领先文化

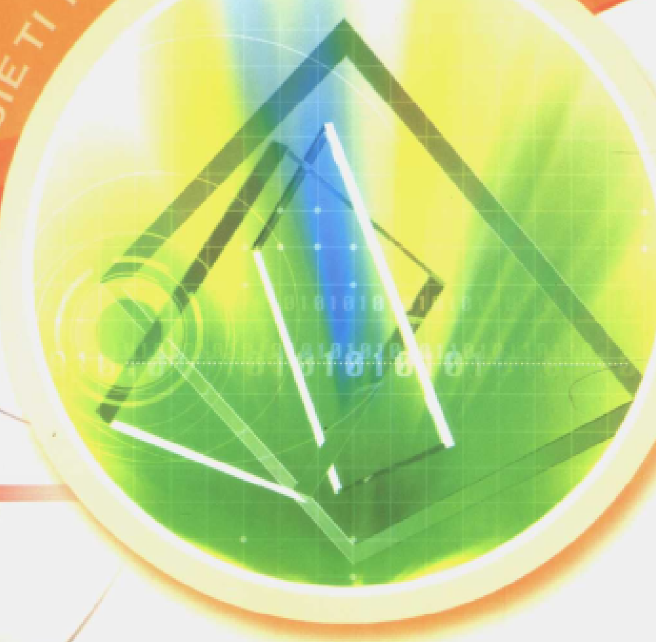
# 名师领航

## 高中解题方法·规律·技巧

# 数学

丛书主编：黄抗强 陈笑梅
本册主审：杨日武 等
本册主编：卢鸿鸣 等

JIETI FANG FA GUI LU JI QIAO



中国大地出版社

读名师书　圆名校梦

## 本丛书拥有自己的特色与功能

- 以现代教育理论为依托，创建科学的解题教学系统，强化能力的高层次发展，收到举一反三水到渠成之效果
- 立足基础，重在能力的培养，是在考生现有基础之上的提高，找出提高的最佳方法
- 高水平，高素质，高质量，浓缩各地名师多年教学经验之精华
- 不是简单给出题型，而是方法、规律、技巧的点拨
- 不是题海战术，而是范例引导，从整体上把握高考考题题型和命题方向
- 勤奋聪明的学子只有幸遇良师才能如虎添翼
- 含辛茹苦的老师惟有找准途径方可指点迷津

**名师领航**

**高中解题方法·规律·技巧**

**数学　　物理　　化学**

总策划：湖南领先教育考试研究中心　　丛书主编：黄抗强 陈笑梅
责任编辑：叶　丹　卢晓熙　　装帧设计：领先文化

ISBN 7-80097-823-0

9 787800 978234 >

ISBN 7-80097-823-0/G·147
全套定价：75.00 元（全套共3册）

# 名师领航

## 高中解题方法·规律·技巧

# 数学


从书主编：黄抗强　陈笑梅

从书副主编：刘爱民　刘绍松

本册主审：杨日武　曾庆桂

本册主编：卢鸿鸣　屈检嗣　张国辉　陈兴祥　欧阳尚昭

本册副主编：申安和　李群丽　方　明　陈国军　孙汉中

中国大地出版社

·北　京·

**图书在版编目(CIP)数据**

高中解题方法·规律·技巧．数学/黄抗强，陈笑梅主编；卢鸿鸣等分册主编．—北京：中国大地出版社，2006.3

ISBN 7-80097-823-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①黄…②陈…③卢… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第013666号

---

**责任编辑：** 叶　丹　卢晓熙
**出版发行：** 中国大地出版社
**社址邮编：** 北京市海淀区学院路31号　100083
**电　　话：** 010—82329127(发行部)　010—82329008(编辑部)
**传　　真：** 010—82329024
**印　　刷：** 衡阳博艺印务有限责任公司
**开　　本：** 787mm×1092mm　1/16
**印　　张：** 45.25
**字　　数：** 1335千字
**版　　次：** 2006年3月第1版
**印　　次：** 2006年3月第1次印刷
**印　　数：** 1—3000套
**书　　号：** ISBN 7-80097-823-0/G·147
**定　　价：** 75.00元(全套共3册)

---

## 本册作者名单

（排名不分先后）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 杨日武 | 卢鸿鸣 | 屈检嗣 | 张国辉 | 欧阳尚昭 |
| 申安和 | 李群丽 | 方　明 | 陈国军 | 赵金龙 |
| 杨西更 | 李玉霞 | 蒋明权 | 唐作明 | 周宇美 |
| 颜亚冰 | 王向群 | 张李军 | 朱勇军 | 彭学军 |
| 廖维满 | 周　睿 | 厉　倩 | 戴贤茂 | 周飞跃 |
| 龚建良 | 屈美群 | 方　志 | 陈平方 | 高　蓉 |
| 杨正泉 | 曾福旺 | 杨天光 | 龚日辉 | 王建中 |
| 曾庆桂 | 戴世昌 | 罗正杰 | 张书满 | 于发智 |
| 林　伟 | 唐光明 | 孙汉中 | 梁克强 | 余红丹 |
| 李　涛 | 刘族刚 | 李为国 | 秦玉珍 | 钟守燕 |
| 丁文虎 | 蔺万隆 | 陶　冶 | 陈兴祥 | |

读 名 师 书 圆 名 校 梦

——拥有 名师领航《高中解题方法·规律·技巧》是您明智的选择!

# 前 言

名师领航《高中解题方法·规律·技巧》是根据人民教育出版社普通高中课程标准实验教科书和全日制普通高级中学教科书及相关的高考《考试大纲》编写的。

**编写宗旨** 帮助学生学习攻克教科书各章节的重点、难点、疑点和高考中的热点,传授解题的方法、规律、技巧,从而辐射到各个考点,以求达到举一反三、触类旁通的效果,进而达到"授人以渔"的目的。

**体例实用** 本书包括范例引导、名师小结、误区点拨、反馈训练、参考答案等栏目,一环扣一环,具有较强的针对性和实用性。

通过对本书的阅读、理解和练习,以期达到"知识、方法、能力"三到位,抓住重点、突破难点、提高学习效率,为每个学生的发展提供一个重要的平台,是本书作者的共同心愿。

本书适合高中各年级使用,尤其对高三学生和补习班学生来说,更是一本难得的备战高考和实现"读名师书,圆名校梦"的好书!

本书在编写过程中,得到了湖南师范大学主办的《湖南中学物理》杂志社和《中学生理化报》报社的热情指导,尤其是众多名校名师,强强联手,共同打造,将多年教学实践中积累的宝贵经验,汇集到这本精品之中,可谓集体智慧的结晶,借此书出版之际,谨向上述单位、同行、专家致以衷心的谢意!

由于水平有限,时间匆促,难免有疏漏之处,敬请广大师生指正,以便日后再版时修正,使其更加完美!

黄抗强

2006 年 2 月于湖南大学

# 目 录

## 第一章 集合与简易逻辑



## 第二章 函 数



## 第三章 数 列

## 第四章 三角函数



## 第五章 平面向量



## 第六章 不等式



## 第七章 直线与圆的方程

## 第八章 圆锥曲线方程



## 第九章 直线 平面 简单几何体



## 第十章 综合章节



## 第十一章 解题思想与运算速度

# 第一章

# 集合与简易逻辑

## 1. 元素与集合、集合与集合的关系

元素与集合、集合与集合的关系是集合知识的基础，近几年的高考对这个内容的考查题目难度不大，但思维能力要求较高. 因此不仅要求学生对元素与集合、集合与集合的概念理解到位，相关的性质运用熟练，而且还要能在知识的交汇点处灵活处理问题，能将常见的思维方法与数形结合的思想、分类讨论的思想等运用到位.

### 范例引导

(1)(2005年浙江卷)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathrm{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记$\hat{P}=\{n\in\mathrm{N}\mid f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathrm{N}\mid f(n)\in Q\}$，则$(\hat{P}\cap\complement_{\mathrm{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathrm{N}}\hat{P})=$　　(　　)

(A)$\{0,3\}$　　(B)$\{1,2\}$

(C)$\{3,4,5\}$　　(D)$\{1,2,6,7\}$

(2)(2005年天津卷)从集合$\{1,2,3,\cdots,11\}$中任选两个元素作为椭圆方程$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$中的$m$和$n$，则能组成落在矩形区域$B=\{(x,y)\mid |x|<11,且|y|<9\}$内的椭圆个数为　　(　　)

(A)43　　(B)72

(C)86　　(D)90

**【解析】**(1)由已知条件得：$\hat{P}=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}$，$\hat{Q}=\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\}$，则$\hat{P}\cap(\complement_{N}\hat{Q})=\{0\}$，$\hat{Q}\cap(\complement_{N}\hat{P})=\{3\}$.

(2)由已知得：矩形区域$B=\{(x,y)\mid |x|<11,且|y|<9\}$为一个长方形. 若长轴在$x$轴，$b$至少取1，最大取8，对应的$a$分别有9个和2个，此时椭圆个数为$9+8+7+\cdots+2=44$个；同理若长轴在$y$轴，此时椭圆个数为$7+6+5+\cdots+1=28$个.

**【答案】**(1)A　(2)B

### 名师小结

(1)元素分析法是研究元素与集合、集合与集合的关系的主要方法之一，着重分析集合中元素的属性，判断元素与集合的关系.

(2)判断集合与集合的关系时，子集、真子集的概念一定要明确，它们的差别也要重视. 求集合的交集、并集、补集时要善于运用数轴，适当运用数形结合的思想.

(3)综合问题中应首先掌握已知的集合中的元素有哪些，这些元素的特征是什么，然后结合其他的已知条件进行分析处理，注意与分类讨论的思想、化归的思想等有机地结合.

### 误区点拨

(1)集合中的特殊元素、集合与集合的特殊关系(如$A=B$，$A=\varnothing$等)一定不能忽略，要单独考虑清楚.

(2)利用数形结合研究集合对应的图像时，要把集合中的所有元素都考虑到位，特别注意图形的边界的取值问题.

### 反馈训练

1. (2005年山东卷)设集合$A$、$B$是全集$U$的两个子集，则“$A\subsetneqq B$”是“$(\complement_{U}A)\cup B=U$”的　　(　　)

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

2. (2005年上海卷)已知集合$M=\{x\mid |x-1|\leqslant 2,$

$x\in\mathbf{R}\}$，$P=\left\{x\left|\frac{5}{x+1}\geqslant 1,x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 $M\cap P$ 等于（　　）

(A) $\{x|0<x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{x|-1\leqslant x<0,x\in\mathbf{Z}\}$

3. (2005年湖北卷)设 $P$、$Q$ 为两个非空数集，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是（　　）

(A)9　　(B)8

(C)7　　(D)6

4. (2005年湖南卷)设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积，$\lambda_1=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\lambda_2=\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$，$\lambda_3=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$，定义 $f(P)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，若 $G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$f(Q)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$，则（　　）

(A)点 $Q$ 在 $\triangle GAB$ 内

(B)点 $Q$ 在 $\triangle GBC$ 内

(C)点 $Q$ 在 $\triangle GCA$ 内

(D)点 $Q$ 与点 $G$ 重合

**参考答案**

1. A 【解析】由文氏图分析可得充分性，当 $A=B$ 时，$(\complement_U A)\cup B=U$，不能推出 $A\subsetneqq B$.

2. B 【解析】$M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{x|-1<x\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2,3,4\}$.

3. B 【解析】由题可得 $P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$.

4. A 【解析】由题可得：取特殊三角形——正三角形 $ABC$，$\lambda_1=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，点 $P$ 在过 $AD$($BC$ 边的高)的中点且平行于 $BC$ 的直线上，$\lambda_2=\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$，点 $P$ 在过点 $G$ 且平行于 $AC$ 的直线上，作图可得点 $Q$ 在 $\triangle GAB$ 内.

## 2. 含绝对值问题的求解策略

绝对值问题是一种常见的问题，它常常与分段函数、方程和不等式及几何图形密切相关，因而也是近年来高考的重点、热点. 但把握好解决这类问题的常用思维方法，结合分类讨论和数形结合的思想，这类问题常常可以迎刃而解.

**范例引导**

(2002年全国卷)设 $a$ 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的最小值.

【解析】(Ⅰ)若 $a=0$，$f(-x)=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数；

若 $a\neq 0$，$f(-x)$ 与 $f(x)$ 既不相等，也不互为相反数.

(Ⅱ)讨论法去掉绝对值符号，将函数化为分段函数再求各段函数的最小值.

【答案】(Ⅰ)若 $a=0$，$f(-x)=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数；

若 $a\neq 0$，$f(-x)=x^2+|-x-a|+1$

$=x^2+|x+a|+1$，

$f(x)=x^2+|x-a|+1$

则 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，故函数既不是奇函数也不是偶函数.

(Ⅱ)函数可化为下列分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+a+1=(x-\frac{1}{2})^2+a+\frac{3}{4},x\leqslant a\\ x^2+x-a+1=(x+\frac{1}{2})^2-a+\frac{3}{4},x>a\end{cases}$$

$x\leqslant a$ 时，

(1)当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=f(\frac{1}{2})=a+\frac{3}{4}$；

(2)当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=f(a)=a^2+1$.

$x>a$ 时，

(1)当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=f(a)=a^2+1$；

(2)当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=f(-\frac{1}{2})=-a+\frac{3}{4}$.

综上所述：$y_{\min}=\begin{cases}\frac{3}{4}-a,a\leqslant -\frac{1}{2}\\ a^2+1,-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}\\ a+\frac{3}{4},a>\frac{1}{2}\end{cases}$.

## 名师小结

(1)解绝对值问题的基本思想：

含绝对值命题$\xrightarrow{\text{化归}}$不含绝对值命题.

(2)去绝对值符号的方法：平方法($|x|<a \Leftrightarrow x^2<a^2$)，定义法($|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$)，公式法($|x|<a, a>0 \Leftrightarrow -a<x<a$).

(3)含绝对值的函数问题常常转化为分段函数来解(如范例)，再分别研究每一段函数的相关性质.

(4)含绝对值的不等式问题常常转化为分类讨论的情形来解，且注意与集合的交集、并集等知识结合.

## 误区点拨

(1)含绝对值的函数问题转化为分段函数来解时，容易忽略分段函数相应的定义域.

(2)解含绝对值的综合问题时要善于将分类讨论的思想与数形结合的思想有机地结合加以运用.

## 反馈训练

1. (2005年浙江卷)已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的图像关于原点对称，且$f(x)=x^2+2x$.
   (Ⅰ)求函数 $g(x)$的解析式；
   (Ⅱ)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$.
2. (2005年全国卷)设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$，求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$的 $x$ 的取值范围.
3. (2005 年江苏卷)已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2|x-a|$.
   (Ⅰ)当$a=2$时，求使 $f(x)=x$ 成立的 $x$ 的集合；
   (Ⅱ)求函数 $y=f(x)$在区间$[1,2]$上的最小值.
4. 设 $f(x)=|x+1|+|ax+1|$.
   (1)若 $f(-1)=f(1)$，$f(-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})$($a\in\mathbf{R}$且$a\neq 0$)，试求 $a$ 的值；
   (2)设 $a>0$，求 $f(x)$的最小值 $g(a)$关于 $a$ 的表达式.

## 参考答案

1.【解析】(Ⅰ)设函数 $y=f(x)$的图像上任意一点$Q(x_0,y_0)$关于原点的对称点为$P(x,y)$，则可得点$Q(x_0,y_0)$与点 $P(x,y)$的坐标之间的关系为 $x=-x_0$，$y=-y_0$.

而点 $Q(x_0,y_0)$在函数 $y=f(x)$的图像上，

可得$-y=x^2-2x$，即$y=-x^2+2x$，

故 $g(x)=-x^2+2x$.

(Ⅱ)由 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$，

可得 $2x^2-|x-1|\leqslant 0$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，此时不等式无解；

当 $x<1$ 时，$2x^2+x-1\leqslant 0$，解得$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

【答案】(Ⅰ)$g(x)=-x^2+2x$

(Ⅱ)原不等式的解集为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

2.【解析】$\because f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}\geqslant 2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$，即$|x+1|-|x-1|\geqslant\frac{3}{2}$.

当 $x\leqslant -1$ 时，原不等式化为：$-2\geqslant\frac{3}{2}$(舍)；

当$-1<x\leqslant 1$ 时，原不等式化为：$2x\geqslant\frac{3}{2}$

$\therefore x\geqslant\frac{3}{4}$.

$\therefore$此时，$\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1$；

当 $x>1$ 时，原不等式化为：$2\geqslant\frac{3}{2}$，

此时，$x>1$.

故原不等式的解集为$[\frac{3}{4},+\infty)$.

【答案】原不等式的解集为$[\frac{3}{4},+\infty)$

3.【解析】(Ⅰ)由题意，$f(x)=x^2|x-2|$，

当 $x<2$ 时，由 $f(x)=x^2(2-x)=x$，

解得 $x=0$ 或 $x=1$；

当 $x\geqslant 2$ 时，由 $f(x)=x^2(x-2)=x$，

解得 $x=1+\sqrt{2}$.

(Ⅱ)设此最小值为 $m$.

①当 $a\leqslant 1$ 时，在区间$[1,2]$上，

$f(x)=x^3-ax^2$，

因为 $f'(x)=3x^2-2ax=3x(x-\frac{2}{3}a)>0$，$x\in[1,2]$，

则 $f(x)$是区间$[1,2]$上的增函数，所以 $m=f(1)=1-a$.

②当 $1<a\leqslant 2$ 时，在区间$[1,2]$上，$f(x)=x^2|x-a|\geqslant 0$，由 $f(a)=0$ 知 $m=f(a)=0$.

③当 $a>2$ 时，在区间$[1,2]$上，

$f(x)=ax^2-x^3$，

$f'(x)=2ax-3x^2=3x(\frac{2}{3}a-x)$，

若 $a\geqslant 3$，在区间$(1,2)$上，$f'(x)>0$，则 $f(x)$是区

间$[1,2]$上的增函数，

所以 $m=f(1)=a-1$.

若 $2<a<3$，则 $1<\frac{2}{3}a<2$，

当 $1<x<\frac{2}{3}a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 是区间$[1,\frac{2}{3}a]$上的增函数，

当 $\frac{2}{3}a<x<2$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 是区间$[\frac{2}{3}a,2]$上的减函数，

因此当 $2<a<3$ 时，$m=f(1)=a-1$ 或 $m=f(2)=4(a-2)$.

当 $2<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，$4(a-2)\leqslant a-1$，

故 $m=f(2)=4(a-2)$，

当 $\frac{7}{3}<a<3$ 时，$4(a-2)>a-1$，

故 $m=f(1)=a-1$.

【答案】(Ⅰ)解集为$\{0,1,1+\sqrt{2}\}$

(Ⅱ)所求函数的最小值

$$m=\begin{cases}1-a & a\leqslant1\\0 & 1<a\leqslant2\\4(a-2) & 2<a\leqslant\frac{7}{3}\\a-1 & a>\frac{7}{3}\end{cases}$$

4.【解析】(1)$\because f(-1)=f(1)$，

$\therefore 2+|a+1|=|1-a|$，

两边平方并整理得$|a+1|=-(a+1)$，

$\therefore a\leqslant-1$. ①

又 $f(-\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})$，

$\therefore 2+|\frac{1}{a}+1|=|1-\frac{1}{a}|$.

两边平方并整理得$|\frac{1}{a}+1|=-(\frac{1}{a}+1)$，

$\therefore \frac{1}{a}+1\leqslant0$，即$\frac{a+1}{a}\leqslant0$， $\therefore -1\leqslant a<0$. ②

由①②联立得 $a=-1$.

(2)$f(x)$的图像是一条折线，它的最小值在图像的转折点处取得.

①当 $0<a<1$ 时，$-\frac{1}{a}<-1$，$f(x)=$

$$\begin{cases}-(1+a)x-2, & x<-\frac{1}{a},\\(a-1)x, & -\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant-1,\\(1+a)x+2, & x>-1,\end{cases}$$

$\therefore g(a)=\min\{f(-\frac{1}{a}),f(-1)\}$

$=\min\{-1+\frac{1}{a},1-a\}=1-a$.

②当 $a=1$ 时，$f(x)=2|x+1|\geqslant0$，

即 $g(a)=0$.

③当 $a>1$ 时，$-\frac{1}{a}>-1$，

$$f(x)=\begin{cases}-(1+a)x-2, & x<-1,\\(1-a)x, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{a},\\(1+a)x+2, & x>-\frac{1}{a},\end{cases}$$

$\therefore g(a)=\min\{f(-\frac{1}{a}),f(-1)\}$

$=\min\{-1+\frac{1}{a},1-a\}=-1+\frac{1}{a}$.

综上所述，$g(x)=\begin{cases}1-a,0<a\leqslant1,\\-1+\frac{1}{a},a>1.\end{cases}$

【答案】(1)$a=-1$ (2)$g(a)=\begin{cases}1-a,0<a\leqslant1,\\-1+\frac{1}{a},a>1.\end{cases}$

## 3. 用反证法证题的常见题型

反证法是从否定要证明的结论出发并以此为重要的“附加条件”，根据有关的定义、公理和给出命题的条件进行推理，直到得出矛盾，从而判定命题结论的否定不成立，即肯定命题结论. 作为中学数学中的必要解题方法，反证法有着广泛的运用，我们必须掌握此法.

### 范例引导

(2005年淮安卷)若 $a,b,c$ 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，求证：$a,b,c$ 中至少有一个大于0.

【解析】本题是一个“至多、至少”型命题，正面解答时难以说清楚，可采用反证法. 通过反设结论，即将

原来的结论否定，并作为重要条件，然后归谬、推理，找出矛盾，从而肯定命题结论. 本题中若设 $a,b,c$ 都不大于 0，即 $a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$，则有 $a+b+c\leqslant0$，如果从已知条件中能得到 $a+b+c>0$，就产生了矛盾.

【答案】假设 $a,b,c$ 都不大于 0，即 $a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$，则有 $a+b+c\leqslant0$，而 $a+b+c=(x^2-2y+\frac{\pi}{2})+(y^2-2z+\frac{\pi}{3})+(z^2-2x+\frac{\pi}{6})=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$；$\because \pi-3>0$ 且无论 $x,y,z$ 为何实数，恒有 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant0$，$\therefore$ $a+b+c>0$，这与 $a+b+c\leqslant0$ 矛盾，因此假设不成立，即 $a,b,c$ 中至少有一个大于 0.

## 名师小结

(1)反证法是正难则反的数学思想的重要体现，即从正面解答不好入手或比较麻烦，采用从反面入手，换一个角度去思考问题，这样可能有助于问题的解决.

(2)反证法一般的证题步骤为：①将原命题的结论否定；②利用结论的否定及其他已知条件进行正确的推理，找出矛盾；③给出正确的结论.

(3)寻找矛盾一般有三种情况：①与原命题中的已知条件矛盾；②与自身矛盾；③与另一个已知的真命题矛盾.

(4)适用反证法证题的常见题型：①"至多、至少"型命题；②惟一型命题；③否定型命题；④不等型命题；⑤存在型命题等.

## 误区点拨

(1)在反证法中是将原命题的结论否定，而不是原命题的否命题.

(2)反证法证题的关键是找出矛盾，没有矛盾出现，证题是不成功的，也是不正确的.

## 反馈训练

1. 设 $a,b\in(0,1)$ 且 $a^b=b^a$，求证：$a=b$.
2. 已知 $p,q$ 是奇数，求证：方程 $x^2+px+q=0$ 没有整数根.
3. 已知 $\alpha,\beta$ 都是锐角，且 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$，求证：$\alpha<\beta$.
4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e>1+\sqrt{2}$，左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，左准线为 $l$，能否在双曲线的左半支上找到一点 $P$，使 $|PF_1|$ 是 $P$ 到 $l$ 的距离 $d$ 与 $|PF_2|$ 的比例中项？请说明理由.

## 参考答案

1.【解析】此题是惟一型命题，应以否定惟一性为条件，得出反面结论，再用枚举法逐一否定各个反面结论，从而肯定结论.

【答案】假设 $a\neq b$，则 $a>b$ 或 $a<b$. 若 $a>b$，则由已知得 $b=a\log_a b$ $\therefore$ $\log_a b=\frac{b}{a}$ $\because$ $a,b\in(0,1)$ $\therefore$ 函数 $y=\log_a x$ 为减函数，又 $a>b$，故 $\log_a b>\log_a a=1$，而 $\frac{b}{a}<1$，$\therefore \log_a b>\frac{b}{a}$ 与 $\log_a b=\frac{b}{a}$ 矛盾；同理可证 $a<b$ 也不成立，故必有 $a=b$.

2.【解析】此题是否定型命题，通过否定给出命题，将原来的否定性命题转化为肯定命题，再加以利用，找出矛盾.

【答案】假设方程 $x^2+px+q=0$ 有整数根 $x_1,x_2$，则由根与系数的关系知 $p=-(x_1+x_2)$①，$q=x_1\cdot x_2$② $\because$ $q$ 为奇数，由等式②知 $x_1,x_2$ 均为奇数，$\therefore$ $x_1+x_2$ 为偶数，$\therefore$ $p$ 为偶数，这与条件 $p$ 为奇数矛盾，$\therefore$ 命题成立.

3.【解析】此题是不等型命题，可根据这个不等命题的否定得到另一个不等命题，再利用已知条件找出矛盾，使命题获证.

【答案】假设 $\alpha\geqslant\beta$. ①若 $\alpha=\beta$，则由已知条件知 $\sin2\alpha=2\sin\alpha$，即 $2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha$，故有 $\sin\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=1$，这都与 $\alpha$ 为锐角矛盾. ②若 $\alpha>\beta$，且 $\alpha,\beta$ 都为锐角，则 $1>\sin\alpha>\sin\beta>0$，$1>\cos\beta>\cos\alpha>0$，于是 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta<2\sin\alpha\cos\beta<2\sin\alpha$，这与 $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$ 矛盾. 综合有 $\alpha<\beta$ 成立.

4.【解析】此题是存在型命题，命题的结论是关于"存在"或"不存在"的，由"不存在"推出矛盾，可证"存在"，由"存在"推出矛盾可证"不存在".

【答案】假设在双曲线左半支上存在一点 $P$，使得 $|PF_1|^2=d\cdot|PF_2|$，则 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{|PF_1|}{d}=e$，$\therefore |PF_2|=e|PF_1|$，由双曲线定义知 $|PF_2|-|PF_1|=2a$，所以 $|PF_1|+2a=e|PF_1|$，即有 $|PF_1|=\frac{2a}{e-1}$，$|PF_2|=\frac{2ae}{e-1}$，而由三角形的性质及双曲线性质可得 $|PF_1|+|PF_2|\geqslant|F_1F_2|=2c$，即 $\frac{2a}{e-1}+\frac{2ae}{e-1}\geqslant2c$，而 $e=\frac{c}{a}$，化简得 $e^2-2e-1\leqslant0$，解之得 $1-\sqrt{2}\leqslant e\leqslant\sqrt{2}+1$. 又 $e>1$，所以 $1<e\leqslant\sqrt{2}+1$，这与已知 $e>1+\sqrt{2}$ 矛盾，故满足题意的 $P$ 点不存在.

# 4. 充要条件

充要条件是在现任高中数学教材中占重要地位的一个逻辑概念，它对培养学生严密的逻辑思维习惯，提高逻辑推理能力都有着十分重要的作用；充要条件通常涉及到概念的辨别问题，所以，对充要条件的考查，每年都是各省市高考数学命题的一个重点，同时也是考生最棘手的数学问题之一. 考虑到其抽象性，在高考中对充要条件的考查大多以选择题的形式给出. 若是以解答题形式出现，一般难度都较大.

## 范例引导

(2004 年湖南卷)设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是 ( )

(A)$m>-1,n<5$

(B)$m<-1,n<5$

(C)$m>-1,n>5$

(D)$m<-1,n>5$

【解析】本题涉及较多的数学符号和数学概念，先要一一弄清.

(1) $\complement_U B=\{(x,y)|x+y-n>0\}$；

(2)点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)\Leftrightarrow$点 $P$ 的坐标同时满足不等式 $2x-y+m>0$，$x+y-n>0\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2\times2-3+m>0\\2+3-n>0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1,n<5$.

【答案】A

## 名师小结

(1)充要条件的知识点包括 3 个方面的内容：假设用 $A$、$B$ 分别表示两个命题，①若 $A$ 成立可推得 $B$ 成立，即 $A\Rightarrow B$，则 $A$ 是 $B$ 的充分条件，$B$ 是 $A$ 的必要条件；②若 $A\Rightarrow B$，但 $B\nRightarrow A$，则 $A$ 是 $B$ 的充分不必要条件；③若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow A$，即 $A\Leftrightarrow B$，则 $A$ 是 $B$ 的充要条件.

(2)要证明 $A$ 是 $B$ 的充要条件，一定要证明两个结论，先要由 $A$ 成立推得 $B$ 成立——充分性，反之由 $B$ 成立还能推得 $A$ 成立——必要性.

(3)“$A\Leftrightarrow B$”说明命题 $A$ 与 $B$ 等价，对复杂命题常可利用等价号“$\Leftrightarrow$”来转换命题，如范例.

(4)做这类题要求考生数学基础知识要过硬.

## 误区点拨

(1)要防止以偏概全，在只回答“由 $A$ 推出 $B$”或“由 $B$ 推出 $A$”时就下结论“$A$ 是 $B$ 的充要条件”；

(2)一定要看清楚问题中要回答的是“$A$ 是 $B$ 的什么条件”还是“$B$ 是 $A$ 的什么条件”.

(3)要弄明白“$A\Rightarrow B$”的真正含义是“当 $A$ 成立时可推得 $B$ 成立”.

## 反馈训练

1. (2004 年天津卷)已知数列$\{a_n\}$，那么“对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，点 $P_n(n,a_n)$都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的 ( )

(A)必要不充分条件

(B)充分不必要条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

2. (2005 年江西卷)“$a=b$”是“直线 $y=x+2$ 与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=2$ 相切”的 ( )

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分又不必要条件

3. (2005 年天津卷)设 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为平面，$m$、$n$、$l$ 为直线，则$m\perp\beta$的一个充分条件是 ( )

(A)$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l,m\perp l$

(B)$\alpha\cap\gamma=m,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

(C)$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,m\perp\alpha$

(D)$n\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp\alpha$

4. (2005 年辽宁卷)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是函数 $f(x)$在点$x=x_0$ 处连续的 ( )

(A)充分不必要条件

(B)必要不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

## 参考答案

1. B 【解析】点 $P_n(n,a_n)$都在直线 $y=2x+1$ 上时必有 $a_n=2n+1$，从而数列$\{a_n\}$为等差数列；反之，数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_n$ 并不一定是 $2n+1$，点 $P_n$ 不一定在直线 $y=2x+1$ 上.

2. A 【解析】显然 $a=b$ 时，圆心 $(a,a)$ 到直线 $y=x+2$ 的距离为圆的半径，所以直线与圆相切；反之当直线与圆相切时，由圆心 $(a,b)$ 到直线 $y=x+2$ 的距离为半径 $\sqrt{2}$ 可得：$a=b$ 或 $a=b-4$.

3. D 【解析】本题将立体几何知识与充要条件联系起来，加之题中元素较多，更增加了题的难度，所以做这类题一定要相当的细心，由立体几何知识可得：只有 D 中条件可以推得 $m\perp\beta$.

4. B 【解析】由函数极限和函数的连续性知识有：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处极限存在并不一定连续，但函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续极限一定存在.