



2007^年

李永乐·李正元考研数学①

数学一

【理工类】

数学

复习全书

主 编 北 京 大 学 李正元
 清 华 大 学 李永乐
 中 国 人 民 大 学 袁荫棠

赠送 《全书习题全解》

国家行政学院出版社



2007 年李永乐·李正元考研数学①

数学复习全书

【理工类·数学一】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 (按姓氏笔画)

北	京	大	学	李正元		
清	华	大	学	李永乐		
北	京	大	学	刘西垣		
中	国	人	民	大	学	严 颖
北	京	大	学	范培华		
中	国	人	民	大	学	袁荫棠
空	军	雷	达	学	院	徐宝庆
东	北	财	经	大	学	龚兆仁
天	津	财	经	学	院	鹿立江

国家行政学院出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

2000 年全国硕士研究生入学考试数学复习全书:理工类/李正元等主编.

-北京:国家行政学院出版社,1999.4

ISBN 7-80140-053-4

I. 20… II. 李… III. 高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 09620 号

数学复习全书(2007 年版)

【理工类·数学一】

李正元 李永乐 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码:100089

发行部电话:88517082

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

787 × 1092 1/16 开本 38.5 印张 1000 千字

2006 年 2 月第 8 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-053-4/O · 1 定价:49.80 元

再 版 前 言

本书出版、修订七年多来,深受全国广大考生的好评和厚爱,受到专家同行的肯定,认为本书在编写体例上有“特色”,在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂,较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉,除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外,工科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料,而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励,也是一种鞭策,促使我们对本书进行一次全面修订,以便及时反映当前研究生最新考试信息,更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2007年《数学复习全书》(修订第八版)将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书2007年版是在2006年版的基础上进行修订的,更加完善,更具有针对性和适用性。

高等数学部分:按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要,本书进行了大幅度调整,宗旨是重点内容重点讲解,如:求极限的方法,求积分(一元、多元函数)的方法,牛顿-莱布尼兹公式及其应用,二重积分的计算与应用,泰勒公式及其应用,数学建模,求幂级数的收敛域或收敛区间,幂级数的求和,求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解,同时调换并增加了若干典型例题,并修改了部分例题的解法,使之更简捷,更易掌握。

线性代数部分:主要是针对一些重点概念和公式的运用,调换并增加了若干例题进行讲解,使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透,对一些常考题型,如:抽象行列式的计算,有关伴随矩阵的命题、 n 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结,并给典型例题进行讲解,消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑,以便考生在考试中应对自如,提高应试水平。

概率统计部分:与高等数学部分一样也进行了大幅度调整,调整后更适合考生进行系统复习,同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解,以提高考生运用概念、公式综合分析能力,从而取得好成绩。

特别需要强调的是,本书题型训练均给出了详细解答。

本书高等数学部分由北京大学李正元修改完成,线性代数部分由清华大学李永乐修改完成,概率论与数理统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编者

2006年2月

前 言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学,达到硕士学习阶段应具备的数学能力,提高考研应试水平,以合格的数学成绩任国家挑选,作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神,深入研究了近年来考研命题的特点及动态,并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验,编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成:

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点,让考生弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述,并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析,指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误,同时给出了相应的注意事项,以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类,归纳总结了各种题型的解题方法,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的自测题,并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识,复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中,以供考生选用。

特别需要强调的是,在'98北大百年校庆之际,我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园,畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作,并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历,对各类院校的考生有广泛的接触与了解,深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习,在大家的一致建议下,由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》,期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友,也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编 者

1999年4月于北大燕园

目 录

第一篇 高等数学

第一章 极限、连续与求极限的方法 (1)

内容概要与重难点提示 (1)

考核知识要点讲解 (1)

一、极限的概念与性质 (1)

二、极限的存在与不存在问题 (3)

三、无穷小及其阶 (5)

四、函数的连续性及其判断 (7)

五、求极限的方法 (9)

常考题型及其解题方法与技巧 (16)

题型训练 (29)

第二章 一元函数的导数与微分概念及其计算 (32)

内容概要与重难点提示 (32)

考核知识要点讲解 (32)

一、一元函数的导数与微分 (32)

二、按定义求导及其适用的情形 (36)

三、基本初等函数导数表与导数四则运算法则 (37)

四、复合函数的微分法则 (38)

五、由复合函数求导法则导出的微分法则 (39)

六、分段函数求导法 (41)

七、高阶导数及 n 阶导数的求法 (43)

八、一元函数微分学的简单应用 (45)

常考题型及其解题方法与技巧 (46)

题型训练 (58)

第三章 一元函数积分概念、计算及应用 (60)

内容概要与重难点提示 (60)

考核知识要点讲解 (60)

一、一元函数积分的概念、性质与基本定理 (60)

二、积分法则 (66)

三、各类函数的积分法 (74)

四、广义积分 (77)

五、积分学应用的基本方法——微元分析法 (79)

六、一元函数积分学的几何应用 (80)

七、一元函数积分学的物理应用 (86)

常考题型及其解题方法与技巧 (90)

题型训练 (117)

第四章 微分中值定理及其应用 (119)

内容概要与重难点提示 (119)

考核知识要点讲解 (119)

一、连续函数的性质 (119)

二、微分中值定理及其应用 (121)

三、利用导数研究函数的变化 (122)

四、一元函数的最大值与最小值问题 (127)

五、微分中值定理的其他应用 (129)

常考题型及其解题方法与技巧 (130)

题型训练 (153)

第五章 一元函数的泰勒公式及其应用 (156)

内容概要与重难点提示 (156)

考核知识要点讲解 (156)

一、带皮亚诺余项与拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式 (156)

二、带皮亚诺余项的泰勒公式的求法 (157)

三、一元函数泰勒公式的若干应用 (158)

常考题型及其解题方法与技巧 (161)

题型训练	(165)		(216)
第六章 微分方程	(167)	六、多元函数极值充分判别法	(217)
内容概要与重难点提示	(167)	七、多元函数的最大值与最小值问题	(219)
考核知识要点讲解	(167)	八、方向导数与梯度	(221)
一、基本概念	(167)	九、多元函数微分学的几何应用	(223)
二、一阶微分方程	(168)	常考题型及其解题方法与技巧	(225)
三、可降阶的高阶方程	(170)	题型训练	(235)
四、线性微分方程解的性质与结构	(171)	第九章 多元函数积分的概念、计算及其应用	(239)
五、二阶和某些高阶常系数齐次线性方程、欧拉方程	(172)	内容概要与重难点提示	(239)
六、二阶常系数非齐次线性方程	(173)	考核知识要点讲解	(239)
七、含变限积分的方程	(174)	一、多元函数积分的概念与性质	(239)
八、应用问题	(175)	二、在直角坐标系中化多元函数的积分为定积分	(243)
常考题型及其解题方法与技巧	(176)	三、重积分的变量替换	(250)
题型训练	(187)	四、如何应用多元函数积分的计算公式及简化计算	(254)
第七章 向量代数和空间解析几何	(189)	五、多元函数积分学的几何应用	(263)
内容概要与重难点提示	(189)	六、多元函数积分学的物理应用	(265)
考核知识要点讲解	(189)	常考题型及其解题方法与技巧	(268)
一、空间直角坐标系	(189)	题型训练	(295)
二、向量的概念	(189)	第十章 多元函数积分学中的基本公式及其应用	(299)
三、向量的运算	(190)	内容概要与重难点提示	(299)
四、平面方程、直线方程	(193)	考核知识要点讲解	(299)
五、平面、直线之间相互关系	(195)	一、多元函数积分学中的基本公式——格林公式，高斯公式与斯托克斯公式	(299)
六、常用二次曲面的方程及其图形	(196)	二、向量场的通量与散度，环流量与旋度	(301)
七、空间曲线在坐标平面上的投影	(197)	三、格林公式，高斯公式与斯托克斯公式的一个应用——简化多元函数积分的计算	(302)
常考题型及其解题方法与技巧	(198)	四、平面上曲线积分与路径无关问题及微分式的原函数问题	(306)
题型训练	(205)	常考题型及其解题方法与技巧	(311)
第八章 多元函数微分学	(206)		
内容概要与重难点提示	(206)		
考核知识要点讲解	(206)		
一、多元函数的概念、极限与连续性	(206)		
二、多元函数的偏导数与全微分	(208)		
三、多元函数微分法则	(212)		
四、复合函数求导法的应用——隐函数微分法	(214)		
五、复合函数求导法则的其他应用			

题型训练	(321)
------	-------

第十一章 无穷级数 (323)

内容概要与重难点提示	(323)
------------	-------

考核知识要点讲解	(323)
----------	-------

一、常数项级数的概念与基本性质	(323)
-----------------	-------

二、正项级数敛散性的判定	(324)
--------------	-------

三、交错级数的敛散性判别法	(326)
---------------	-------

四、绝对收敛与条件收敛	(326)
-------------	-------

五、函数项级数的收敛域与和函数	(327)
-----------------	-------

六、幂级数的收敛域	(328)
-----------	-------

七、幂级数的运算与和函数的性质	(329)
-----------------	-------

八、幂级数的求和与函数的幂级数展开	(331)
-------------------	-------

九、傅里叶级数	(333)
---------	-------

常考题型及其解题方法与技巧	(335)
---------------	-------

题型训练	(352)
------	-------

第二篇 线性代数

第一章 行列式 (355)

内容概要与重难点提示	(355)
------------	-------

考核知识要点讲解	(355)
----------	-------

一、行列式的概念、展开公式及其性质	(355)
-------------------	-------

二、有关行列式的几个重要公式	(359)
----------------	-------

常考题型及其解题方法与技巧	(360)
---------------	-------

题型训练	(370)
------	-------

第二章 矩阵及其运算 (372)

内容概要与重难点提示	(372)
------------	-------

考核知识要点讲解	(372)
----------	-------

一、矩阵的概念及几类特殊方阵	(372)
----------------	-------

二、矩阵的运算	(374)
---------	-------

三、矩阵可逆的充分必要条件	(375)
---------------	-------

四、初等变换	(376)
--------	-------

五、初等矩阵	(376)
--------	-------

六、矩阵的等价	(377)
---------	-------

七、矩阵方程	(377)
--------	-------

常考题型及其解题方法与技巧	(378)
---------------	-------

题型训练	(395)
------	-------

第三章 n 维向量与向量空间 (398)

内容概要与重难点提示	(398)
------------	-------

考核知识要点讲解	(398)
----------	-------

一、 n 维向量的概念与运算	(398)
------------------	-------

二、线性组合与线性表出	(399)
-------------	-------

三、线性相关与线性无关	(400)
-------------	-------

四、线性相关性 with 线性表出的关系	(401)
----------------------	-------

五、向量组的秩与矩阵的秩	(401)
--------------	-------

六、矩阵秩的重要公式	(402)
------------	-------

七、向量空间、子空间与基、维数、坐标	(402)
--------------------	-------

八、基变换与坐标变换	(403)
------------	-------

九、规范正交基与 Schmidt 正交化	(404)
----------------------	-------

常考题型及其解题方法与技巧	(404)
---------------	-------

题型训练	(423)
------	-------

第四章 线性方程组 (427)

内容概要与重难点提示	(427)
------------	-------

考核知识要点讲解	(427)
----------	-------

一、线性方程组的各种表达形式及相关概念	(427)
---------------------	-------

二、基础解系的概念及其求法	(427)
---------------	-------

三、齐次方程组有非零解的判定	(428)
----------------	-------

四、非齐次线性方程组有解的判定	(428)
-----------------	-------

五、非齐次线性方程组解的结构	(429)
----------------	-------

六、线性方程组解的性质	(429)
-------------	-------

七、克莱姆 (Cramer) 法则	(429)
-------------------	-------

常考题型及其解题方法与技巧	(429)
---------------	-------

题型训练	(443)
------	-------

第五章 矩阵的特征值与特征向量 (446)

内容概要与重难点提示	(446)
------------	-------

考核知识要点讲解	(446)
----------	-------

一、矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及求法	(446)
------------------------	-------

二、相似矩阵的概念与性质	(448)
三、矩阵可相似对角化的充分必要条 件及解题步骤	(448)
常考题型及其解题方法与技巧	(450)
题型训练	(469)
第六章 二次型	(472)
内容概要与重难点提示	(472)
考核知识要点讲解	(472)
一、二次型的概念及其标准形	(472)
二、合同矩阵及正定矩阵	(474)
常考题型及其解题方法与技巧	(475)
题型训练	(486)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	(488)
内容概要与重难点提示	(488)
考核知识要点讲解	(488)
一、随机事件的关系与运算	(488)
二、随机事件的概率	(490)
三、全概率公式与贝叶斯公式	(493)
四、事件的独立性与伯努利公式	(494)
常考题型及其解题方法与技巧	(495)
题型训练	(506)

第二章 随机变量的分布及其概率	(508)
内容概要与重难点提示	(508)
考核知识要点讲解	(508)
一、随机变量与分布函数	(508)
二、离散型随机变量与连续型随机变 量	(509)
三、几个常见分布	(510)
四、随机变量函数的分布的求法	(514)
常考题型及其解题方法与技巧	(514)
题型训练	(527)

第三章 多维随机变量及其分布	(529)
内容概要与重难点提示	(529)
考核知识要点讲解	(529)
一、多维随机变量的联合分布函数与	

边缘分布函数	(529)
二、二维离散型随机变量	(530)
三、二维连续型随机变量	(531)
四、两个常见的二维连续型随机变量 的分布	(534)
五、二维随机变量的独立性	(535)
六、二维随机变量函数的分布的求法	(535)
常考题型及其解题方法与技巧	(537)
题型训练	(551)

第四章 随机变量的数字特征	(553)
内容概要与重难点提示	(553)
考核知识要点讲解	(553)
一、一维随机变量的数字特征	(553)
二、二维随机变量的数字特征	(554)
常考题型及其解题方法与技巧	(556)
题型训练	(570)

第五章 大数定律和中心极限定理	(571)
内容概要与重难点提示	(571)
考核知识要点讲解	(571)
一、大数定律	(571)
二、中心极限定理	(573)
常考题型及其解题方法与技巧	(573)
题型训练	(580)

第六章 数理统计的基本概念	(582)
内容概要与重难点提示	(582)
考核知识要点讲解	(582)
一、总体、样本、样本的数字特征	(582)
二、统计量及抽样分布	(583)
常考题型及其解题方法与技巧	(586)
题型训练	(589)

第七章 参数估计和假设检验	(591)
内容概要与重难点提示	(591)
考核知识要点讲解	(591)
一、统计估计	(591)
二、假设检验	(594)
常考题型及其解题方法与技巧	(596)
题型训练	(605)

第一篇 高等数学

第一章 极限、连续与求极限的方法

内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得其中一个量或几个量定了, 另一个量也就被唯一确定, 前者是一元函数, 后者是多元函数.

函数这部分的重点是: 复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算. (这部分内容贯穿全书, 不另行复习.)

2. 极限是微积分的理论基础. 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限, 如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件, 又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多, 综合起来主要有:

- ① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则; ② 利用函数的连续性;
- ③ 利用变量替换与两个重要极限; ④ 利用等价无穷小因子替换;
- ⑤ 利用洛必达法则; ⑥ 分别求左、右极限;
- ⑦ 数列极限转化为函数极限; ⑧ 利用夹逼定理;
- ⑨ 对递归数列先证明极限存在(常用到“单调有界数列有极限”的准则), 再利用递归关系求出极限;
- ⑩ 利用定积分求和式的极限; ⑪ 利用泰勒公式; ⑫ 利用导数的定义求极限.

3. 无穷小就是极限为零的变量. 极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析, 或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念, 学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法, 会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限定义的, 所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法, 特别是分段函数在连接点处的连续性.

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一) 极限的定义

【定义 1.1】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A: \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

若 x_n 存在极限(有限数), 又称 $\{x_n\}$ 收敛, 否则称 $\{x_n\}$ 发散.

【定义 1.2】 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A: \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A: \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义: $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

(二) 极限的基本性质与两个重要极限

►1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

若 $a > b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$; 若 $n > N$ 时, $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

【定理 1.2】(极限的唯一性) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则 $a = b$.

【定理 1.3】(收敛数列的有界性) 设 x_n 收敛, 则 x_n 有界 (即 $\exists$ 常数 $M > 0, |x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$).

►2. 函数极限的基本性质

【定理 1.4】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$;

若 $f(x) \geq g(x) (0 < |x - x_0| < \delta)$, 则 $A \geq B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$; 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$. 若 $f(x) \geq 0 (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geq 0$.

【定理 1.5】(极限的唯一性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

【定理 1.6】(存在极限的函数局部有界性) 设存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即 $\exists \delta > 0, M > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$.

【注】其他的极限过程如 $x \rightarrow x_0 + 0, x \rightarrow x_0 - 0, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 等等也有类似的结论.

►3. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right) \quad (1.1)$$

【例 1.1】判断下列结论是否正确, 并证明你的判断.

(I) 若 $x_n < y_n (n > N)$, 又存在极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = B$, 则 $A < B$.

(II) 设 $f(x)$ 定义在 (a, b) , 又 $c \in (a, b)$, 并存在极限 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

(III) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】(I) 不正确. 在题设下只能保证 $A \leq B$, 不能保证 $A < B$. 例如, $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{2}{n}$, 则 $x_n < y_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

评注 对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边取极限时 (以极限存在为前提), 除保持不等号外还要带上等号, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

(II) 不正确. 这时只能保证: $\exists c$ 的一个空心邻域 $U_0(c, \delta) = \{x | 0 < |x - c| < \delta\}$, $f(x)$ 在 $U_0(c, \delta)$ 有界, 不能保证 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 例如: $f(x) = \frac{1}{x}, (a, b) = (0, 1)$, 取 $c \in (0, 1)$, 则 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{1}{c}$, 但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 无界.

(Ⅲ) 正确. 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$, 由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 <$

$|x - a| < \delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限的存在与不存在问题

(一) 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理) 若数列 x_n 单调上升有上界, 即 $x_{n+1} \geq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 并存在一个数 M , 使得对一切的 n 有 $x_n \leq M$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \text{ 且有 } x_n \leq a \quad (n = 1, 2, \dots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界, 即 $x_{n+1} \leq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 并存在一个数 m , 使得对一切的 n 有 $x_n \geq m$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a , 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 且有 $x_n \geq a$ ($n = 1, 2, \dots$).

【例 1.2】 设 $a_n = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ ($n = 2, 3, \dots$), 试证: $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 显然 a_n 单调上升, 因为 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} > 1.$$

证明 a_n 的有界性遇到了困难, 但我们知道:

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 0,$$

$$\text{于是 } a_n b_n = \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)\left(1 - \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) < 1.$$

$$\text{从而 } a_n < \frac{1}{b_n}.$$

为证 a_n 有界, 只须证 b_n 有正的下界. 事实上,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdots \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{1 \times 3}{2^2} \cdot \frac{2 \times 4}{3^2} \cdot \frac{3 \times 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因此 $a_n < 2$, 故 a_n 单调上升有上界是收敛的.

(二) 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

【定理 1.9】(夹逼定理) 设 $\exists \delta > 0$, $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

【注】 其他的极限过程也有类似的结论.

【定理 1.10】(单侧极限与双侧极限的关系) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x).$$

【例 1.3】 设 $f(x) = \begin{cases} a \frac{\sin x - x}{x^3}, & x > 0, \\ \frac{1}{x} \left(2\sin x - \int_0^x \sin t^2 dt \right), & x < 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$, 由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值.

$$\text{【解】} \quad f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a \frac{\sin x - x}{x^3} \right) \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow 0^+} a \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{a}{6},$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt \right)'}{(x)'} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x^2 = 2.$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$, 得 $-\frac{a}{6} = 2$, 即 $a = -12$. 因此, 仅当 $a = -12$ 时, 存在 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

【例 1.4】 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$ 是

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 不存在但不是 ∞ .

【分析】 因 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$. 故要分别考察左、右极限. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{t = \frac{1}{x-1}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{t = \frac{1}{x-1}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t^2} = 0,$$

因此选(D).

评注 证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法是:

1° 若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限式中含有 a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), 或 $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, 一定要分别求出 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 的极限值, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 否则不存在.

2° 若 $\exists x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0), y_n \rightarrow x_0 (y_n \neq x_0)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

【例 1.5】 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

【证明】 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则均有 $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{y_n} = 1. \quad \text{因此} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

评注 类似可证: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

三、无穷小及其阶

(一) 无穷小与无穷大的定义

【定义 1.4】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量).

(1) 称 x_n 为无穷小, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ (记为 $x_n = o(1)$ ($n \rightarrow +\infty$));

(2) 称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (记为 $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow x_0$).

【定义 1.5】 (1) 称 x_n 为无穷大(量) ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists$ 自然数 N , 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| > M.$$

(2) 称 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量) ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时,

$$|f(x)| > M.$$

(3) 称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量) ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x)| > M.$$

类似可定义正无穷大(量)和负无穷大(量).

注意: 我们说 x_n 存在极限, 即指 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 为有限值. 若 x_n 为无穷大量, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$, 则 x_n 是属于极限不存在的情形.

(二) 无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

在同一个极限过程中, $\begin{cases} f(x) \text{ 为无穷小, } f(x) \neq 0, \text{ 则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷大.} \\ f(x) \text{ 为无穷大, 则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小.} \end{cases}$

(三) 无穷小阶的概念

【定义 1.6】 设在同一个极限过程中, $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$.

(1) 若 $l \neq 0$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若 $l = 1$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ (极限过程);

(3) 若 $l = 0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (极限过程).

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (不为 ∞), 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

【定义 1.7】 设在同一个极限过程中 $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小, 以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = l \neq 0$ (即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小), 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

(四) 重要的等价无穷小

$x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x, & \tan x &\sim x, & \arcsin x &\sim x, & \arctan x &\sim x, \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2, & a^x - 1 &\sim x \ln a, & e^x - 1 &\sim x, & \ln(1+x) &\sim x, \\ (1+\beta x)^\alpha - 1 &\sim \alpha \beta x, & \sqrt[n]{1+x} - 1 &\sim \frac{1}{n}x, & \log_a(1+x) &\sim \frac{1}{\ln a}x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

(五) 等价无穷小的重要性质

1° 若 $x \rightarrow a$ 时, $\alpha(x) \sim \alpha^*(x)$, $\beta(x) \sim \beta^*(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \quad (1.3)$$

该结论表明: 在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

2° $\alpha(x) \sim \beta(x) (x \rightarrow a) \Leftrightarrow \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)) (x \rightarrow a)$.

【例 1.6】 求 $w = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$.

【解】 $x \rightarrow 0$ 时, $t = (1+x)^x - 1 \rightarrow 0$, 则 $(1+x)^x - 1 = t \sim \ln(1+t) = \ln(1+x)^x = x \ln(1+x)$, 用等价无穷小因子替换得

$$w = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x^2} = 1.$$

评注 ① 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 若用洛必达法则需要求导:

$$((1+x)^x)' = (e^{x \ln(1+x)})' = (1+x)^x (\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}).$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } w &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^x)'}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right]}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(1+x) + x}{2x} = 1. \end{aligned}$$

② 在求极限过程中, 积、商可用等价无穷小替换, 等价无穷小因子替换常会给计算带来方便.

(六) 确定无穷小阶的方法

设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 如何确定 $f(x)$ 是 $x-a$ 的几阶无穷小? 常用如下方法:

1° 利用洛必达法则 确定 $k > 0$ 使得 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^k} = A \neq 0$, 则 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 是 $x-a$ 的 k 阶无穷小.

2° 用泰勒公式 (见第五章三(二))

3° 利用无穷小阶的运算性质

如若 $x \rightarrow a$ 时, $f(x), g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $(n+m)$ 阶无穷小. 当 $n < m$ 时, $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

判断 $x \rightarrow a$ 时, 无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否同阶、等价的最基本方法是求 $\frac{0}{0}$ 型极限, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 \text{ 且 } \neq 1, & \text{同阶而不等价,} \\ 1, & \text{等价,} \\ 0, & f(x) \text{ 比 } g(x) \text{ 高阶,} \\ \infty, & g(x) \text{ 比 } f(x) \text{ 高阶.} \end{cases} \quad (1.4)$$

【例 1.7】 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ 与 $g(x) = x^3 + x^4$ 比较是() 的无穷小.

(A) 等价 (B) 同阶非等价 (C) 高阶 (D) 低阶

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ 型}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$. 因此选(B).

评注 计算中除了用洛必达法则外,还用了等价无穷小因子替换:

$$g(x) \sim x^3, \sin(\sin^2 x) \sim \sin^2 x \quad (x \rightarrow 0).$$

四、函数的连续性及其判断

(一) 连续性概念

【定义 1.8】

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 连续.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$), 称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 右(左)连续.

(3) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内任一点均连续, 称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

(4) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 在 $x = a$ 右连续, 在 $x = b$ 左连续, 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

【定理 1.11】(单双侧连续性的关系) $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.

(二) 间断点的定义与分类

【定义 1.9】 设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域或单侧空心邻域有定义, $x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的连续点, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

设 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域有定义, 间断点 x_0 的类型:

► 1. 第一类间断点 $\triangleq f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 均存在.

可去间断点: $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义.

跳跃间断点: $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$.

► 2. 第二类间断点 $\triangleq f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 中至少有一个不存在.

无穷间断点: $f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 中有一个为 ∞ .

(三) 判断函数的连续性和间断点的类型

判断函数连续性的方法:

1° 若是初等函数, 则在它的定义域区间上处处连续.

2° 用连续性运算法则.

3° 分别判断左右连续性或按定义来判断.

【定理 1.12】(连续性运算法则)

(1)(连续性的四则运算法则) 设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 连续, 则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x) (g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 也连续.

(2)(复合函数的连续性) 设 $u = \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $y = f(u)$ 在 $u = u_0 (u_0 = \varphi(x_0))$ 连续, 则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 连续.

(3)(反函数的连续性) 设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 则反函数 $x = \varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y | y = f(x), x \in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性.

【注】 若按定义判断连续性或间断点类型, 则是求极限问题.

函数 $f(x) = ()$ 在它的定义域区间上连续.

(A) $\ln x + \sin x$ (B) $\begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

【分析】 先看一看是什么类型的函数, 只要有初等函数就入选, 因为初等函数在它的定义域区间上连续.

因 $\ln x + \sin x$ 是初等函数, 在它的定义域区间上连续, 故其他就不必考虑. 应选(A). 作为复习请检查(B) ~ (D) 为何不连续, 并指出是哪一类间断点.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$.

(I) 若 $f(x)$ 处处连续, 求 a, b 值; (II) 若 (a, b) 不是求出的值时, $f(x)$ 有何间断点, 并指出它的类型.

【分析与求解】 (I) 首先求出 $f(x)$. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2n} = \begin{cases} \infty, & |x| > 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases} \quad \text{要分段求出 } f(x).$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1} + ax^{2-2n} + bx^{1-2n}}{1 + x^{-2n}} = \frac{1}{x};$$

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx}{1} = ax^2 + bx.$$

$$\text{于是得 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x = 1, \\ \frac{1}{2}(a-b-1), & x = -1, \\ ax^2 + bx, & |x| < 1. \end{cases}$$

其次, 由初等函数的连续性, 当 $|x| > 1, |x| < 1$ 时 $f(x)$ 分别与初等函数相等, 故连续.

最后, 只须考察分段函数的连接点 $x = \pm 1$ 处的连续性. 这就要按定义考察连续性, 分别计算

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax^2 + bx) = a + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (ax^2 + bx) = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x} = -1;$$