国内同类最畅销图书

2007
人大考研

2007年考研
数学
新编考试参考书
(经济类)

严守权　胡显佑　姚孟臣　编著

- 命题、辅导权威专家亲自编写
- 附送6重大礼

- 经济类数学考研一线名师联手打造，内容、题型、难度均紧扣大纲，整体把握经济类数学考研的难点、重点与趋势
- 针对应理解与熟练掌握的考点、知识点分别归纳题型特点、注意点与解题思路
- 精选足量例题与习题，总结历届考生易犯错误，指点迷津，避免不必要的错误

中国人民大学出版社

国内同类最畅销图书

2007年考研

数学新编考试参考书

（经济类）

严守权　胡显佑　姚孟臣　编著

正版查询及服务程序

←刮开涂层

←获取16位数字编码

←以编码作短信查真伪

1kao ←上 www.1kao.net 注册

←登录增值服务进免费课堂

2007

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2007年考研数学新编考试参考书(经济类)
严守权等编著. 3版
北京:中国人民大学出版社,2006
ISBN 7-300-03109-9

Ⅰ. 2…
Ⅱ. 严…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第019624号

2007年考研数学新编考试参考书(经济类)
严守权 胡显佑 姚孟臣 编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010-62511242(总编室)		010-62511239(出版部)
	010-82501766(邮购部)		010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)		010-62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫鑫印务有限公司		
开　本	880×1230毫米 1/16	**版　次**	2004年6月第1版
			2006年4月第3版
印　张	25.5	**印　次**	2006年4月第1次印刷
字　数	738 000	**定　价**	32.00元

科学复习,攻克经济类数学

1987 年开始的全国统一命题的硕士研究生入学考试是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而实施的具有选拔性质的水平考试。根据不同学科不同专业对数学知识的要求,将数学考试分为四类,并制定相应的考试大纲。大纲是教育部颁布的法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据。每一位考生在做考前准备时,务必要认真阅读大纲,根据大纲编写的样卷,明确自己报考的专业应参加的数学考试类别,并全面了解考试的范围、题型和难度,以增加复习的针对性和有效性。

全国硕士研究生入学统一考试数学考试(经济类)主要分数学三和数学四两类考试,全国统一命题经过 20 年调整、完善,其内容、题型结构、难易度的把握,以及命题的风格已经具有相当的稳定性、连续性、可信性,比较好地体现了大纲的要求。根据 2004 年调整后的考试大纲,试卷总分为 150 分,其中微积分 74 分,选择填空占 32 分,尤其是选择题比重比以前有较大的增加;线性代数和概率论各占 38 分,选择和填空题比重与以前比较变化不大。命题从布局上看,覆盖面宽,几乎所有重点章节均有涉及,各个知识点分布合理;从难易度上讲,试题主要以考查数学的基本概念、基本理论、基本方法、基本能力为主,尤其是它们的延伸、扩展、转换、综合和应用。从发展趋势看,这种命题特点将持续,难度将会向下调整,计算技巧性过强的题将逐渐减少,而且绝不会出现超纲题、偏题、怪题,但由于选择题比重增加,题量有所增加,时间越来越紧。因此,在复习时,不要听信谣传,不要迷信押题,不要偏科,不要忽视基本功而去啃偏题、明显超纲题和计算量繁杂的题,相反,应该强调的是要整体把握好大纲各知识点,这些知识点是前后之间有逻辑联系的网络,网络的结点就是考点和重点;在做一个题目时,不要满足会做,更不要满足做对答案,而是需要研究题目考查的是什么知识点,它所代表的题型特点,可能犯的概念性、逻辑性的错误,以及对这类题型用什么方法应对才是最快捷的,并举一反三;要有时间意识,要有扎扎实实的学风,要在点点滴滴的积累中提高自己。

如何看待全国研究生入学考试数学统一命题的难与易?在与考生接触中,许多考生都认为考研数学难,似乎信心不足。其原因是历年来

考研数学及格率偏低，当然这其中也有思想认识上的盲目性。应该承认研究生入学考试与大学数学课程的考试不同，考研试题与教科书上的习题的不同点在于，前者是在对基本概念、基本定理、基本方法充分理解基础上的综合应用，有较大的灵活性，往往一个命题覆盖多个内容，涉及到概念、直观背景、推理和计算。许多考生往往难以适应，其突出感觉是没有思路，这种难度是客观实在的，也正是考生考前准备应解决的突破口。另一方面，由于考研人数迅速增加等因素，整体数学水平有所下降。加之考研是选拔性的考试，及格线高低并不重要，因此考试分数不高也属正常情况。有些考生听说考研数学难，就不加分析地一味地钻难题、偏题、怪题，而个别考研辅导书为了迎合这些考生的心理，不恰当地选用超纲题，或增添一些大纲要求之外的方法技巧，也起到了误导作用。其结果是，一些考生不去仔细分析考纲，忽略系统复习，知识掌握得不完整，基本概念理解得不透，基本功不扎实，转换能力差，甚至比较常规的题也常常出现低级错误，该得分的不得分，很多教训是深刻的。如果对考试的难与易问题有一个理性认识，任何一个考生，即使基础较差，只要复习方法得当，塌实努力，难和易是可以相互转换的，历年来都有不少实现这种转换的成功之士。每个考生都要有必胜的信心，保持一个良好的心态，这是考前复习成功的前提。如何实现转换？首先还是要强调抓住基础，要重视和加强对基本概念、基本定理和基本方法的复习和理解，并要熟悉常见考点的题型和解题思路。虽然仅靠此得不到高分，但这是取得好成绩的基础和前提。历年都有相当数量的考生考后实际成绩大大低于自我估分，其中一个重要原因是基本功不扎实，这也直接影响到能否“上线”。其次，要加强综合解题能力的训练，力求在解题思路上有所突破，具体来说就是要抓住能够集中体现和综合各知识点的若干考点，进行重点突破。考虑到数学学科的特点，要求考生自己琢磨出来所有考点并给出相关的解题思路是十分困难的。这方面的问题通常可以通过求教有经验的老师，参加有较好信誉的辅导班，或者阅读有关的辅导书来解决。为广大考生提供这样一种服务正是本书的编写宗旨。必须强调的是，辅导班或辅导书只是学习的一种手段，最终解决问题还要自己动手动脑。要充分利用一切学习机会，力求对常见的考题类型、题型、思路、特点有一个系统的把握，并在此基础上自己动手做一定数量的综合性练习题，温故而知新，不断巩固扩大学习的成果。我们相信，每位考生只要认真地了解考研数学的内容、要求，命题的特点、重点，理性地分析问题和不足，制定一个有针对性、分阶段、讲效率、系统的复习计划，并扎扎实实地去执行，就一定能得到预期的效果。

如何科学安排数学考试考前的复习，有什么好的建议？首先应该明确，数学解题能力和应试能力的提高，是一个长期积累的过程，不能急于求成，切忌搞突击，既不要先松后紧，也不要前紧后松。对基础稍差的考生，复习时应当首先在适当的基础上对考试必备的基础知识进行系统的复习，目标是熟悉涉及考试的基本概念、基本定理和基本运算；然后再通过阅读辅导材料或参加辅导班，对考研的试题类型、特点、思路进行系统的归纳总结，将微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程的内容，“由厚看薄”，最终归纳为若干考点，提纲挈领，重点突破，然后再“由薄到厚”，做一定数量的习题进行练习，练习时不必追求答案的完整，也不必做重复的繁杂的计算，以便腾出更多时间分析题型和应对方法。这段时间应该是应考准备的关键阶段，时间可以适当长一些，目标是明确研究生考试考什么、如何应对的问题，也即有意识地重点解决解题思路问题，基本做到拿到试题后能立即作出反应，找到针对性强的有效的求解方法。在临考前的最后冲刺阶段，主要是对考点再作最后梳理，熟记公式，要系统、完整、规范、限量限时、认认真真地做若干套模拟试卷，进行实战训练，在 3 个小时内要完成一份试卷，包括如何审题，如何安排答题顺序，如何严格、规范、准确、有层次地写出答案。这一阶段的目标是自测复习成果，并针对薄弱环节再做一次努力，以调整心态，提高实战能力，争取使自己的实际水平和能力能够再上一个台阶。有关的模拟试卷将由我们精心编写，适时推出。

最后就如何更好地使用本书提出几点建议。我们认为，一本好的考研辅导书，首先是全书的内容、题型和难度，要符合考研大纲的要求；其次应该从整体上把握住研究生入学考试的难点、重点和趋势，并给出清晰准确的表述和归纳；同时还应该有足够数量的经过精心挑选的例题和练习题，有针对性地指出、说明各类别的考研数学应该理解和熟练掌握的考点、知识点和思路，并总结历届考生在考试中易犯

的错误，指点迷津，避免不必要的失分。以上各点也正是我们所努力追求的。我们相信，对于报考经济类硕士研究生的考生来说，购买本书应该是一个正确的选择。在此我们对如何使用好本书提出几点建议：一是使用本书前，最好已经系统学完经济管理类各专业大学数学的全部课程。如果有部分内容未曾学过，应该在复习的第一阶段补习，如果已学过但属学习不够扎实的，可以重点补习，也可以在阅读、解题中遇到问题时，有针对性地查阅课本相关章节的知识。不必将大学课本从头到尾再看一遍，这样做既费时又效果不佳。二是本书每章均按考点、知识点进行编写，同时给出每章的学习方法，但涉及的知识不受大学课本章节顺序限制。在学习每章时，希望大家认真阅读“考试要求”部分，弄清本章有几个考点和知识点，及其题型特点、注意点和解题思路，以纲带目，以点带面，统领本章的复习。这也是本书的精华所在。三是做练习题时应该尽可能独立完成，要多思考，多归纳，多用几种方法对照比较，不能满足会做和做对答案，时间和效率才是关键。四是根据历届考生使用本书的成功经验，只要把本书“吃透”，一本书足矣。考生如果同时看几本辅导书，不仅经济代价高，而且效果往往适得其反。所谓“吃透”，是指要将书至少认认真真看两遍，包括做题，第一遍至多算了解，第二遍则可以温故而知新，上升到理性认识层面，举一反三。如果想增加题目的训练量，还可参考使用中国人民大学出版社出版的经济类数学习题集。

本书的编者均具有十几年考研辅导与教学等相关工作的经验，在编写过程中还得到了龚德恩教授、张南岳教授等专家和中国人民大学出版社马胜利、李天英的指导和帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中难免有不足和差错之处，欢迎读者批评指正，也可通过网络与我们联系切磋。

编　者

2006 年 3 月

目 录

第一章

微积分

本章复习建议

"微积分"在经济学硕士研究生入学考试数学部分占有近一半的比重，而填空和选择题又占微积分试题的近一半. 其特点是：涉及的概念多、要掌握的定理公式多、应用范围广、知识点和考点多、题目量大且灵活性高，因此要重视本章内容的复习. 具体要注意以下几点：

1. 要抓好对基本概念的理解和运用. 要真正理解一个概念，应该从它的几何背景、内外在的逻辑关系以及量化和算法这三个角度综合进行.

2. 无论做多少题，都要把握微积分的整体架构，也只有做到对各知识点的均衡掌握，才可能突出重点，突破难点，去处理综合性强的问题. 要熟练掌握对初等函数、分段函数、变限积分函数及经济函数的处理能力；掌握函数的对称性、单调性、凹凸性、连续性、可导性、可积性、幂级数的可展性的概念及其判别法；掌握微积分的理论基础极限理论，核心是无穷小的阶的分析；掌握三大运算，即极限运算、求导或微分运算、积分运算；掌握微积分的几何应用和经济运用.

3. 在掌握基本概念并通读全章把握微积分总体架构的基础上，要围绕经济类的微积分考什么、如何应对这一问题，集中精力，按照考点，逐一复习，通过复习，明确每个考点可能提出什么问题、求解的思路和应该注意避免犯的错误. 主要考点将在后面各部分一一列出.

4. 微积分的选择题多，题量大(大小题共 12 题)，用时多少与思路有关，不同水平的考生差异很大，这也给考生提供了发挥的空间. 复习时要有针对性地注意解决思路问题、解题的逻辑层次和速度问题.

一、函数、极限、连续

考试内容

函数的概念及表示法. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数. 基本初等函数的性质及其图形，初等函数简单经济函数的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质. 函数的左极限和右极限、无穷小和无穷大的概念及其关系. 无穷小的性质及无穷小的阶的比较. 极限的四则运算. 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念. 函数间断点的类型. 初等函数的连续性. 闭区间上连续函数的性质.

重点难点

1. 函数概念

(1) 函数概念中,定义域和对应法则是两个基本要素.不仅要会求已知函数的定义域,而且要养成在定义域内考虑和求解问题的习惯.

(2) 函数关系中最常见的是复合函数关系.对于复合函数形式:$f(\varphi(x))=\Psi(x)$,通常要考虑的基本问题是:

已知 $f(x)$,$\Psi(x)$,求 $\varphi(x)$及其定义域;

已知 $f(x)$,$\varphi(x)$,求$\Psi(x)$及其定义域;

已知 $\varphi(x)$,$\Psi(x)$,求 $f(x)$及其定义域.

以上函数关系的转换,是考研解题的一种基本功,应熟练掌握.

(3) 初等函数、分段函数、变上限积分函数和经济函数是经济类考生应重点掌握的函数类型.其中,初等函数是基础,应熟练掌握基本初等函数的性质和图形特征.处理分段函数时,分段开区间内一般用公式或用规则进行处理,分段点处要由定义用左、右极限为工具进行处理.对变上限积分函数,首先要分清自变量、积分变量,其次是要掌握其性质,并熟练掌握求导运算.在经济函数中,应主要掌握成本函数 $C(x)$,收益函数 $R(x)$,需求函数 $f_d(p)$,供给函数 $f_s(p)$,利润函数 $L(x)$的结构和经济含义.

2. 函数的单调性与对称性

函数性质中应重点掌握函数的单调性和对称性.

(1) 函数的单调性是考研试题中的常见题型.一是若干单调函数复合后单调性的讨论;二是单调性的判别和证明,最终归结为 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)的证明和判断.

(2) 函数的对称性在微分和积分中都有广泛的应用.

若 $y=f(x)$是偶函数,则函数曲线关于 Y 轴对称;若$y=f(x)$是奇函数,则函数曲线关于原点对称;若 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$互为反函数,则两曲线关于直线 $y=x$ 对称.

在微分学中,经常利用几何直观性来讨论函数的性质的转换.

在积分学中,通常可利用对称性简化积分运算.

另外,在讨论其他函数性质时,无界性问题注意抓无界点;周期性问题主要要利用公式$f(x+T)=f(x)$将一个周期的讨论推至任何一个区间.

3. 函数极限概念

(1) 函数极限是自变量在一个特定变化过程中函数取值的变化趋势.函数极限的存在,与趋向点 x_0 处函数的取值无关;在 $x\to x_0$ 时,$x\neq x_0$;自变量趋向方式是任意的;在同一极限号下,变量各部分同步变化.

(2) 函数极限存在,有唯一性、有界性和保号性,即:若在 $x\to x_0$(或∞)时,$f(x)$有极限,则称 $f(x)$在同一过程下为有界变量,要注意有界变量与有界函数的区别,同时也要注意,有界变量不一定表明变量在同一过程下有极限.

保号性是指函数极限符号与变化邻域内函数取值符号的一致性.保号性在判断极值时有应用.

4. 极限的收敛性

(1) 极限的收敛性的讨论通常出现在未定式的定值、广义积分和无穷级数的收敛性等问题中,最终取决于无穷小量阶的比较.

(2) 在未定式定值时,先考虑阶的问题,和式中若能区分高低阶,则应有所取舍,只保留能最终确定其变化速度的主项.在连乘或连除的情况下可以用等价代换,使问题化简,常用的等价无穷小关系式在 $x\to 0$ 时,有 $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $e^x-1\sim x$.

(3) 确定未定式的基本方法是洛必达法则. 注意法则只适用于“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其他类型的未定式均要化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，如何化要注意选择类型，运用法则时，如果结合无穷小等价代换，适当化简，定值时会更为简便.

5. 函数的连续性

(1) 讨论函数在 x_0 处的连续性，就是证明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限值等于函数值 $f(x_0)$.

(2) 函数的间断点可分为第一类间断点和第二类间断点两个基本类型，具体分为可去间断点，跳跃间断点，无穷间断点和振荡间断点. 重点掌握的是可去间断点，即 $f(x)$ 在 x_0 极限存在但不连续点. 涉及问题是求极限重新定义 $f(x_0)$. 无穷间断点，即 $f(x)$ 在 x_0 的一侧极限为无穷大. 其背景是 $x=x_0$ 为其铅直渐近线.

(3) 必须强调的是，在运用导数讨论函数的单调性和凹凸性时，只限于连续区间范围内. 例如在一般情况下，在定义域内有 $f'(x)>0$，并不能推出 $f(x)$ 单调增. 因此，在讨论函数的单调性和凹凸性时，应先找出函数的各连续区间，然后再在每个区间一一判别.

(4) 判断闭区间上连续函数的性质，常用的是零值定理. 即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0(\leqslant 0)$，则必存在一点 $x_0\in(a,b)([a,b])$，使得 $f(x_0)=0$. 通常用于方程 $f(x)=0$ 的解的讨论. 应注意的是 x_0 的取值范围是开区间还是闭区间，主要取决于 $f(a)\cdot f(b)$ 是否严格地小于零.

例题解析

1. 函数概念

[例 1] 填空.

(1) 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\frac{x-1}{x}$，$a^2\neq 1$，$a\neq 0$，则 $f(x)$ 的值域为______.

(3) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^2-1$，则在 $(-3,-1]$ 上，$f(x)=$______.

解：(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域时，一般应先求出 $f(x)$ 的解析式. 本题解析式可直接配置得到，即由 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\dfrac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$，有 $f(x)=\frac{x}{x^2-2}$，从而知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

(2) 先求出 $f(x)$ 的解析式. 为此，设法找出 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 之间的转换关系. 若设 $\frac{x}{x-1}=t$，则有 $x=\frac{t}{t-1}$，于是有

$$\begin{cases} af(x)-f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\dfrac{x-1}{x} \\ f(x)-af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

解得 $\quad f(x)=\dfrac{1+a(x-1)}{x(1-a^2)}$.

又 $f(x)$ 的值域即为其反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-a}{-a+x(1-a^2)}$ 的定义域，因此，$z_f=\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{a}{1-a^2}\right\}$.

(3) 周期函数的问题可利用定义式由平移法处理.

当 $-3<x\leqslant-2$，即 $1<x+4\leqslant 2$ 时，有 $f(x)=f(x+4)=(x+4)^2-1$；

当 $-2<x\leqslant-1$，即 $0<x+2\leqslant 1$ 时，有 $f(x)=f(x+2)=(x+2)^2-1$.

因此，有解析式

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-1, & -3<x\leqslant-2\\(x+2)^2-1, & -2<x\leqslant-1\end{cases}.$$

[例 2] 单项选择题.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\2x, & x<0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\-2x, & x<0\end{cases}$，则 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]=($　　$)$.

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(2) 下列解析式中，(　　)为非初等函数.

A. $y=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1$

B. $y=\arcsin(e^{x^2}+1)$

C. $y=\begin{cases}x-2x^2, & x<-1\\3x, & -1\leqslant x<2\\2x^2-x, & 2\leqslant x\end{cases}$

D. $\int_0^x x(x-1)\mathrm{d}x$

答：(1)C　(2)B

解：(1) 分段函数在各开区间内要分段处理，再单独讨论分段点的取值. 在本题中，当 $x<0$ 时，$g(x)=-2x>0$，故对应 $f(x)=x^2$，有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$，又 $g(0)=0$，$f[g(0)]=0^2=0$. 综上所述，当 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]=4x^2$，故选 C.

(2) 考察一个函数时，应考虑它的多种等价表现形式，选项 A，C，D 分别等价于 $y=\dfrac{x}{1-x}$，$y=x(|x-2|+|x+1|)$，$y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2$，均可判定为初等函数，而 $e^{x^2}+1>1$，$\arcsin(e^{x^2}+1)$ 不构成函数关系，故选 B.

2. 函数性质

[例 1] 单项选择题.

(1) 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，可导，在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$，且为单调增函数，曲线图形下凸. 又设 $F(x)=3-f^2(x)$，则 $F(x)$ 是(　　).

A. 在 $(-\infty,0)$ 上单调减，曲线图形下凸

B. 在 $(-\infty,0)$ 上单调增，曲线图形上凸

C. 在 $(-\infty,0)$ 上非单调，曲线图形上凸

D. 在 $(-\infty,0)$ 上单调减，曲线图形上凸

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为奇函数，可导，且 $F(x)=\int_a^x[xf(-t)-2f'(t^3)]\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 是(　　).

A. 偶函数

B. 非奇非偶函数

C. 奇函数

D. 仅当 $a=0$ 时为奇函数

答：(1)B　(2)D

解：(1) 容易验证 $F(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，又由题设，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少，又由 $f'(x)=-2f'(x)f(x)$，$f'(x)>0$ 单调增，$f(x)>0$，知 $F'(x)$ 单调减，即曲线图形上凸，利用图形的对称性，可以推断在 $(-\infty,0)$ 上，$F(x)$ 单调增，曲线图形上凸，故选 B.

(2) 先作变量整理，$F(x)=x\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t-2\int_a^x f'(t^3)\mathrm{d}t$，由 $f(x)$ 为奇函数，知 $f(-t)$ 仍为奇函数，$f'(t^3)$ 为偶函数，进而知对任意 a，$\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，$x\int_a^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为奇函数，$\int_a^x f'(t^3)\mathrm{d}t$ 仅当 $a=0$ 时为奇函数，综上知仅当 $a=0$ 时 $F(x)$ 为奇函数. 故选 D.

[例 2] 给出函数 $y=\arccos(x^2+3x+2)$ 的单调增区间.

解：由函数 $y=\arccos x$ 单调减知，所求区间应由抛物线的单调减区间复合得到. 如图 1—1 所示，$y=x^2+3x+2$ 的单调减区间为 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$，又因 $|x^2+3x+2|\leqslant 1$，求解方程 $x^2+3x+2=1$，得 $x^*=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$，从而知所求函数单调增区间为 $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

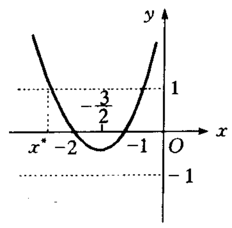

图 1—1

3. 函数的极限概念

[例] 单项选择题.

(1) 设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 内有定义，如果条件(　　)成立，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极限存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$　($A\neq\infty$，x 为有理数)

B. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义

C. $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(a+\frac{1}{n}\right)=f(a)$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}=0$　(A 为常数)

(2) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

答：(1)D　(2)D

解：(1) A，C 是 $x\to a$ 的子过程，不能说明 $x\to a$ 的函数极限的存在性问题，判断 B 的关键是左右极限是否相等，但题中未明确，故仅有 D 成立，因为由题设 $x\to 0$ 时，$f(x+a)-A$ 为比 $\sqrt[3]{x}$ 高阶的无穷小，即有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

(2) 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n<\lim\limits_{n\to\infty}c_n$，由极限的保号性，仅当 n 足够大时才保证 $a_n<b_n$，$b_n<c_n$ 成立. 又 a_nc_n 为"$0\cdot\infty$"型未定式，其极限的存在不能确定，故选 D.

4. 极限的收敛性与极限的运算

[例 1] 填空.

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小量，则 $a=$______，$b=$______.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan x\cdot\arctan t^2\,dt+x^5}{x^k}=c\neq 0$，则 $k=$______，$c=$______.

(3) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x}+\frac{\sin 2x}{x^2}\right)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______.

(4)设 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，$x\to 1$ 时，$\frac{f(x)-2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ 为有界量，则 $f(1)=$______.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 $c=$______.

解：(1) 由题设 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，知 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是比 h 高阶的无穷小量，即 $\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=af(0)+bf(0)-f(0)=(a+b-1)f(0)=0$，因 $f(0)\neq 0$，知

$a+b=1$.

又由洛必达法则,有

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}[af'(h)+2bf'(2h)]=(a+2b)f'(0)=0$,因 $f'(0)\neq0$,知 $a+2b=0$,求解方程组 $\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\end{cases}$,得 $a=2,b=-1$.

(2)利用等价代换,先看阶,再定值.由 $x\to0$ 时,$\tan x\sim x$,$t\to0$ 时,$\arctan t^2\sim t^2$,因此

$$\int_0^x\tan x\cdot\arctan t^2\,\mathrm{d}t=\tan x\int_0^x\arctan t^2\,\mathrm{d}t\sim x\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^4,$$

比 x^5 低阶,故舍去 x^5,从而确定 x^k 与 $\frac{1}{3}x^4$ 同阶,故 $k=4$.

于是 原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{3}$,

即 $c=\dfrac{1}{3}$.

(3) 利用无穷小先构造 $f(x)$ 的解析式,再求极限.由

$$原极限=\lim_{x\to0}\frac{x(f(x)-1)+\sin2x}{x^2}=2$$

知 $x(f(x)-1)+\sin2x=2x^2+o(x^2)$

即 $f(x)=2x-\dfrac{\sin2x}{x}+1+\dfrac{o(x^2)}{x}$

因此有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$.

(4) 有界量与无穷小乘积仍为无穷小,于是有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[\left(\frac{f(x)-2x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)(x-1)+2x+\frac{x-1}{\ln x}\right]=2+\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=3$$

从而知 $f(1)=3$.

(5) 由微分中值定理,$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$,ξ 介于 $x,x-1$ 之间

于是,原等式左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{2c}$

原等式右边 $=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \xi\to\infty}}f'(\xi)=\mathrm{e}$

从而知 $c=\dfrac{1}{2}$.

[例 2] 单项选择题.

(1) 下列结论中正确的是(　　).

A. 若 α 为无穷小量,则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 必为无穷大量

B. 任何两个无穷小量均可以比较阶的大小

C. 有界变量乘无穷大量仍为无穷大量

D. $x\to0$ 时,$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ 是比 $\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}$ 高阶的无穷小量

(2)设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$,则当 $t\to1$ 时,$F(t)$ 是变量 $t-1$ 的(　　).

A. 1 阶无穷小　　B. 2 阶无穷小

C. 3 阶无穷小　　D. 不低于 2 阶无穷小

(3) 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln x+\sin x}{x\ln x^2+f(x)}=\dfrac{1}{2}$,则 $f(x)=($　　$)$.

A. $\cos x$　　B. $\ln 2x$　　C. x^2　　D. e^x

(4) 设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导,则(　　).

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

答:(1)D　(2)D　(3)C　(4)B

解:(1) 0 是特殊的无穷小量,$\dfrac{1}{0}$无意义,结论 A 仅在 $\alpha\neq0$ 时成立;由反例,$x\to0$ 时,$x\sin\dfrac{1}{x}\to0$,但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$无极限,说明两个无穷小量未必能比较阶的大小;无穷小量也是有界变量,故有界变量乘无穷大量未必为无穷大量;又 $x\to0$ 时,$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\sim\dfrac{x^2}{2}$,$\sqrt{x^6+\sqrt{x^8+\sqrt{x^{10}}}}\sim x^{\frac{10}{8}}$,显然结论 D 成立.

(2) 先将二重积分通过交换积分次序化为变限积分,即

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$$

从而有　$\lim\limits_{t\to1}\dfrac{F(t)}{(t-1)^k}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(t)(t-1)}{k(t-1)^{k-1}}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(t)}{k(t-1)^{k-2}}$

于是若 $f(t)\neq0$,则 $F(t)$为 $t-1$ 的 2 阶无穷小,若 $f(t)=0$,则 $F(t)$为比$(t-1)^2$ 高阶的无穷小,综上知 $F(t)$是$(t-1)$的不低于 2 阶的无穷小. 故选 D.

(3) $x\to0$ 时,$\sin x$ 为比 $x\ln x$ 高阶的无穷小,因此,分子极限的趋向取决于 $x\ln x$,又 $x\ln x^2=2x\ln x$,若要极限值为$\dfrac{1}{2}$,$f(x)$只能是比 $x\ln x$ 高阶的无穷小,故选 C.

(4) 由反证法,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k\neq0$,不妨设 $k>0$,则必存在 x_0,当 $x>x_0$ 时,有$f'(x)>\dfrac{k}{2}$,从而有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{k}{2}(x-x_0),\text{其中 }\xi\in(x_0,x),$$

因而推得:当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$,与已知矛盾. 故选 B.

[例 3] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)$　$(x>0)$

解:(1) 式中 $\sin x$ 为有界变量,不能直接用洛必达法则,应分项处理. 其中

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

又　$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{x^2\left(-\frac{2}{x}\right)}=0,\quad |\sin x|\leqslant1$$

从而有　原极限$=\frac{1}{2}$.

（2）$x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 无极限，应分左右极限计算.

由
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2+e^u}{1+e^{4u}}+1=1$$

知　原极限$=1$.

（3）为“$0\cdot\infty$”型未定式，由于 n 为离散变量，不能直接用洛必达法则，只有将 x 置换 n 后使用，但较烦琐. 若变形，用无穷小等价代换后，再计算，十分简捷. 即

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\left(e^{\frac{\ln x}{n(n+1)}}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\ln x}{n(n+1)}=\ln x.\end{aligned}$$

以上各题虽然均为未定式，但都不能直接用洛必达法则，有的可由有界变量与无穷小乘积的性质定值，也有的可分左右极限计算后再合并处理，还有的将 n 置换为连续变量 x 后再用法则定值，如果考虑用等价代换化简，则更容易定值.

[例 4] 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)-\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\right]^2$

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

解：（1）为“$\frac{0}{0}$”型未定式，变形并等价代换后计算得

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=1.$$

（2）为“$\infty-\infty$”型，通分母，化简后用洛必达法则定值.

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(1+x)\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{2x}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

其中 $x\to 0$ 时，$\ln(x+\sqrt{x^2+1})\sim x$.

(3) 为“1^{∞}”型，取对数求极限，由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\cos\sqrt{x}-1)}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\qquad(\ln(1+\cos\sqrt{x}-1)\sim\cos\sqrt{x}-1)\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

知　原极限$=(e^{-\frac{1}{2}})^2=e^{-1}$.

(4) 为“$0\cdot\infty$”型，可设 $t=\frac{1}{x}$，化为“$\frac{0}{0}$”型，即

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}}{2t}\\&\xlongequal{\text{整理}}\lim_{t\to0}\frac{-1}{2\sqrt{1+t}\sqrt{1+2t}(\sqrt{1+2t}+\sqrt{1+t})}\\&=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

以上各例为未定式且均可用洛必达法则定值，但若先变形，再用等价无穷小量代换，化简后计算就变得简单多了.

[例 5] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$，$x\neq0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}$，其中 $f'(0)$ 存在，且 $f(0)=0$.

(4) 已知$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解： (1) 无穷项的乘积很难直接定值，需要先对极限式进行合并整理，由倍角公式

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\left(2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

又当$n\to\infty$时，$\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}$，于是原极限$=\frac{\sin x}{x}$.

(2) 极限式中含$\frac{i\pi}{n}$结构，可考虑利用定积分概念定值，但要作适当整理. 由于

$$\frac{n}{n+1}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

有
$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

所以 原极限$=\frac{2}{\pi}$.

(3) 为“$\frac{0}{0}$”型，对变限积分函数求导需作交换整理. 有

$$\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t\xlongequal{u=x^n-t^n}\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$$

从而
$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)x^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{2nx^n}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

(4) 欲求极限，需先确定$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

由已知
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$$

从而有
$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0$$

进一步有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$和$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3$

也即
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

原极限$=\mathrm{e}^2$.

例5是另一类求极限的例子，题(1)是无穷项乘积的极限，应利用公式合并处理；题(2)是无穷项和的极限，最终转化为定积分计算，有的还可转化为无穷级数求和，对于结构形式不规则的，可以先适当放大缩小，利用夹逼定理定值；题(3)是变限积分函数形式，可通过对变限积分函数求导，由洛必达法则计算；题(4)则通过看阶再简化变换处理.

[例6] 设函数$f(x)$可微，且$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$，求$\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t$.