GAOZHONGSHUXUE GONGSHIDINGLI

高中数学

公式定理

主编◎李生滨

大连理工大学出版社

GAOZHONGSHUXUE GONGSHIDINGLI

高中数学公式定理

主编 李生滨

编者 赵俭秋 高铁柱
蔡鸿艳 陈凤瑞

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学公式定理 / 李生滨主编. —大连：大连理工大学出版社，2006.6
ISBN 7-5611-3220-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①数学—公式—高中—教学参考资料 ②数学—定律—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 060923 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023
电话：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84707961
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：105mm×190mm 印张：6.75 字数：176 千字
2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑：郭继涛 责任校对：文 心
封面设计：季 强

定 价：8.00 元

写在前面的话

在长期的教学实践中，我们深刻地体会到“题海”在强化同学们解题技巧的同时，也将学习方法“经验化”，解题技巧“模式化”。然而，这种做法不仅挫伤了同学们的学习兴趣，造成了高分低能的恶劣局面，更与新课程理念要求和广大家长的良好愿望相差甚远。为此，我们组织了部分教学一线的专家、学者，设计并编写了这套《高中数理化生公式定理》工具丛书，以帮助同学们深刻理解和掌握概念、规律的内涵，明确概念、规律之间的内在联系，在明晰各学科知识内涵以及知识拓展的同时，提升学习能力、解题能力。更方便同学们查阅相关知识，也为备考考生进行全面系统的复习节省大量时间。

本书特色

为了方便同学们查阅公式、定理、概念、规律，这套丛书设计了：概念精要、规律内容、理解拓展、相关链接等版块。具体内容和特色如下：

概念精要、规律内容：全面系统地介绍公式、定理、概念、规律，原汁原味。集学科公式、定理于一书，方便查找。

理解拓展：“概念规律的内涵”重点阐述概念、规律的意义，对概念、规律进行权威诠释，帮助同学们加深对概念、规律的理解。“概念规律的应用”以

例题的形式说明概念、规律在实际生活、生产中的应用，高效地建立知识和应用之间的桥梁，学以致用，符合素质教育的要求。“提示与点评”对知识点进行提示，对易错点进行点评，使同学们对知识的重点和难点的理解更加深刻。

相关链接：主要链接学科内知识，有意识地加强学科间知识和能力的迁移与渗透，培养同学们的综合能力，是课程改革和学习革命的出发点和归宿，也必然是学习和考试的热点。

本套丛书由数学、物理、化学、生物四个学科组成，本册图书是这套丛书的数学分册，既适合高一、高二学生学习使用，也适合高三学生总复习使用，是同学们书桌上的常备工具书。

同学们如果是在复习时使用此书，可以先在短时间内把已经梳理好的知识与概念、定理记住、理解，然后在理解与拓展版块中加以巩固和提高；如果是预习时使用，可先从相关链接栏目入手，然后带着问题去研究例题，最后再看定理规律。相信同学们会在本书里找到自己所需要的知识并有所提高。

在本书编写的过程中，参阅了大量的相关书籍，在此表示诚挚的谢意。但由于时间仓促，作者水平和经验有限，不当之处在所难免，望广大读者和教育界同仁给予批评指正。

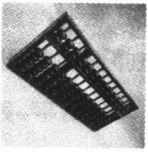
编　者

2006 年 5 月

一

二

三



目　录

一 集合与简易逻辑

1 集合的基本概念

知识定位

集合的初步知识与简易逻辑知识，是掌握和使用数学语言的基础，在学习函数及其他后续内容时，将得到充分的应用。

概念精要

1. 集合：集合是数学中的一个不定义的概念，某些指定的对象的全体就形成一个集合，也简称集。

2. 元素：集合中的每一个对象叫做这个集合的元素。

3. 有限集：含有有限个元素的集合叫有限集。

4. 无限集：含有无限个元素的集合叫无限集。

5. 空集：不含任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$。

6. 非负整数集(自然数集)：全体非负整数的集合简称为非负整数集或自然数集，记作 $\mathbf{N}$。

7. 正整数集：非负整数集中排除 0 的集合叫正整数集，表示为 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$。

8. 整数集：全体整数的集合通常简称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$。

9. 有理数集：全体有理数的集合通常简称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$。

10. 实数集：全体实数的集合通常称为实数集，记作 $\mathbf{R}$。

11. 点集：以点为元素的集合叫点集。

12. 元素和集合的关系：如果元素 a 是集合 A 的元素，就说元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说元素 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$(或 $a \overline{\in} A$)。

13. 子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就说集合 A 是集合 B 的子集。记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)，读作集合 A 包含于集合 B 或集合 B 包含

集合 A。

14. 真子集：对于集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$），如图1-1所示。

15. 两个集合相等：对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$。

16. 补集：设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集，记作 C_SA，如图 1-2 所示。

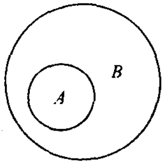


图 1-1

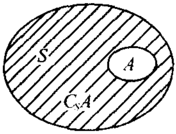


图 1-2

17. 全集：如果集合中含有所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看做一个全集，通常用 U 表示（有的参考书用 I 表示全集）。

18. 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$（读作"A 交 B"）。$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。如图 1-3 的阴影部分就表示 A 和 B 的交集。

19. 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$（读作"A 并 B"）。$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。如图 1-4 的阴影部分就表示 A 和 B 的并集。

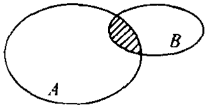


图 1-3

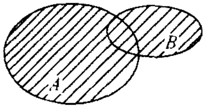


图 1-4

20. 偶数：形如 $2n(n \in \mathbf{Z})$ 的整数叫偶数。

21. 偶数集：全体偶数的集合简称偶数集。

22. 奇数：形如 $2n+1(n \in \mathbf{Z})$ 的整数叫奇数。

23. 奇数集：全体奇数的集合简称奇数集。

规律内容

1. 等幂律：$A \cap A = A, A \cup A = A$。

2. 同一律：$A \cap U = A, A \cup U = U$。

$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup \varnothing = A$。

3. 互补律：$A \cap C_U A = \varnothing, A \cup C_U A = U$。

$C_U(C_U A) = A, C_U U = \varnothing, C_U \varnothing = U$。

4. 交换律：$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$。

5. 结合律：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$。

6. 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

7. 吸收律：$A \cap (A \cup B) = A$。

$A \cup (A \cap B) = A$。

8. 反演律：(摩根律)

$C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B$。

$C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$。

9. card(A)：集合 A 中的元素个数记为 card(A)。如：集合 $A = \{a, b, c\}$，则 card$(A) = 3$。

10. 有限集元素个数的计算公式

(1) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

(2) $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$

理解拓展

概念的内涵

1. 集合中元素的特征

(1) 确定性　若 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有

一种且只有一种成立。

(2) 互异性　研究集合实质是研究集合中的元素，因此同一集合中不应出现相同的元素。

(3) 无序性　在集合中，不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一集合。

2. 集合的表示方法

(1) 列举法　把集合中的元素一一列举出来的方法叫做列举法。

(2) 描述法　用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合，即把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫做描述法。

(3) 图示法　画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合(表示集合的图也叫文氏图)。

3. 集合的分类

按元素的个数分为有限集，无限集。

4. 空集和集合的关系

空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集。

5. a 与{a} 的区别和联系

对于集合$\{a\}$来说，a是它的元素，集合$\{a\}$只有一个元素，是一个单元素集，a与$\{a\}$的关系是属于关系，即$a \in \{a\}$。

6. $\varnothing$ 与$\{\varnothing\}$ 的区别和联系

$\varnothing$ 是不含任何元素的集合。$\{\varnothing\}$ 是只含有一个元素 $\varnothing$ 的单元素集，虽然 $\varnothing$ 中没有元素，但作为集合来说，$\{\varnothing\}$ 是含有一个元素 $\varnothing$ 的集合，所以 $\varnothing \in \{\varnothing\}$。

其次，空集是任何集合的子集，所以 $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}$ 是非空集合，根据"空集是任何非空集合的真子集"，又可得出 $\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\}$。

由此可见，这里有着一个有趣现象：在 $\varnothing$ 和$\{\varnothing\}$之间，可用四个符号 $\in$，$\neq$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 中的任意一个把它们连结起来，但不能用等号"＝"连结。

7. $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别

"$\in$"符号是表示元素和集合之间的属于关系，如 $1 \in \mathbf{N}$，$-1 \notin \mathbf{N}$。

“$\subseteq$”符号表示集合与集合之间的关系，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则 $A\subseteq B$。

8. 重要关系

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$。

(1) 若 $A\subsetneqq B$，则 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$（见图 1-5）

(2) 若 $B\subsetneqq A$，则 $A\cap B=B$，$A\cup B=A$（见图 1-6）

(3) 若 $A=B$，则 $A\cap B=A=B$，$A\cup B=A=B$（见图 1-7）

(4) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneqq A\cap B\subsetneqq A$，$\varnothing\subsetneqq A\cap B\subsetneqq B$（见图 1-8）

(5) $A\cap B=\varnothing$（见图 1-9）

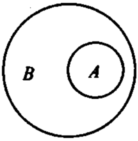


图 1-5

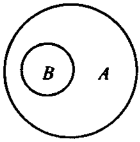


图 1-6

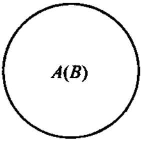


图 1-7

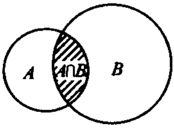


图 1-8

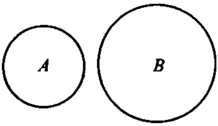


图 1-9

9. 子集的个数

若一个有限集有 n 个元素，则它共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集，2^n-2 个非空真子集。

概念的应用

例　已知 $A=\{x\mid x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围。

解 化简 $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，对于 A 分三种情况：

(1)$\Delta<0\Rightarrow a>1$，此时 $A=\varnothing$，满足 $A\subsetneqq B$

(2)$\Delta=0\Rightarrow a=1$，此时 $A=\{1\}$，满足 $A\subsetneqq B$

(3)$\Delta>0\Rightarrow a<1$，此时 $A=\{x\mid 1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$，不满足 $A\subsetneqq B$

综上可知 $a\geqslant 1$

提示与点评

·知识点提示

本节主要考查集合、子集、并集、交集、补集的意义，元素与集合、集合与集合的关系，考查有关术语及符号的使用。

·易错点点评

(1) 用描述法表示集合时，注意"代表元素"。

如集合 $A=\{x\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$

集合 $B=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$

集合 $C=\{(x,y)\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$ 是三个不同的集合。

2 含有绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

知识定位

初中已学习了一元一次不等式的解法，学习了一元二次方程及二次函数的知识，在此基础上研究含有绝对值的不等式与一元二次不等式的解法，是初中知识的延续，又为学习"不等式"等知识打下基础。

规律内容

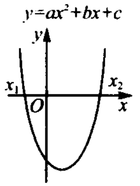
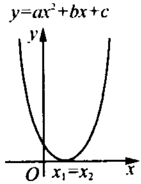
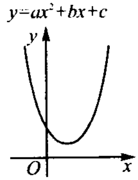
1. 含有绝对值的不等式的解法

$|x|<a(a>0)$ 的解集是：$\{x\mid -a<x<a\}$；

$|x|>a(a>0)$ 的解集是：$\{x\mid x>a$ 或 $x<-a\}$。

2. 一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集如下表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

理解拓展

概念的内涵

1. 对形如 $|x-a|+|x-b|<c$ 或 $|x-a|-|x-b|>c$ 的不等式，它们分别表示数轴上点 x 到 a、b 点的距离之和或距离之差小于或大于某个数，因而利用不等式的几何意义去解不等式，更为直观简捷。

2. 解一元二次不等式的步骤

(1) 一看：看二次项的符号，如果是负号，可两边同时乘以 -1 变为正号，但不等号方向改变；

(2) 二算：计算判别式，判断相应一元二次方程根的情况，如有根，把根写出；

(3) 三写：写出不等式的解集。

3. 形如 $(ax+b)(cx+d)>0$ 的一元二次不等式，可以转化为一元一次不等式组 $\begin{cases}ax+b>0\\cx+d>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax+b<0\\c+d<0\end{cases}$ 去求解。

4. 不等式 $\frac{ax+b}{cx+d}>0$（或 <0）等价于不等式 $(ax+b)(cx+d)>0$（或 <0）

概念的应用

例 设集合$M=\{x \mid 0\leqslant x<2\}$，集合$N=\{x \mid x^2-2x-3<0\}$，集合$M\cap N$等于( )。

A. $\{x \mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x \mid 0\leqslant x<2\}$

C. $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

解 由$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$，

得$N=\{x \mid -1<x<3\}$，则$M\subseteq N$

$\therefore M\cap N=M$

答案 B。

提示与点评

·知识点提示

考查绝对值不等式及一元二次不等式的解法，同时考查一元二次方程、一元二次不等式及二次函数知识的相互转化。

·易错点点评

解一元二次不等式时，一定要注意到：二次项系数$a>0$与$a<0$解集是完全不同的，当$a<0$时，首先要转化成二次项系数大于0后再求其解集，避免出现错误。

相关链接

一元二次不等式与二次函数、一元二次方程有密切联系，还可以从多项式的角度来统一认识。

ax^2+bx+c是二次三项式，其中系数a、b、c都是实数，且$a\neq 0$，设$\Delta=b^2-4ac$。

利用二次函数及其图象的有关知识，可以得到下列判定定理：

(1) 如果$\Delta<0$，那么二次三项式的值与a同号；

(2) 如果$\Delta=0$，那么当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，二次三项式的值为0；当$x\neq-\dfrac{b}{2a}$时，二次三项式的值与a同号；

(3) 如果$\Delta>0$，且$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$，那