数，如 $m=0$，1，4，9，….

例3　(2005年浙江宁波) 已知关于 x 的方程 $\frac{a-x}{2}=\frac{bx-3}{3}$ 的解是 $x=2$，其中 $a\neq0$，且 $b\neq0$，求代数式 $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ 的值.

解：把 $x=2$ 代入方程得 $\frac{a-2}{2}=\frac{2b-3}{3}$，化简得 $\frac{a}{2}=\frac{2b}{3}$，

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$，$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$. $\therefore\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$.

例4　(2005年浙江丽水市) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+1)x-6=0$ 的一个根是2，求方程的另一根和 k 的值.

解：由题意，把 $x=2$ 代入，$2^2-(k+1)\times2-6=0$，解得 $k=-2$，再把 $k=-2$ 代入方程得 $x^2+x-6=0$，解这个方程得：$x_1=2$，$x_2=-3$.

所以，方程的另一根为 -3，k 的值为 -2.

考点2　一元二次方程的解法

例5　用配方法解方程 $x^2-4x+1=0$.

解：移项，得：$x^2-4x=-1$，

配方，得：$x^2-4x+(-2)^2=-1+(-2)^2$

$(x-2)^2=3$.

解这个方程，得：$x-2=\pm\sqrt{3}$.