第1课　集合的含义及其表示

飞天杖

"蓝蓝的天上白云飘，白云下面马儿跑……"，悠扬的歌声中就有我们将要学习的集合．

物以类聚，人以群分．人群、马群、牛群等都是"同一类对象汇集在一起"，它们都形成集合．

精华地

1. 集合的含义

（1）一定范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个集合．集合中的每一个对象称为该集合的元素．

（2）集合中的元素和集合的关系：集合中的元素与集合的关系是个体与整体的关系．a 是集合 A 的元素，称 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；a 不是集合 A 的元素，称 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$．

2. 集合中元素的三个属性

（1）确定性：由集合的含义知，集合中的元素是"确定的"．对某一集合 A 而言，某一元素 a 是否属于集合 A 是确定的，a 要么是集合 A 的元素，要么不是，即 $a\in A$ 和 $a\notin A$，二者必居其一．

（2）互异性：由集合的含义知，集合中的元素是"不同的"．

（3）无序性：集合的元素没有顺序．如集合$\{1,2\}$与$\{2,1\}$是相同的集合．

3. 常用集合的表示

自然数集合记作 $\mathbf{N}$，正整数集合记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$，整数集合记作 $\mathbf{Z}$，有理数集合记作 $\mathbf{Q}$，实数集合记作 $\mathbf{R}$，空集（不含任何元素的集合）记作$\varnothing$．

4. 集合的表示方法

（1）列举法：将集合的所有元素都一一列举出来，写在花括号"$\{\}$"内，元素与元素之间要用逗号分隔，但列举时与元素的顺序无关；

（2）描述法：将集合的所有元素都具有的性质表示出来，写成$\{x\mid p(x)\}$的形式，其中 $p(x)$表示集合的所有元素都具有的性质．

（3）图示法：即用文恩图表示集合：画一条封闭曲线（如：矩形、圆、椭圆等），用它的内部来表示一个集合，该集合的所有元素都在这个封

（1）自然数集合与非负整数集合是相同的集合，也就是说自然数集合包含0；（2）自然数集合内排除0的集合表示成 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$，其他数集（如整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$）内排除0的集合，也可类似表示 $\mathbf{Z}^*$，$\mathbf{Q}^*$，$\mathbf{R}_+$．

方程 $x^2-2x+1=0$ 的两个解是 $x_1=x_2=1$，解的集合是$\{1\}$，不能写成$\{1,1\}$．

举例　$0\in\mathbf{N}$，但$0\notin\mathbf{N}^*$．

列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法．要注意，一般无限集，不宜采用列举法，因为不能将无限集中的元素一一列举出来，而没有列举出来的元素往往难以确定．

只含有一个元素的集合常称为单元素集.

不含任何元素的集合叫做空集,记作$\varnothing$. 空集是个特殊的集合,除了它本身的实际意义外,在研究集合、集合的运算时,必须予以单独考虑.

闭曲线内.

5. 集合的分类

含有有限个元素的集合称为有限集. 若一个集合不是有限集,就称这个集合为无限集.

6. 辩证理解集合和元素这两个概念

(1) 集合和元素是两个不同的概念,符号"$\in$"和"$\notin$"是表示元素和集合之间关系的,不能用来表示集合之间的关系. 例如$\{1\}\in\{1,2,3\}$的写法就是错误的,而$\{1\}\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$的写法就是正确的.

(2) 一些对象一旦组成了集合,那么这个集合的元素就是这些对象的全体,而非个别现象. 例如对于集合$\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\}$,就是指所有不小于0的实数,而不是指"$x$可以在不小于0的实数范围内取值",不是指"$x$是不小于0的一个实数或某些实数",也不是指"$x$是不小于0的任一实数值"……

(3) 集合具有两方面的意义,即:凡是符合条件的对象都是它的元素;只要是它的元素就必须符合条件.

破釜吧

解决集合问题,首先要弄清楚集合中的元素是什么. 集合中元素的互异性是研究集合问题的前提,从例1可以看到它的重要性.

例1 已知集合$A=\{1,a,a^2\}$,求a的取值集合.

解 由集合中元素的互异性知,a需满足的条件为

$$\begin{cases}a\neq 1,\\ a^2\neq 1,\text{解得 } a\neq\pm 1,\text{且 } a\neq 0,\\ a^2\neq a.\end{cases}$$

故a的取值集合为$\{a\mid a\neq\pm 1,\text{且 } a\neq 0\}$.

评 集合中元素的互异性表明,一个集合中的任何两个元素都不相等,这常常是限制集合中元素取值范围的依据.

例2 已知集合$A=\left\{x\left|\frac{6}{6-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\right.\right\}$,用列举法表示集合$A$.

析 这里对x的要求有两个:一是$x\in\mathbf{N}$,二是$(6-x)$是6的约数.

解 由题意,$6-x$可取1,2,3,6,相应的x依次为5,4,3,0,所以$A=\{5,4,3,0\}$.

评 同一个集合可以用不同的方法表示. 换一种方法表示集合常常可以使集合的表示更加简单,或使我们可以更容易看清集合的本质.

魔法石

1 已知下列四个集合：$E=\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$F=\{x|x^2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$G=\{a||a|\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$，$H=\{a|(a-1)^2+(a-2)^2=0,a\in\mathbf{R}\}$，其中空集的个数为 （　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2 下列对象不能构成集合的是 （　）

A. 中国的小河流　B. 所有的正方形

C. 1～20以内的所有质数　D. 方程 $x^2+2x+3=0$ 的所有实数根

3 下列说法正确的是 （　）

① 若 $x\in\mathbf{N}$，则 $x\in\mathbf{N}^*$；　② 若 $x\in\mathbf{N}$，则 $x\in\mathbf{Z}$；

③ 若 $x\notin\mathbf{Q}$，则 $x\notin\mathbf{R}$；　④ 若 $x\in\mathbf{N}$，则方程 $3x=2$ 无解.

A. ①③　B. ②③　C. ②④　D. ①④

4 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空

(1)设 A 为所有亚洲国家组成的集合，则

中国_______A，美国_______A，日本_______A，印度_______A；

(2)若集合 $A=\{x|x^2=x\}$，则 0_______A；

(3)若集合 $B=\{x|1\leqslant x<10\}$，则 3_______B，10_______B；

(4)若集合 $C=\{x\in N|1\leqslant x<10\}$，则 2.5_______$C$，9_______$C$.

5 集合 $\{(x,y)|x+y=2,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ 用列举法可表示为

________________________________.

6 设集合 $A=\{x|x^2-mx-2m=0\}$，若 $2\in A$，试求实数 m 的值，并用列举法表示集合 A.

7 设集合 $A=\{x|x^2+(m-1)x+n=0\}$，若 $A=\{2\}$，求 m,n 的值.

自我提升 1. 一元二次方程 $x^2+ax+3=0$ 的解集是单元素集，求 a 的值.

答案：$a=\pm2\sqrt{3}$.

2. 数集 A 满足条件，若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq1)$.

(1) 若 $2\in A$，试求出 A 中其他所有元素；

(2) 自己设计一个数属于 A，然后求出 A 中其他所有元素；

(3) 从上面两小题的解答过程中，你能悟出什么道理？并大胆证明你发现的这个"道理".

参考答案：

(1) 其他所有元素为 -1，$\frac{1}{2}$.　(2) 略.

(3) A 中只能有3个元素，它们分别是 a，$\frac{1}{1-a}$，$\frac{a-1}{a}$，且三个数的乘积为 -1.

8 指出下列四个集合的区别：

① $\{x\in \mathbf{R}\mid y=\sqrt{x}\}$；　② $\{y\in \mathbf{R}\mid y=\sqrt{x}\}$；

③ $\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$；　④ $\{y=\sqrt{x}\}$.

第2课　子集、全集、补集

飞天杖

记集合 $A=\{x\mid x$ 为高一(1)班同学$\}$，$B=\{x\mid x$ 为高一(1)班的男同学$\}$，$C=\{x\mid x$ 为高一(1)班的女同学$\}$. 这三个集合有什么关系？

精华地

1. 子集

集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，其含义是 $x\in A\Rightarrow x\in B$. 规定：$\varnothing\subseteq A$，即空集是任何集合的子集.

当且仅当 $A=B$ 时，$A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 同时成立.

2. 真子集

(1) 集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$，其含义是 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$. 也就是说，集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，但集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中.

(2) 由子集和真子集的定义可知：空集是任何非空集合的真子集.

3. 补集

设 $A\subseteq S$，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 在 S 中的补集，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$.

由补集的定义可知，$\complement_S(\complement_S A)=A$.

4. 全集

若集合 S 包含我们所要研究的各个集合，则 S 可以看做一个全集，全集通常用 U 表示. 显然，我们所要研究的各个集合中的每一个元素都属于全集.

(2004年高考江苏卷第1题改编)设集合 $P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{x\mid |x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$，则 P 与 Q 的公共元素组成的集合是　(　　)

A. $\{1,2\}$

B. $\{3,4\}$

C. $\{1\}$

D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

答案：A.

在“飞天杖”中，集合 A 可以看做全集，$\complement_A B=C$，$\complement_A C=B$.

符号运用要正确：“$\in$”和“$\notin$”只能用于表示元素与集合的关系，不能用来表示集合与集合的关系；“$\subseteq$”和“$\supseteq$”只能用来表示集合与集合的关系.

1. 每一个集合都是它自己的子集，但不是自己的真子集.
2. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(2000高考北京春，2)设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,b,c\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $\complement_I M\cap\complement_I N$ 是　(　　)

A. $\varnothing$　B. $\{d\}$

C. $\{a,c\}$　D. $\{b,e\}$

解：$\because \complement_I M=\{d,e\}$，$\complement_I N=\{a,c\}$，$\therefore \complement_I M\cap\complement_I N=\varnothing$. 故选 A.

破釜吧

例 1 写出集合$\{1,2,3\}$的所有真子集.

析 集合$\{1,2,3\}$的真子集中的元素个数可以是 0，1，2，以此为标准，可以将$\{1,2,3\}$的子集分为三类，逐类写出即可.

解 集合$\{1,2,3\}$的所有真子集为：$\varnothing$；$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$.

评 在写集合的子集和真子集时，要按一定的标准进行分类，按一定的顺序写子集，可以做到不重、不漏.

例 2 已知集合$A=\{x|2x+1<0\}$，$B=\{x|4x-m<0\}$，若$A\subseteq B$，求实数m的取值范围.

析 先将集合 A 和 B 化简，然后将集合 A 在数轴上表示出来，再根据$A\subseteq B$确定$\frac{m}{4}$在数轴上允许的范围.

解 $A=\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x<\frac{m}{4}\right\}$. $\because A\subseteq B$，$\therefore \frac{m}{4}\geqslant-\frac{1}{2}$，

$\therefore m\geqslant-2$，即实数m的取值范围为$\{m|m\geqslant-2\}$.

评 借助数轴，通过数形结合解题，是一种重要的数学思想方法.

例 3 设全集$U=\{2,3,x^2+2x-3\}$，$A=\{|x+1|,2\}$，若$\complement_U A=\{5\}$，求实数x的取值集合.

析 根据条件可知，$A\subseteq U$，且$5\in U$.

解 由条件得$\begin{cases}x^2+2x-3=5,\\|x+1|=3,\end{cases}$解得$x=-4$或$x=2$. 所以$x$的取值集合为$\{-4,2\}$.

评 要深刻理解数学符号的含义，避免顾此失彼.

> **百变题** 若将例 2 中的 A 改为$A=\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$，则$m$的取值范围应为$\{m|m>-2\}$. 解决这类问题，要特别注意取值范围的"端点".

魔法石

1 若集合$S=\{x|2x-1>0\}$，$A=\{x|3x-6\geqslant0\}$，则$\complement_S A$等于 （　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{x|x\leqslant2\}$

C. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x\leqslant2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<2\right\}$

2 已知集合$A=\{x|x=3m,m\in N\}$，$B=\{x|x=6n,n\in N\}$，则 A 与 B 的关系为 （　　）

A. $A\subsetneqq B$　B. $B\subsetneqq A$　C. $A=B$　D. $B\in A$

3 已知U为全集，集合$N\subseteq M$，则 (　　)

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$　　B. $M\subseteq\complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$　　D. $M\supseteq\complement_U N$

4 用适当的符号填空：

(1) a ____ $\{a, b\}$；　　(2) $\{a\}$ ____ $\{a, b\}$；

(3) $\{1, 2, 3, 4\}$ ____ $\{1, 3\}$；　　(4) 0 ____ $\varnothing$；

(5) $\{x|x>0\}$ ____ $\{y|y=x^2-2x+2\}$.

5 将数集**N**,**N***,**R**,**Q**,**Z**用符号“$\subsetneqq$”连结起来：

____.

6 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|0<x-1\leqslant 5\}$，求$\complement_U A$.

7 若集合$A=\{x|-3<x<5\}$与$B=\{x|a-2<x<a\}$满足$B\subseteq A$，求实数a的取值集合.

8 在平面直角坐标系中，集合$C=\{(x,y)|y=x\}$表示直线$y=x$，从这个角度看，集合$D=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}2x-y=1\\x+4y=5\end{cases}\right.\right\}$表示什么？集合$C$,$D$之间有什么关系？

第3课　交集、并集

飞天杖

点金needle 利用Venn图，可使交集与并集的性质一目了然。

高一(1)班全体同学参加了语文、数学两门学科的测验，各学科的满分都是150分. 记集合$A=\{x|x$为语文成绩不低于120分者$\}$，$B=\{x|x$为数学成绩不低于120分者$\}$，$C=\{x|x$为语文、数学成绩都不

低于 120 分者$\}$，$D=\{x \mid x$ 为语文、数学成绩至少有一门不低于 120 分者$\}$，你能用 Venn 图表示这四个集合的关系吗？

精华地

1. 交集

(1) 定义：$A\cap B=\{x \mid x\in A$，且 $x\in B\}$；

(2) 性质：① $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$，$A\cap \complement_U A=\varnothing$；

② $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

③ $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

2. 并集

(1) 定义：$A\cup B=\{x \mid x\in A$，或 $x\in B\}$；

(2) 性质：① $A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$，$A\cup \complement_U A=U$；

② $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；

③ $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

交集与并集的定义仅一字之差；交集与并集符号的“开口”方向不同.

破釜吧

例 1 设集合 $A=\{x \mid x>0\}$，$B=\{x \mid -2<x\leqslant 1\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

析 将 A 和 B 表示在数轴上，重叠部分就是 $A\cap B$，有阴影的部分就是 $A\cup B$.

解 $A\cap B=\{x \mid x>0\}\cap\{x \mid -2<x\leqslant 1\}=\{x \mid 0<x\leqslant 1\}$，$A\cup B=\{x \mid x>0\}\cup\{x \mid -2<x\leqslant 1\}=\{x \mid x>-2\}$.

评 求不等式解集的交集或并集时，借助数轴，数形结合是最佳方案.

在数轴上表示集合时，开区间的端点应该用空心点表示，闭区间的端点应该用实心点表示，以免出错.

(2002 高考北京卷，1)满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

解：因为 $M\subseteq\{1,2,3\}$，因此 M 必为集合 $\{1,2,3\}$ 的子集，同时含元素 2，3，故选 C.

例 2 设集合 $A=\{(x,y) \mid y=-4x+6\}$，$B=\{(x,y) \mid y=5x-3\}$，求 $A\cap B$.

析 集合 A 是一次函数 $y=-4x+6$ 图象上的所有点形成的集合，B 是一次函数 $y=5x-3$ 图象上的所有点形成的集合，求 $A\cap B$，关键是求出两个图象的交点坐标.

解 由 $\begin{cases} y=-4x+6, \\ y=5x+3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ $\therefore A\cap B=\{(1,2)\}$.

评 弄清集合的意义是解决集合问题的前提.

在本例题的结论中可以发现：$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$. 利用 Venn 图可以看出：这个结论对所有的集合都成立. 这个结论称为摩根定律.

例 3 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{1,4\}$，求：

(1) $\complement_U(A\cup B)$ 与 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

(2) $\complement_U(A\cap B)$ 与 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

注意书写的规范性：$(\complement_U A)\cup B$ 与 $\complement_U(A\cup B)$ 意义不同，要避免“$\complement_U A\cup B$”这种不规范的写法.

析 用 Venn 图将题中的集合表示出来，借助图示就可顺利解决问题.

解 (1) 由题意，$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{6\}$.

$\complement_U A=\{4,6\}$，$\complement_U B=\{2, 3, 5, 6\}$，$\therefore (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6\}$.

(2) 由题意，$A\cap B=\{1\}$，$\therefore \complement_U(A\cap B)=\{2, 3, 4, 5, 6\}$，

由(1)得$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

评 有限集的交集、并集、补集问题，借助 Venn 图常是最佳方案.

魔法石

如果全集 $U=\{a, b, c, d, e\}$，$M=\{a, c, d\}$，$N=\{b, d, e\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$ （ ）

A. $\{a, c\}$ B. $\{b, e\}$ C. $\varnothing$ D. $\{a\}$

集合 $A=\{x|x\neq 0\}\cup\{y|y\neq 3\}$，集合 $B=\{x|x<0$ 或 $0<x<3$ 或 $x>3\}$，则 A 与 B 的关系是 （ ）

A. $A\supsetneqq B$ B. $A=B$

C. $A\subsetneqq B$ D. 以上答案都不正确

下列四个命题，不正确的是 （ ）

A. 若 $A\cup B=U$，则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$

B. 若 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$

C. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$

D. 若 $A\cap B=\varnothing$，则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=U$

已知集合 $A=\{x|ax=1, a\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{\frac{1}{3}\right\}$，且 $A\subseteq B$，则由 a 的所有值组成的集合是__________.

已知 $A\cap\{-2,1,0\}=\{0, 1\}$，$A\cup\{-2, 0, 1\}=\{-2, 0, 1, 2\}$，则集合 A 是____________________________.

已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 4\}$. 求 $A\cap B$ 和 $\complement_U(A\cup B)$.

7 已知集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a^2+1, 2a-1, a-3\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

8 设集合 $A=\{x\mid(x-3)(x-a)=0\}$，$B=\{x\mid(x-3)(x-1)=0\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

第4课 本章复习

精华地

一、学习目标

1. 知识与技能

(1) 了解集合的含义，体会元素与集合的属于关系，掌握集合的三种表示方法；

(2) 理解集合间包含与相等的含义，能识别或写出给定集合的子集；

(3) 了解全集、空集的含义，理解补集的含义，会求补集；

(4) 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个集合的并集与交集.

2. 过程与方法

(1) 学会用集合语言表示数学对象；

(2) 体会并初步掌握数形结合、分类讨论等数学思想方法；

(3) 在观察、分析、抽象、类比得到集合与集合间的关系等数学知识的过程中，培养思维能力.

3. 情感、态度与价值观

(1) 感受运用集合语言表达数学对象时的简洁和准确，体会数学的简洁美；

(2) 体会数学的文化价值，提高数学素养.

点金手 集合知识作为整个高中数学的基础，在高考中重点考查的是集合的化简以及集合的交、并、补的运算.

3+X站台 1. (2002 全国文 6，理 5) 设集合 $M=\left\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 ( )

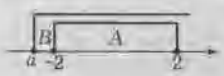
A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

解：集合 M 的元素为 $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}(k\in\mathbf{Z})$，集合 N 的元素为 $x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}(k\in\mathbf{Z})$，而 $2k+1$ 为奇数，$k+2$ 为整数，因此 $M\subsetneqq N$. 故选 B.

2. (2003 上海春，5) 已知集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是________.

解：∵ $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，又 $A\subseteq B$，利用数轴上覆盖关系(如下图)：



因此有 $a\leqslant -2$.

二、主要解题方法与规律

1. 解决集合问题，首先弄清楚集合中的元素是什么.

2. 对所给的集合进行尽可能的化简.

3. 养成运用 Venn 图或数轴来直观地表示集合，寻找集合与集合之间的关系的习惯.

4. 注意空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集.

5. 重视利用下列知识对问题进行等价转化：

$A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

6. 对集合的考查：一方面是考查对集合概念的认识和理解水平，主要表现在对集合的识别和表达上，如对集合中涉及的特定字母和符号，元素与集合间的关系，集合与集合间的比较；另一方面，则是考查学生对集合知识的应用水平，如求方程组、不等式组及联立条件组的解集，以及设计、使用集合解决问题等.

(1) 有关子集的几个等价关系

① $A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$；　② $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；

③ $A\subseteq B\Leftrightarrow \complement_U A\supseteq \complement_U B$；　④ $A\cap \complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B$；

⑤ $\complement_U A\cup B=U\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(2) 交、并集运算的性质

① $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；

② $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$；

③ $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap \complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup \complement_U B$.

(3) 有限子集的个数：设集合 A 的元素个数是 n，则 A 有 2^n 个子集，2^n-1 个非空子集.

破釜吧

例 1　已知集合 $A=[1,\ 4)$，$B=(-\infty,\ a)$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

析　根据本题集合 A 与 B 的特点可知，若 $A\subseteq B$，则 $A\subsetneqq B$.

解　由题意得 $a\geqslant 4$，即实数 a 的取值范围为 $[4,\ +\infty)$.

评　根据集合间的关系求字母的取值范围，要特别注意区间的端点.

例 2　已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，集合 A、B 满足下列三个条件：

①$A\cup B=U$；　②$A\cap B\neq\varnothing$；　③$A\cap \complement_U B=\{1,\ 2,\ 3\}$. 写出 A、B.

析　由③知 1，2，3 都属于 A，且 1，2，3 都不属于 B，结合②可知 A 中至少有 4 个元素. 由此画出 Venn 图，就可使问题顺利解决.

解　符合条件的集合 A，B 有以下三种：

(1) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{4,5\}$；

(2) $A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,5\}$；

(3) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5\}$.

评　解题时，应首先利用能推出简明结论的条件.

例 3　设集合 $A=\{-3,4\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0\}$，若 $B\neq\varnothing$，且 $A\cap B=B$，求 a，b 的值.

析　$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$，由于 $B\neq\varnothing$，所以 B 有三种可能：

① $B=\{-3\}$；② $B=\{4\}$；③ $B=\{-3,4\}$，应分三种情况讨论.

解　$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

① 当 $B=\{-3\}$ 时，$\begin{cases}(-3)^2-2a(-3)+b=0,\\ \Delta=(-2a)^2-4b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=9;\end{cases}$

② 当 $B=\{4\}$ 时，$\begin{cases}4^2-2a\times4+b=0,\\ \Delta=(-2a)^2-4b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=16;\end{cases}$

③ 当 $B=\{-3,4\}$ 时，$\begin{cases}(-3)^2-2a(-3)+b=0,\\ 4^2-2a\times4+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-12.\end{cases}$

综上所述，所求的 a，b 的值为 $\begin{cases}a=-3,\\ b=9,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\ b=16,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-12.\end{cases}$

评　根据条件进行分类讨论，关键是正确理解题意，确定分类的标准.

集林　盲目认为 -3 和 4 都是方程 $x^2-2ax+b=0$ 的根，这是解此题时常犯的错误！

魔法石

1　已知集合 $A=\{y\mid y=-x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 等于　（　　）

A. $\{(0,2),(1,1)\}$　　B. $\{y\mid y\leqslant2\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $(0,2),(1,1)$

2　设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid x\geqslant2\}$，$N=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$，则 $\complement_U(M\cap N)$ 是　（　　）

A. $\{x\mid 2\leqslant x<5\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant5\}$

C. $\{x\mid x<2\}$　　D. $\{x\mid x<2$ 或 $x\geqslant5\}$

若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有 （ ）

A. $A\subseteq C$ B. $C\subseteq A$ C. $A\neq C$ D. $A=\varnothing$

已知集合 $A=\{0, 1, a\}$，$B=\{0, a^2\}$，若 $A\cup B=A$，则 a 的值是____.

满足 $\{1, 3\}\cup A=\{1, 3, 5\}$ 的所有集合 A 为____________.

已知集合 $A=\{x|x^2=1\}$，$B=\{x|ax=13\}$. 若 $A\cap B=B$，求实数 a 的值.

已知 $A=\{x|2x^2+px+2=0\}$，$B=\{x|x^2+3x+2p=0\}$，若 $A\cup B=\left\{2, \frac{1}{2}, -5\right\}$，求集合 A 和 B.

某海关调查了 100 名携带药品出国的旅游者，其中 75 人带有感冒药，80 人带有胃药. 问：既带感冒药又带胃药的旅游者最少有多少人？

第1课 函数的概念与定义域

飞天杖

$y=2x+1(1<x<3)$，$y=2$，$x=8$，它们是函数吗？函数的概念是什么？怎样的式子可以表示函数？

精华地

1. 函数的定义

(1) 由定义可以看出，函数就像是一台加工数字的机床，给一个一定范围内的数字就生产出一个相应的数字——单位对应；

(2) 函数的定义中注意：A、B 必须是非空数集；抓住定义中的"每一个"、"都有惟一"关键词；

(3) 函数的定义域可以理解为 x 的取值组成的集合.

2. $y=f(x)$表示函数，而 $f(a)$ (a 是常数)表示当 $x=a$ 时，$y=f(x)$的函数值.

3. 由于我们在初中已学习了函数的变量观点下的定义，并具体研究了几类最简单的函数，对函数并不陌生，所以在高中重新定义函数时，重要的是认识到它的优越性，它从根本上揭示了函数的本质，由定义域、值域、对应法则三要素构成的整体，能主动将函数与函数解析式区分开来. 对这一点的认识对于后面函数的性质的研究都有很大的帮助.

破釜吧

例 1 下列对应是不是从 A 到 B 的函数?

(1) $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 6\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 3\}$，

① $x\to y=\frac{1}{2}x$； ② $x\to y=\frac{1}{3}x$； ③$x\to y=x$；

(2) $A=\mathbf{R}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$， $x\to y=|x|$；

(3) $A=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$，$B=\mathbf{R}$，$x\to y=\pm\sqrt{x}$.

析 解本题的关键是抓住函数的定义，在定义的基础上输入一些数字进行验证，当不是函数时，至少要列举出一个 A 集合中不满足定义的 x.

解 (1) ①对于输入集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都存在$\frac{x}{2}$

被 x 惟一确定，所以①表示一个函数；② 对于输入集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都存在 $\frac{x}{3}$ 被 x 惟一确定，所以②表示一个函数；③ 考虑当输入的值大于 3(比如 6)时，此时不能在 B 中找到相应的数(相应的值为 6)，因此③不是函数；

(2) 考虑当输入的值为 0 时，y 由 $y=|x|$ 给出得到 $y=0$，而 $0\notin B$，所以(2)不表示函数；

(3) 当输入一个大于 0 的值(比如 9)时，此时由 $y=\pm\sqrt{x}$，得到两个值($y=3$ 和 $y=-3$)，不满足函数的定义，因此也不表示函数.

评 解此类问题主要抓住函数定义中的"每一个"、"都有惟一"两个要点. 一般先看是不是对于数集 A 中的每一个 x 对表达式都有意义，再看表达式会不会输出两个或两个以上的值，第三步看输出的 y 的范围看是否是数集 B 的子集.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}-1$；　　(2) $f(x)=\dfrac{3}{|x+1|-2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$；

(5) $f(x)=\sqrt{|x-2|+3}+\dfrac{8}{\sqrt[3]{3x+12}}$.

提示 函数的定义域一般情况下有三种类型：①给定解析式，根据解析式求使得各部分都有意义的取值的集合；②由已知函数的定义域求与之有关的函数的定义域；③应用题中函数的定义域，是满足题意并且符合实际意义的 x 的取值的集合.

解 (1) 要使 $f(x)=\sqrt{4-x^2}-1$ 有意义，必须 $4-x^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，∴函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}-1$ 的定义域为 $[-2,2]$.

(2) 要使 $f(x)=\dfrac{3}{|x+1|-2}$ 有意义，必须 $|x+1|-2\neq 0$，即 $x\neq -3$，且 $x\neq 1$，∴函数 $f(x)=\dfrac{3}{|x+1|-2}$ 的定义域为 $\{x|x\neq -3$，且 $x\neq 1\}$.

(3) 要使 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 有意义，必须有 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{x}\neq 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 解之得 $x\neq -1$，且 $x\neq 0$.

则函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq -1$，且 $x\neq 0\}$.

警示 求函数定义域，不能先化简函数表达式，应先求函数的定义域，再化简函数的表达式，否则容易出错. 比如求(3)时，先化简得到 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，此时求得的定义域为 $\{x|x\neq -1\}$，显然是错误的.

(4) 当 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\ |x|-x>0\end{cases}$ 时，$f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 有意义，即 $\{x|x<-1$ 或 $-1<x<0\}$ 是函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域；

(5) $f(x)=\sqrt{|x-2|+3}+\frac{8}{\sqrt[3]{3x+12}}$ 有意义的条件是

$\begin{cases}|x-2|+3\geq 0,\\3x+12\neq 0,\end{cases}$ 即得 $\{x|x\neq -4\}$ 是 $f(x)=\sqrt{|x-2|+3}+\frac{8}{\sqrt[3]{3x+12}}$ 函数的定义域.

评　求函数 $y=f(x)$ 的定义域时，目前有以下几种情况：

① 如果 $f(x)$ 是整式，那么函数的定义域是实数集 **R**；

② 如果 $f(x)$ 是分式，那么函数的定义域是使分母不等于零的实数的集合；

③ 如果 $f(x)$ 为二次根式，那么函数的定义域是使根号内的式子大于或等于 0 的实数的集合；

④ 0 的 0 次方没有意义；

⑤ 如果 $f(x)$ 是由几部分的数学式子构成的，那么函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数的集合.

例 3　若函数 $f(x)=x^2-5x+2$，求 $f(3)$，$f(-\sqrt{2})$，$f(a+1)$.

析　由函数的定义我们可以将函数看做是一个数字加工机器，给定一个数字，按照给定的规则进行加工即可. 也就是说求此类题目只要用给定的数或式子代换函数表达式中的 x，即可求得函数值.

解　$f(3)=3^2-5\times 3+2=-4$；

$f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2-5\times(-\sqrt{2})+2=4+5\sqrt{2}$；

$f(a+1)=(a+1)^2-5(a+1)+2=a^2-3a-2$.

评　这里要注意 $f(a+1)$ 是 $x=a+1$ 时的函数值.

魔法石

1 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$ 的定义域为集合 A，函数 $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-6}$ 的定义域为集合 B，则集合 A，B 的关系是　　(　　)

A. $A=B$　　　　B. $A\subsetneqq B$

C. $B\subsetneqq A$　　　　D. $A\cap B=\varnothing$

2 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为　　(　　)

A. $[-1, 1]$　　　　B. $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$

C. $[0, 1]$　　　　D. $\{1, -1\}$

3 已知 $f(x)=|x+1|$，则 $f(-1)+f(1)=$________.

4 函数 $f(x)=x-1$，$x\in \mathbf{Z}$，且 $f(x)\in[-1, 4]$，定义域为________.

[illegible] 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$，则函数 $f(x+1)$ 的定义域是什么？

3/4站台 (2004 高考重庆卷) 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $\frac{f(2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=$　　(　　)

A. 1　　　　B. -1

C. $\frac{3}{5}$　　　　D. $-\frac{3}{5}$

答案：B.

5 求函数 $y=\frac{\sqrt{-2x^2+x+10}}{|x|-1}$ 的定义域.

6 已知 $f(x)=|x-1|-1$，$x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，求 $f(-1)$，$f(f(-1))$的值.

7 已知 $f(2x+1)=x^2-2x$，求 $f(\sqrt{2})$.

第2课　函数的值域与图象

飞天杖

函数 $y=x$ 和 $y=\frac{x^2}{x}$ 是相同的函数吗？怎样的两个函数是相同的？

精华地

1. 值域

（1）函数的值域可以理解为所有 y 的取值组成的集合；

（2）因为可以通过函数的解析式和函数的定义域将函数的值域求出，所以一般情况下，我们只考虑函数解析式和定义域相同就可以判断两个函数为相同函数.

点金指　函数的值域是一个数集，因此求函数的值域，都应该把它表示成集合的形式.

2. 函数的定义域、值域和对应的法则 f，称为函数的三要素，相同函数的三要素必须相同.

3. 函数图象

作图时要看清函数的定义域，有时先求定义域，以化简后的函数作图，可以使得作图简单. $y=f(x)$可以通过描点法得到它的图象，但不是每一个函数的图象都可以写出解析式的.

破釜吧

例1 求下列函数的值域：

(1) $y=-3x+2, x\in[-1,2]$；

(2) $y=1-x^2, x\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

解 (1) 函数 $y=-3x+2, x\in[-1,2]$ 的值域为 $[-4,5]$；

(2) 函数 $y=1-x^2, x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ 的值域为 $\{-3,0,1\}$.

评 当函数比较简单或函数的定义域比较简单时，我们通过观察就可以得到函数的值域. 这种直接观察求函数值域的方法我们称之为直接法.

例2 已知函数 $y=x^2+2x-3$，分别求它在下列区间上的值域：

(1) $x\in\mathbf{R}$； (2) $x\in[0,+\infty)$； (3) $x\in[-2,2]$.

析 对于一个函数解析式来说，一般情况下，如果定义域不同，则值域也不同.

解 (1) $\because y=(x+1)^2-4, x\in\mathbf{R}$，$\therefore y\geqslant(-1+1)^2-4=-4$，$\therefore$ 值域为 $[-4,+\infty)$.

(2) $\because y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4, x\in[0,+\infty)$.

$\therefore y\geqslant(0+1)^2-4=-3$，$\therefore$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，值域为 $[-3,+\infty)$.

(3) $\because y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4, x\in[-2,2]$，

$y\geqslant(-1+1)^2-4=-4$，且有 $y\leqslant(2+1)^2-4=5$.

$\therefore$ 当 $x\in[-2,2]$ 时，值域为 $[-4,5]$.

评 对于配方法求函数的值域要作出函数的图象较好！

> **点金言** 配方法，一般情况下运用在与二次函数有关的一些函数求值域.

例3 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{5x+4}{x-1}$； (2) $y=x-\sqrt{1-2x}$.

析 (1)中的变量 x 比较多，可以先想办法减少变量 x 的个数；(2)中最困难的就是根号了，要想办法解决.

解 (1) $y=\dfrac{5x+4}{x-1}=\dfrac{5(x-1)+9}{x-1}=5+\dfrac{9}{x-1}$，

$\because \dfrac{9}{x-1}\neq0$， $\therefore y\neq5$.

即函数 $y=\dfrac{5x+4}{x-1}$ 的值域为 $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$.

(2) 令 $u=\sqrt{1-2x}\ (u\geqslant0)$，则 $x=-\dfrac{1}{2}u^2+\dfrac{1}{2}$，

$y=-\dfrac{1}{2}u^2-u+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(u+1)^2+1$.

> **点金言** 常数分离法一般运用在形如 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 的函数中. 在用换元法求函数的值域时，要写清所换元的范围. 特别注意：在求值域前要先认清函数的定义域.