21世纪高等院校计算机科学与技术系列教材

编著　景晓军　孙松林　高玉芳

离散数学

LISAN SHUXUE

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

离散数学

景晓军　孙松林　高玉芳　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书作为计算机科学与技术专业的基础教材，主要介绍离散数学的基础知识。全书共分四部分，第一部分为数理逻辑，包括命题逻辑与谓词逻辑；第二部分为集合论，包括集合、二元关系与函数；第三部分为代数结构，主要介绍代数系统的基本概念与性质，群、环和域，格及布尔代数；第四部分为图论，包括图的基本概念、一些特殊图及树。

本书凝聚了作者多年教学经验的结晶，行文概念清晰、叙述严谨、内容翔实而又重点突出，是一本难得的上佳之作。本书既可作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的本、专科教材，也可供相关专业的自学考试人员、科研人员等参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/景晓军，孙松林，高玉芳编著. —北京：北京邮电大学出版社，2006

ISBN 7-5635-1291-8

Ⅰ.离… Ⅱ.①景… ②孙… ③高… Ⅲ.离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 073637 号

书　　名：离散数学

编　　著：景晓军　孙松林　高玉芳

策 划 人：张莉莉　章　剑

责任编辑：李云静

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

北方营销中心：电话　010-62282185　传真　010-62283578

南方营销中心：电话　010-62282902　传真　010-62282735

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：12.5

字　　数：312 千字

印　　数：1—3 000 册

版　　次：2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-1291-8/O·111　　定价：20.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社营销中心联系·

21世纪高等院校计算机科学与技术系列教材

编 委 会

序

计算机科学技术是科学性与工程性并重的一门学科。它的迅猛发展除了源于微电子学等相关学科的发展外，更主要源于其应用需求的广泛性不断增长，它已渗透到人类社会的各个领域，成为经济发展的倍增器，科学文化与社会进步的催化剂。计算机与通信的融合和全球联网，更显示出它无可限量的发展前景。任何一个领域的发展都离不开计算机已成为无可否认的事实。应用是计算机科学技术发展的动力、源泉和归宿，而计算机科学技术又不断为应用提供先进的方法、设备与环境。

近年来，计算机科学技术的发展不仅极大地促进了整个科学技术的发展，而且明显地推进了经济信息化和社会信息化的进程。计算机科学技术对一个国家在政治、经济、科技、文化、国防等方面的催化作用和强化作用都具有难以估量的意义。计算机知识与能力已成为21世纪人才素质的基本要求之一，因此，计算机科学技术的教育在世界各国都备受重视，我国政府和教育部门对计算机科学技术的教育及人才培养也非常重视。为了适应社会发展对计算机科学技术人才的强烈要求，各高校均在着力培养基础扎实、知识面广、综合素质高、实践能力强、富有创新精神，且具有较强的科学技术运用、推广、转化能力的高层次人才。

由北京邮电大学出版社联合北京邮电大学、武汉大学、华中理工大学及山东、江苏等多所高校的计算机专业教学负责人组成的“21世纪高等院校计算机科学与技术系列教材编委会”按照《中国计算机科学与技术学科教程2002》的要求组织编写的系列教材，体现了近年计算机学科的新理论、新技术。内容涵盖计算机专业学生所应掌握的相关知识，并根据目前计算机科学技术的发展趋势与实际应用相结合，能够满足目前高校计算机专业教学的需要，也可作为计算机专业人员的自学参考材料。

本系列教材作者均为多年从事教学、科研的一线教师，有着丰富的教学和科研实践经验，所编写的这套教材具有结构严谨、内容丰富、理论与实际结合紧密的特点，是他们的教学经验和科研成果的结晶。

计算机科学技术日新月异，所以教材也要不断推陈出新，我希望本系列教材能为我国高校计算机专业教育做出新的贡献。

中国工程院院士 金怡濂

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，以研究离散量的结构及其相互关系为主要目标。它充分描述了计算机科学离散性的特点，是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的新兴的基础性学科，并逐步发展成为计算机科学与技术的有力工具。

离散数学现在已成为计算机科学基础理论的核心课程及许多专业课的先导，如程序设计语言、数据结构、操作系统、编译原理、人工智能、数据库技术、算法设计与分析等均以离散数学为基础。可见，学好《离散数学》是学习计算机后续课程的入门基础，也是进一步研究和讨论与计算机学科领域相关的理论及应用问题的数学基础。同时，通过离散数学的学习，可以提高学生的概括抽象能力、逻辑思维能力和归纳构造能力，有助于培养学生严谨、完整、规范的科学态度。

由于离散数学跨越数学诸多分支及与整个计算机科学紧密联系的特点，使得它所涉及的概念、方法，采用的符号、工具等远远超出其他学科，所以不少读者对这门课程产生了厌倦情绪，感觉它太烦琐、太难。鉴于以上情况，我们根据多年来对离散数学的研究及教学实践的经验总结，从学生学习的情况及相关专业人员的自学特点出发编写了本书。在编写过程中，我们以“够用”为主，重点突出；内容介绍翔实而清晰；语言严谨且通俗易懂，便于理解。由于离散数学中很多定理证明的难度太大，因此书中只给出对定理的理解和应用，希望读者能形成不知其证明但已知其正确结果来推出新结论的能力。另外，书中每章均配有典型的例题和习题，可以提高读者分析问题和解决问题的能力。

全书共分四部分，第一部分为数理逻辑，包括命题逻辑与谓词逻辑；第二部分为集合论，包括集合、二元关系与函数；第三部分为代数结构，主要介绍代数系统的基本概念与性质，群、环和域，格及布尔代数；第四部分为图论，包括图的基本概念、一些特殊图及树。结合我们多年的教学经验，建议于80～100学时内

完成本书的教学任务。上述四部分内容独立成篇，可单独讲授，任课教师可结合自己学校的教学要求安排学时及讲授内容。

本书在编写过程中参考了大量的离散数学书籍和资料，在此一并向有关作者表示感谢。

因作者水平有限，书中不妥及错误之处在所难免，恳请广大读者批评、指正。

编　者

2006 年 6 月

目　　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集合论

第三篇　代数结构

第四篇　图　　论

第一篇

数理逻辑

数理逻辑是用数学方法来研究演绎推理的形式结构和推理规律的数学学科。所谓数学方法就是运用符号、公式、公理等方法，所以数理逻辑又称为符号逻辑、理论逻辑。

为什么要研究数理逻辑呢？大家知道，计算机的出现和发展给人们的工作和生活带来了彻底的变化，原因是计算机可以处理大量的、繁杂的、人脑无法处理的信息。但要利用计算机，编"程序"是关键。目前有两种常用的描述：

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

可见，为了能更有效地使用计算机，学习逻辑是基础。同时，通过学习推理规律和证明方法，也有助于培养自己的逻辑思维能力和提高证明问题的技巧。另外，数理逻辑与数学的其他分支、与计算机科学、与人工智能等都有密切的联系，并且日益显示出它的重要作用和更加广泛的应用前景。

数理逻辑内容相当丰富，主要包括逻辑演算、证明论、公理集合论、模型论和递归论 5 部分。本篇只介绍逻辑演算中的命题逻辑和谓词(一阶)逻辑。

第 1 章　命题逻辑

命题逻辑用命题表示推理过程的最基本单位，主要从命题的层次上研究推理过程的有效性。

1.1　命题与联结词

1. 命题及其符号化

命题就是能判断真假的陈述句，它包括两个关键要素：

(1) 命题必须是陈述语句。

(2) 命题必须能明确地判断真假，并且判断情况唯一，要么为真，要么为假，二者必居且只居其一。

我们称命题的判断情况为命题的**真值**，则判断为正确的命题的真值为真，判断为错误的命题的真值为假，所以又可称命题为具有唯一真值的陈述句。

例 1.1　分析下列句子哪些是命题：

(1) 5 能被 3 整除。

(2) 你现在好吗？

(3) 请勿喧哗！

(4) $1+2=3$。

(5) $x+y=6$。

(6) 好美的音乐啊！

(7) 地球外的星球上也有生命。

(8) 3 是偶数。

(9) 我正在说的是谎话。

解　上述 9 个句子中，(2)是疑问句，(3)是祈使句，(6)是感叹句，这三句话都不是陈述句，当然都不是命题。其余 6 个句子都是陈述句，但(5)不是命题，因为它没有确定的真值。当 $x=2,y=4$ 时，$2+4=6$ 正确；而当 $x=2$，$y=3$ 时，$2+3=6$ 错误。(9)是一个悖论，它没有确定的真假值，也不是命题。其余的陈述句都是命题，其中(4)、(7)是真命题；(1)、(8)是假命题；(7)的真值虽然现在还不知道，但随着科学的发展，其真值定会为人所知，并且是唯一的。

从以上分析可看出，判断一个句子是否为命题，检查它的两要素即可，但要注意，真值是否唯一与我们现在是否知道其真值是两回事。

在现实生活中，常使用自然语言做一些逻辑推理，由一些已知条件推出结论，在数理逻辑中，表现为从假设一些命题为真出发得出一个命题为真。为了消除自然语言容易产生的

歧义性，也为了表示与推理的方便，常用符号代替命题，这称为**命题的符号化**。注意，命题符号化基于简单命题(也称原子命题)。所谓简单命题，就是命题不能再分解为更简单的句子了，上例中的4个命题均为简单命题，本书用小写英文字母 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示。命题符号化的方式为将表示命题的符号放在该命题的前面，例如：

p:5能被3整除。

q:1+2=3。

此时，p 是假命题，q 是真命题。

上述简单命题的真值是确定的，常称为**命题常项**或**命题常元**。例1.1中，(5)不是命题，但给定 x 与 y 的值后，它的真值就可以确定，我们称这种真值可以变化的简单陈述句为**命题变项**或**命题变元**，也可用 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示。这里注意，命题变项不是命题。

在数理逻辑中，还可将命题的真值也符号化。一般用1(或T)表示"真"(本书用1)；用0(或F)表示"假"(本书用0)。同时，也用1表示真命题，0表示假命题。

2. 命题联结词

自然语言并不单是简单句子，为了表达各种意思，更多的是有联结词的复合句，所以，还要研究复合句所对应的复合命题的符号化。复合命题由简单命题用联结词联结而成，例如：

(1) 李强不是老师。

(2) 小王会计算机和英语。

(3) 2是偶数或奇数。

(4) 如果明天不加班，我就去健身。

(5) 1+3=4当且仅当今天是3号。

分析 (1)可以说成"并非李强是老师"，使用了联结词"并非"；(2)的意思是"小王会计算机并且也会英语"，使用了联结词"并且"；(3)使用了联结词"或"；(4)使用了联结词"如果……就"；(5)使用了联结词"当且仅当"。这5种联结词也是自然语言中常用的联结词，为了进行复合命题的符号化，首先引入联结词的符号化。

定义1.1 设 p 为任一命题，复合命题"非 p"(或"p 的否定")称为 p 的**否定式**，用 p 加**否定联结词** $\neg$ 表示，记为 $\neg p$。$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

否定联结词 $\neg$ 的功能可用表1-1描述。

例1.2 (1) 设 p 表示"2是素数"，则 $\neg p$ 表示"2不是素数"；显然 p 的真值为1，$\neg p$ 的真值为0；

(2) 设 p 表示"今天是1号"，则 $\neg p$ 表示"今天不是1号"，p 与 $\neg p$ 必为一真一假。

定义1.2 设 p、q 为两任意命题，复合命题"p 并且 q"(或"p 和 q")称为 p 与 q 的**合取式**，用**合取联结词** $\wedge$ 联结，记为 $p\wedge q$。$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 和 q 都为真。

合取联结词 $\wedge$ 的功能可以用表1-2描述。

表1-1 否定联结词 $\neg$ 的真值表

p	$\neg p$
1	0
0	1

表1-2 合取联结词 $\wedge$ 的真值表

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.3　(1) 用 p 表示"小张会说英语"，q 表示"小张会说日语"，则 $p\wedge q$ 表示"小张既会说英语又会说日语"；

(2) 用 p 表示"林平喜欢唱歌"，q 表示"林平喜欢跳舞"，则 $p\wedge q$ 表示"林平不仅喜欢唱歌，还喜欢跳舞"。

由于 p 和 q 的合取式表达的逻辑关系为 p 与 q 两个命题同时成立，因此，自然语言中常用的如"既……又……"、"不仅……也……"、"不但……而且……"、"虽然……但是……"、"一边……一边……"等表示并列的联结词，均可符号化为 $\wedge$。

定义 1.3　设 p、q 为两任意命题，复合命题"p 或 q"称为 p 与 q 的**析取式**，用**析取联结词** $\vee$ 联结，记为 $p\vee q$。$p\vee q$ 为真当且仅当 p 和 q 至少有一个为真。

析取联结词 $\vee$ 的功能可以用表 1-3 描述。

表 1-3　析取联结词 $\vee$ 的真值表

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.4　(1) 用 p 表示"李刚学过复变函数"，用 q 表示"李刚学过实变函数"，则 $p\vee q$ 表示"李刚学过复变函数或实变函数"；

(2) 用 p 表示"小张能解出这道题"，用 q 表示"小李能解出这道题"，那么，$p\vee q$ 表示"小张或小李能解出这道题"。

上面定义的析取式 $p\vee q$ 表示的是相容性或，即允许 p 与 q 同时为真，如上例中(2)，允许"小张和小李都能解出这道题"这种情况存在。但自然语言中的"或"具有二义性，有时表示的是相容性或，有时表示的是排斥性或。所谓排斥性或，就是 p 和 q 表示的两种情况不能同时为真，例如，"选小明或小同中的一人参加比赛"，用 p 表示"选小明参加比赛"，用 q 表示"选小同参加比赛"，则该命题不能符号化为 $p\vee q$，因为两人不能同时参加。这种排斥性或可以借助联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 来表示，即符号化为 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 的形式。事实上，我们称这种排斥或为"异或"，以后章节将会介绍。

在使用析取联结词时，首先要判断表达的是相容或还是排斥或。这里还要说明，有的排斥或中两个简单命题在事实情况下就不可能同时为真，例如，"小王现在要么在操场踢球，要么在图书馆看书"，虽然这里表达的是排斥或，但小王现在操场和在图书馆不能同时发生，所以也可符号化为 $p\vee q$。由此得出，若是相容或，以及 p、q 不能同时为真的排斥或，均可直接符号化为 $p\vee q$ 的形式；如果是排斥或，并且 p 与 q 可同时为真，就应符号化为 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 的形式。

定义 1.4　设 p、q 为两任意命题，复合命题"如果 p，则 q"称为 p 与 q 的**蕴涵式**，用**蕴涵联结词** $\rightarrow$ 联结，记为 $p\rightarrow q$。p 称为蕴涵式的**前件**，q 称为蕴涵式的**后件**。$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假。

蕴涵联结词 $\rightarrow$ 的功能可以用表 1-4 描述。

表 1-4　蕴涵联结词 $\rightarrow$ 的真值表

p	q	$p\rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注意：(1) 在自然语言中的"如果 p，则 q"中的 p 与 q 往往有某种联系，但数理逻辑中的前件与后件可没有任何联系。

(2) 数学中"如果 p，则 q"常表示由前件 p 为真推出后件 q 为真的推理关系，但数理逻辑中前件 p 为假时 $p\rightarrow q$ 为真。$p\rightarrow q$ 表达的基本逻辑关系为，p 是 q 的充分条件，q 是 p

的必要条件，因此，自然语言中的“只要 p 就 q”、“只有 q 才 p”、“ p 仅当 q”、“若 p 则 q”均可符号化为 $p \to q$。

例 1.5 符号化下列命题：

(1) 只要周末没事，我就去学滑冰。

(2) 只有周末没事，我才去学滑冰。

(3) 除非我周末没事，否则我不去学滑冰。

(4) 仅当你走，我将留下。

(5) 若外星上有人则 2+2=4。

(6) 若后天是晴天则雪是黑的。

解 分析(1)、(2)、(3)，令 p:我周末没事； q:我去学滑冰。

(1)中“周末没事”是“学滑冰”的充分条件，所以符号化为 $p \to q$；(2)中“周末没事”是“学滑冰”的必要条件，符号化为 $q \to p$；(3) “除非 p 否则 $\neg q$”与“只要 p 就 q”表达的意思等价，同样符号化为 $p \to q$。(4)中用“仅当”，很明显“你走”是“我留”的必要条件，令 p:你走； q:我留，则可表示为 $q \to p$。在使用蕴涵联结词时，一定要认真分析自然语言表达的意思，找准前件与后件，不要混淆。

(5)、(6)中的前件与后件没有任何内在联系，现只考察它的逻辑真值。(5)中后件“2+2=4”为真，无论前件是真是假，这个命题总为真。(6)中后件“雪是黑的”真值为假，那么前件“后天是晴天”为真的情况下，这个复合命题为假；若“后天是晴天”为假，复合命题就为真。

定义 1.5 设 p、q 为两任意命题，复合命题“ p 当且仅当 q”称为 p 与 q 的**等价式**，运用**等价联结词**$\leftrightarrow$，记为 $p \leftrightarrow q$。$p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p、q 真值相同。

等价式表达的逻辑关系为，p 与 q 互为充分必要条件，其功能可由表 1-5 描述。

表 1-5 等价联结词$\leftrightarrow$的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.6 (1) “学生喜欢上这个课意味着这个课有趣，反之亦然”，明显两者互为充分必要条件，符号化为 $p \leftrightarrow q$，其中，p:学生喜欢上这个课，q:这个课有趣；

(2) “雪是白的当且仅当今天是 1 号”，等价式中的两个命题也可没有任何内在联系，人们只关心其逻辑真值。“雪是白的”为真，那么，如果“今天是 1 号”，该等价式为真；如果“今天不是 1 号”，该等价式为假。

上述 5 种常用联结词称为真值联结词或逻辑联结词。运用这些联结词就可以把各种各样的复合命题符号化，基本步骤为：

(1) 从复合命题中分析出各简单命题，分别将它们符号化；

(2) 找出各简单命题之间的关系，运用适当的联结词将它们联结。

例 1.7 符号化下列命题：

(1) 虽然每天课很紧，但我还是坚持跑步。

(2) 小李现在在教室或图书馆。

(3) 选离散数学或数理方程中的一个作为选修课。

(4) 不经一事，不长一智。

(5) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

(6) 如果我上街，我就去书店看看，除非我很累。

解　符号化及分析如下：

(1) $p \wedge q$，其中，p：每天课很紧；q：我坚持跑步。

(2) $p \vee q$，其中，p：小李现在在教室；q：小李现在在图书馆。此题中的"或"为 p、q 不能同时为真的排斥或。

(3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$，其中，$p$：选离散数学为选修课；$q$：选数理方程为选修课。此题中的"或"为 p 和 q 能同时为真的排斥或。

(4) $\neg p \rightarrow \neg q$，其中，$p$：经一事；$q$：长一智。

(5) 本命题由 4 个简单命题构成。

p：上午下雨；q：我去看电影；r：我在家读书；t：我在家看报

"上午下雨"与"上午不下雨"是两个对立事件，分别对应"我去看电影"和"我在家读书或看报"，所以，"上午下雨"与"我去看电影"等价，"上午不下雨"与"我在家读书或看报"等价。

命题符号化为：$(\neg p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow (r \vee t))$。

(6) 本命题由 3 个简单命题构成：

p：我上街；q：我去书店看看；r：我很累

联结词"除非"相当于"如果不……"的意思，因而"我不累"是"我上街"和"我去书店看看"的前件，又因为"我上街"是"我去书店看看"的前件，故命题符号化为：

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$$

在数理逻辑中，命题就像是数学中的运算因子，逻辑联结词就像是数学中的普通运算符"加、减、乘、除"等，所以逻辑联结词也称为逻辑运算符。通过规定这些运算符的优先级及学习等值演算，就能对各种命题公式进行推理、演算，像运用普通运算符一样。

1.2　命题公式及其分类

1. 命题公式

在 1.1 节中引入了 5 个逻辑联结词，并介绍了由它们组成的基本复合命题：$\neg p$，$p \wedge q$，$p \vee q$，$p \rightarrow q$，$p \leftrightarrow q$，其中，p，q 为简单命题，即命题常项。由这 5 种联结词和多个简单命题，就可以组成更多、更复杂的命题，如例 1.7 中的(5)和(6)。本节引入的命题公式由一系列的命题变项符号、命题常项符号和联结词符号等组成，可以表示这类复杂命题。

为此引入下列基本符号：

- 命题常项或变项符号：$p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$
- 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：)，(

下面，首先给出由上述基本符号组成的合式公式的定义，然后规定一个符号串是命题公式当且仅当它是合式公式。

定义 1.6　(1) 单个命题常项或变项 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots, 0, 1$ 是合式公式；

(2) 若 A 是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若 A 和 B 是合式公式，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式；

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)组成的符号串才是**合式公式**。

还可以用计算机科学中常用的巴科斯-瑙尔范式来定义合式公式。这种描述方法由巴科斯提出，瑙尔加以改进，首先在程序设计语言 ALGOL 中使用。

＜合式公式＞∷＝＜命题变项符号＞
　　｜＜命题常项符号＞
　　｜(¬＜合式公式＞)
　　｜(＜合式公式＞∨＜合式公式＞)
　　｜(＜合式公式＞∧＜合式公式＞)
　　｜(＜合式公式＞→＜合式公式＞)
　　｜(＜合式公式＞↔＜合式公式＞)

此后称合式公式为**命题公式**，简称**公式**。

在实际应用中，如果坚持严格的语法，就必须使用大量的括号，这必将导致视觉上的复杂感。为方便起见，规定公式最外层的括号可以省去，如$(\neg A)$，$(A\wedge B)$等的外层括号。另外，还规定联结词的优先级顺序从高到低为：

(1) 括号内的联结词，最内层的优先级最高；

(2) $\neg$；

(3) $\wedge$；

(4) $\vee$；

(5) $\rightarrow$；

(6) $\leftrightarrow$。

在这种规定下，命题公式的部分内层括号也可以省略。这样，$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow q)$，$(p\wedge q)\rightarrow r$，$\neg(p\vee q)\leftrightarrow r$ 都是命题公式，但 $\neg\, p\, q\rightarrow r$，$(\neg\, p\wedge q\leftrightarrow r$ 不是命题公式。

注意，定义中引入的符号 A 和 B 代表任意的命题公式，它们只是公式的名字，但不是公式本身，所以诸如$(A\wedge B)$的式子本身并不是命题逻辑中的合法字符串，更谈不上是合式公式。但是，它是一个公式模式，代表一类(无穷多个)具体的公式，如：

$$p\wedge q$$

$$p\wedge p$$

$$(p\vee r)\wedge\neg q$$

$$(s\leftrightarrow r)\wedge(q\vee q)$$

2. 公式的分类

命题公式多种多样，但可对其做简单的分类。介绍分类之前，首先引入真值表。

如果一个命题公式中含有命题变项，这个公式的真值就是不确定的，只有把每个命题变项用指定的命题常项代替后，命题公式才变成命题，其真值也就能唯一确定。例如，命题公式$(p\rightarrow q)\wedge r$，若指定 p 为“太阳从东方升起”，q 为“6 能被 3 整除”，r 为“雪是白色的”，则$(p\rightarrow q)\wedge r$ 为真命题；若 p，r 指定不变，q 为“5 能被 3 整除”，此命题就变为假命题了。可见，命题的真值与命题变项的指定情况有关。

定义 1.7　设 A 为一命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为所有在 A 中出现的命题变项。给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 指定一组真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**。若指定的一组值使 A 的值为真，就称这组值为 A 的**成真赋值**；若使 A 的值为假，就称该组值为 A 的**成假赋值**。

如果命题公式 A 中的命题变项为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，假设给定一组赋值为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$(v_i