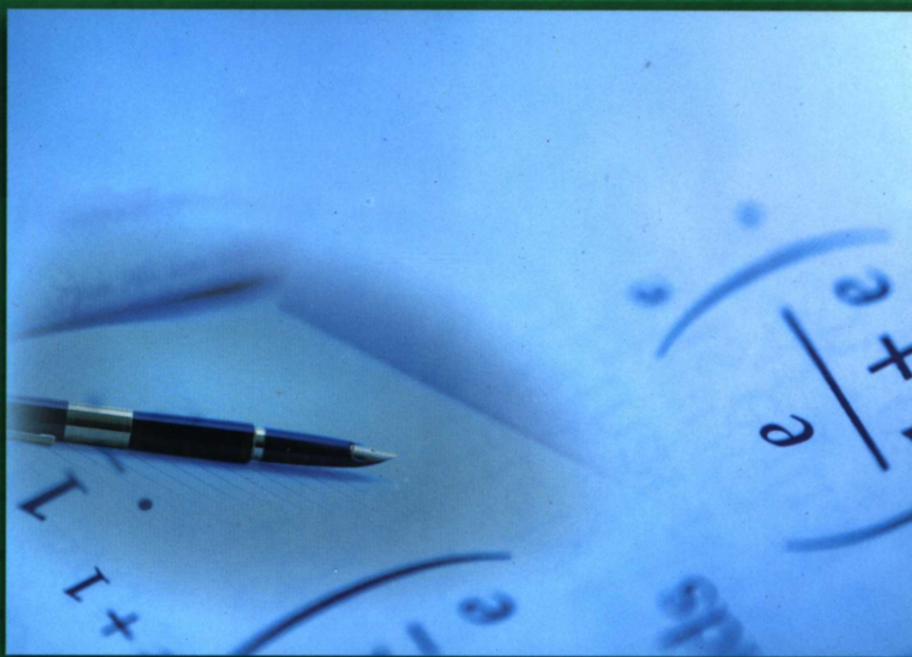
高等教育工科数学系列教材

微积分（下）



魏贵民
胡　灿
魏友华
张　萍
编著

WEIJIFEN

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等教育工科数学系列教材

微积分（上）

微积分（下）

线性代数

概率论与数理统计

离散数学

现代数学基础

ISBN 7-04-014248-1

9 787040 142488 >

定价：26.90元

高等教育工科数学系列教材

微积分(下)

魏贵民　胡　灿　编著
魏友华　张　萍

高等教育出版社

内容提要

《微积分》是高等教育工科数学系列教材之一，分上、下两册，全书共八篇. 下册内容为：第四篇（多元函数微分法）、第五篇（多元函数积分法）、第六篇（级数理论）、第七篇（常微分方程）和第八篇（数学分析基础）. 主要内容包括多元函数微分法及其应用、Riemann 积分、第二类曲线积分与第二类曲面积分、数项级数、幂级数、Fourier 级数、常微分方程、极限的定义、关于实数的基本定理、定积分存在条件、无穷级数的理论问题和广义积分与含参变量积分，共十三章. 每节配有习题，每章配有补充题，书末附有习题参考解答.

本书注重整体取材优化，使学生在致力于学好经典内容的同时学习领会现代数学的思想方法. 内容有一定深度却又简明易懂，颇具改革新意. 本书论述清晰、例题典型，具有很强的科学性和教材性，可作为非数学类专业微积分或工科数学分析课程的教材或参考书，也可供工程技术人员和报考研究生的读者自学参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 下/魏贵民等编著. —北京：高等教育出版社，2004.7

ISBN 7－04－014248－1

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 魏…　Ⅲ. 微积分—高等学校—教材
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 068398 号

责任编辑 孙鸣雷　**特约编辑** 周　滔　**封面设计** 吴　昊　**责任印制** 蔡敏燕

书　名 微积分（下）
编　著 魏贵民　胡　灿　魏友华　张　萍

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总　机 010－82028899
传　真 021－56965341

购书热线 010－64054588
021－56964871
免费咨询 800－810－0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
http://www.hepsh.com

排　版 南京理工排版校对公司
印　刷 江苏如皋市印刷有限公司

开　本 787×960　1/16
印　张 21.50
字　数 401 000

版　次 2004 年 8 月第 1 版
印　次 2004 年 8 月第 1 次
定　价 26.90 元

前　言

《微积分》是高等教育工科数学系列教材之一，分上、下两册，全书共八篇．下册内容为第四篇（多元函数微分法）、第五篇（多元函数积分法）、第六篇（级数理论）、第七篇（常微分方程）和第八篇（数学分析基础）．主要内容包括多元函数微分法及其应用、Riemann 积分、第二类曲线积分与第二类曲面积分、数项级数、幂级数、Fourier 级数、常微分方程、极限的定义、关于实数的基本定理、定积分存在条件、无穷级数的理论问题和广义积分与含参变量积分，共十三章．每节配有习题，每章配有补充题，书末附有习题参考解答．本书主要特色体现在以下几方面：

一、注重教学内容的整体优化，选择合理的教学内容与体系结构

本书的编写吸收了国内外众多优秀教材的长处，结合编者数十年的教学实践和数学教学改革的经验，在保证教学内容的完整性与科学性的前提下，本书对传统的高等数学教材的教学内容与体系结构进行合理地调整，使概念之间的内在联系更加清晰，更加紧密，更加自然．例如，在一元函数积分学的处理上，教材打破了传统教材先介绍不定积分再介绍定积分的次序，在利用 Newton-Leibniz 定理计算定积分时引出了原函数，从而引出了不定积分．如此处理，完全符合微积分产生和发展的原始过程．在多元函数积分学的处理上，教材把二重积分、三重积分、第一类曲线积分和第一类曲面积分归结为 Riemann 积分；把第二类曲线积分和第二类曲面积分归结为向量值函数积分．如此处理，使学生对多元函数积分学理解得更深刻，与实际结合得更紧密．

二、从实际问题出发，引入数学概念和理论

本书在介绍数学概念和理论时，适当地引入实际问题，让学生体会到微积分是来源于实践，又能指导实践的一种思维创造．在教材中，我们尽量从不同角度给出实际例子并加入简单的数学模型，让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有着密切联系．在习题中我们也适当加大应用问题的比例，以便学生在实际生活中能尝试利用所学的微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题．

三、注重教学实际需要，尊重易教易学的原则

本书注重整体取材优化，使学生致力于学好经典内容的同时学习领会现代数学的思想方法．本书体现了易教易学的特点，每一章节的安排符合教学规律，注意消化教学难点，努力用最简捷的途径系统讲授工科大学生所需要的数学知识。教材的编写注意科学性、趣味性、实用性，切实地为教学第一线服务．

四、选择适当的教学定位

本书适应高等教育从精英教育向大众化教育过渡的需要，主要针对一般工科院校的教学实际，选择适当的例题、习题和恰当的教学内容，做到重视教学思想方法、淡化运算技巧.

本系列教材由成都理工大学魏贵民教授任主编，胡灿、魏友华任副主编.

《微积分(下)》由魏贵民、胡灿、魏友华、张萍执笔编写，郭科教授主审，杨晓琳、冯江浪参加了审稿工作，他们为本书提出了重要的修改意见.

虽然我们努力使本书成为一本具有改革新意又便于教学的教材，但由于编者水平所限，书中的不足与考虑不周之处肯定很多，错误也在所难免，我们希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来.

编　者

2004 年 6 月

目　　录

第四篇　多元函数微分法

第五篇　多元函数积分法

第八篇　数学分析基础

第四篇　多元函数微分法

第十章　多元函数微分法

在自然科学与工程技术问题中，经常遇到有一个自变量的函数，也经常会遇到依赖于两个或更多个自变量的函数，即多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上，将微分法推广到多元函数，我们将以二元函数为主介绍多元函数的微分法. 多元函数的微分法不仅仅是一元函数微分法单纯的数学形式上的推广，而是有许多实际应用意义的.

第一节　二元函数的极限

一、多元函数的概念

在科学与工程技术问题中，不少变量依赖于两个或更多的自变量的变化而变化. 例如：矩形的面积 S 依赖于矩形的长 x 与宽 y 的变化而变化，长方体的体积 V 依赖于长方体的长 x，宽 y 和高 z 的变化而变化，等等. 这就形成了多元函数的概念.

定义 1　如果独立变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在它们的变化范围内任取一组值时，变量 u 按照一定的法则，总有一个惟一的实数与之对应，则 u 叫做 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元函数. 记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中，变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做自变量，u 叫做因变量.

当 $n = 1$ 时，这正是我们熟知的一元函数. 当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数叫做多元函数.

二、二元函数的几何意义

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y = f(x)$ 的图形，一般说来，

它是平面上的一条曲线. 对于二元函数 $z=f(x, y)$，可以利用空间直角坐标系来表示它的图形.

设二元函数 $z=f(x, y)$ 对于 xOy 坐标面上某一区域 D 的任意一点 (x, y) 都有定义，那么，对于 D 中的每一点 $P(x, y)$，在(三维)空间都可以作出一点 $M(x, y, f(x, y))$ 与它对应. 当点 $P(x, y)$ 在 D 中变动时，点 $M(x, y, f(x, y))$ 就在空间相应地变动，一般说来，它的轨迹是一个曲面(图 10-1). 这个曲面叫做**二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形**. 因此，二元函数可用一个曲面作为它的几何表示，即

$$\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

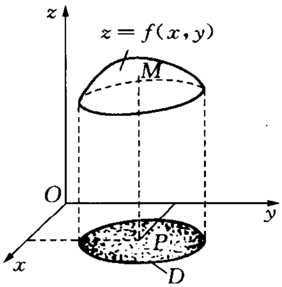


图 10-1

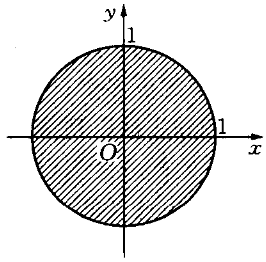


图 10-2

例如，函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为中心、a 为半径、在 xOy 坐标面上方的半个球面.

由于 $P(x, y)$是区域 D 中的点. 因此，二元函数 $z=f(x, y)$ 可以看作是变量 z 随点 P 的变化而变化的点函数，记为 $z=f(P)$. D 叫做 这个**二元函数或者点函数的定义域**. 例如，二元函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为

$$\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

在直角坐标系中，其定义域的图形如图 10-2 所示阴影部分.

三、二元函数的极限

从定义上看，二元函数 $u=f(P)$ 与一元函数$y=f(x)$ 除了点的含义有所不同外，其他并无多大区别. 要将一元函数微分法推广到多元函数，应首先将极限理论推广到多元函数. 我们知道，当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限是 A，其含义是指：

对于任意给定的正数 ε，都存在点 x_0 的一个去心邻域$\mathring{O}(\hat{x}_0, \delta)$，使得这个去心邻域的一切点 x 对应的函数值 $f(x)$都满足 $f(x) \in O(A, \varepsilon)$.

因此,我们首先要明确平面上的点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ 的邻域与去心邻域的含义,才能描述在平面上点 $P \to P_0$. 根据平面上两点间的距离公式,平面上点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域是

$$O(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\},$$

而去心邻域 $O(\hat{P}_0, \delta) = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$.
这样,有

定义 2　假设点函数 $f(P)$ 在点集 D 上有定义, $P_0 \in D$, A 是一个常数. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $P \in O(\hat{P}_0, \delta)$, 有

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

则 A 叫做当 $P \to P_0$ 时函数 $f(P)$ 的极限,记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \qquad 或 \qquad f(P) \to A \quad (P \to P_0).$$

由定义 2 可知,点函数极限的定义与一元函数极限的定义形式完全相同,因此关于一元函数的极限运算法则可以形式完全相同地推广到点函数.

将定义 2 说得具体一些,就是:

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在平面点集 D 上有定义, $(x_0, y_0) \in D$, A 是一个常数. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当

$$0 < \rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

时有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则 A 叫做当 $x \to x_0$, $y \to y_0$ 时,函数 $z = f(x, y)$ 的极限,记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \qquad 或 \qquad f(x, y) \to A \quad (\rho \to 0).$$

二元函数的极限叫做**二重极限**.

注意　二重极限存在,是指点 $P(x, y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数值都无限接近于 A. 因此,如果点 $P(x, y)$ 以某一特殊方式,例如沿着一条定直线或定曲线趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,即便函数值无限接近于某一确定值,我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是,反过来,如果当点 $P(x, y)$ 以不同方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数值趋于不同的值,那么就可以断定该函数的极限不存在.

例　考察函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2 \neq 0\ 时; \\ 0, & 当\ x^2+y^2 = 0\ 时 \end{cases}$$

当$(x, y) \to (0, 0)$时极限存在与否.

解 显然,当点$P(x, y)$沿x轴趋于点$(0, 0)$时,

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

又当点$P(x, y)$沿y轴趋于点$(0, 0)$时,

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

虽然点$P(x, y)$以上述两种方式(沿x轴或沿y轴)趋于原点$(0, 0)$时,函数的极限存在并且相等,但是当点$P(x, y)$沿着直线$y = kx(k \neq 0)$趋于点$(0, 0)$时,有

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2} \neq 0,$$

显然它是随着k的值不同而不同的.

故$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$并不存在.

四、二元函数的连续性

由极限的概念,不难说明点函数连续性的概念.

定义 3 设二元函数$f(P)$的定义域为平面区域D, $P_0 \in D$. 如果

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称二元函数$f(P)$在点P_0处连续.

设D为区域,如果函数$f(P)$在D上各点处都连续,就称函数$f(P)$在D上连续,或称$f(P)$是D上的连续函数.

如果二元函数$f(P)$在点P_0不连续,则说P_0是函数$f(P)$的一个间断点. 二元函数的间断点可以形成一条曲线. 例如,函数

$$z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

在圆周$x^2 + y^2 = 1$上没有定义,从而该圆周上各点都是间断点.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上二元连续函数也有如下性质:

定理 1(最大值和最小值定理) 如果二元函数$f(P)$在有界闭区域D上连续,则$\exists$点P_1, $P_2 \in D$,使得$\forall P \in D$,有

$$f(P_2) \leqslant f(P) \leqslant f(P_1).$$

定理 1 中的 $f(P_1)$，$f(P_2)$分别叫做点函数 $f(P)$在区域 D 上的最大值和最小值.

定理 2（介值定理）　如果函数 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，在 D 上的最大值为 M，最小值为 m，数 μ 满足 $m \leqslant \mu \leqslant M$，则 $\exists P_0 \in D$，使得$f(P_0) = \mu$.

根据极限运算法则，可以证明二元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数；二元连续函数的复合函数也是连续函数.

有关二元函数的极限、连续等概念与性质都可以推广为 n 元函数相应的概念与性质，不赘述.

与一元初等函数类似，有多元初等函数. 例如，

$$\frac{x + x^2 - y^2}{1 + x^2},\ \sin(x + y),\ \mathrm{e}^{x+y},\ \ln(1 + x^2 + y^2)$$

等都是多元初等函数. 并且，

多元初等函数在其定义区域上连续.

所谓定义区域是指包含于定义域的区域.

习　题　10-1

1. 已知函数 $f(x,\ y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}$，试验证 $f(tx,\ ty) = t^2 f(x,\ y)$.

2. 已知函数 $f(x - y,\ \ln x) = \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^y}$，试求 $f(x,\ y)$.

3. 求下列各函数的定义域：

(1) $u = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \dfrac{z}{\sqrt{y}} + \dfrac{x}{\sqrt{z}}$；

(2) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$　　$(R > r > 0)$；

(3) $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}$.

4. 函数 $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2 - 1}$ 在何处是间断的？

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy^2}{xy}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy + 4} - 2}$.

第二节　全微分与偏导数

一、全微分的概念

一元函数微分法是求函数的导函数，或者求函数的微分. 一元函数的微分是函数增量的线性主部，用它近似表示函数增量时，误差是自变量增量的高阶无穷小，这对于计算函数增量的近似值很方便. 照此，我们首先将微分的概念推广到二元函数.

设二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的邻域上有定义，给自变量 x 以增量 Δx，给自变量 y 以增量 Δy，并设点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 在该邻域内，则

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

叫做函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 对应于自变量增量 Δx，Δy 的全增量.

如果 $\Delta y=0$，即只给自变量 x 以增量 Δx，由此引起的函数增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$$

叫做函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 对应于自变量 x 的增量 Δx 的偏增量.

类似可知函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 对应于自变量 y 的增量 Δy 的偏增量

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y).$$

一般说来，计算全增量比较复杂，与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量 Δx，Δy 的线性函数来近似函数的全增量 Δz.

定义 1　设二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域上有定义，对自变量 x，y 分别给以增量 Δx，Δy 所得到的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

如果存在常数 A，B，使得

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中，
$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

就称二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微. $A\Delta x+B\Delta y$ 叫做函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f(x, y)$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

由定义 1 可知，如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微，则一定在点 P 连续. 这是因为当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，有 $\Delta z\to 0$，所以

连续是可微的必要条件.

如果函数在区域 D 的每一点都可微,就说这个函数在区域 D 上可微.

全微分叫做函数全增量的线性主部.

现在,我们分析二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微应当满足的条件.

因为 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微,故当自变量在点 P 分别取得增量 Δx, Δy 时,函数的全增量

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

在上式中,令 $\Delta y=0$, 则 Δz 成为偏增量 $\Delta_x z$, ρ 成为 $|\Delta x|$,上式就成为

$$\Delta_x z = A\Delta x + o(|\Delta x|),$$

因而有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A.$$

这便是函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微应当满足的一个条件.

同理可知函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微要满足的另一个条件是

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=B.$$

二、偏导数的概念

对于二元函数 $z=f(x, y)$,如果我们只对自变量 x 给以增量 Δx,自变量 y 不变,实际上就是将 $z=f(x, y)$ 看作一个自变量 x 的一元函数,而偏增量 $\Delta_x z$ 便是这个一元函数由自变量增量 Δx 引起的函数增量. 因而极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

应当是将 z 看作自变量 x 的一元函数对 x 的导数(自变量 y 看作常数).

定义 2　设二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 的某一邻域上有定义. 当自变量 x 给以增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$,而自变量 y 不变时,函数 z 取得偏增量 $\Delta_x z$,如果当 $\Delta x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

存在,则此极限叫做函数 $z=f(x, y)$ 在点 P 处对自变量 x 的偏导数,记为

$$f_x(P),\quad \frac{\partial z(P)}{\partial x},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \text{ 或 } z_x(P).$$

如果函数在某区域 D 上的每一点 P 处对自变量 x 的偏导数都存在，则由点 P 对应这个偏导数值而得到 D 上的一个函数，叫做函数对自变量 x 的偏导函数，通常简称为偏导数.

类似可定义二元函数 $z=f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导数，以及 n 元函数对某个自变量的偏导数.

三、偏导数的计算

求偏导数的运算叫做偏微分法. 从定义可以看出，在计算偏导数时，并不需要新的方法. 因为这里只有一个自变量在变动，其余的自变量看作常量. 在计算上，它和求一元函数的导数的方法是完全一样的.

例 1 设函数 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$f_x(1, 2)$，$f_y(1, 2)$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{1}{y}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\frac{-x}{x^2+y^2},$$

$$f_x(1, 2)=\frac{2}{1^2+2^2}=\frac{2}{5},\quad f_y(1, 2)=\frac{-1}{1^2+2^2}=-\frac{1}{5}.$$

例 2 求函数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把函数 r 中的 y 和 z 看作常量，求 r 对 x 的偏导数，便得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

同理，得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}.$$

例 3 求函数 $z=x^y\ (x>0)$ 的偏导数.

解 将 y 看作常量，已给函数是关于 x 的幂函数，故得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},$$

将 x 看作常量，已给函数是关于 y 的指数函数，故得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

例 4 已知理想气体的状态方程 $PV=RT$（R 为常量），求证：

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$