上海版新教材

高中数学教材全解

数学

SHU XUE

高一（下）

曹建华 主编

上海科学普及出版社

前 言

2002年8月，上海市教育委员会颁布了《上海市中小学数学课程标准》，在充分总结一期课改的基础上，进一步吸收、借鉴了国内外课改，并将全面推广使用在《上海市中小学数学课程标准》指导下的新教材，新教材注重提高学生的数学素养，力求根据学生的不同个性，充分发挥每个学生的聪明才智. 特别是教材中增加了大量联系实际的例题和应用题，这极大地引起了学生学习兴趣，同时也给广大师生的教和学带来了新的挑战.

为了满足广大师生的需求，本着促进课改的精神，我们组织了一批从事新教材第一线的骨干教师，结合自身的教学经验和研究心得，编写了这套全新视角的《高中数学新教材全解》，其内容紧扣教材，注重释疑解难，迁移延伸，第次深入.

本书旨在帮助广大学生能够更好地理解、消化、学好新教材，使同学们可以独立预习、复习，同时也是教师教学的参考教案.

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见，使本书更具有科学性、实用性、指导性，使它能够跟踪你的学习进程，成为你的良师益友.

编　者

2005年12月

目 录

第5章 三角比

本章综合解说

在学习了幂函数、指数函数、对数函数以后,为了学习另一种重要的基本初等函数——三角函数,教材在本章安排了三角比的建立和三角运算(三角恒等式).系统一样,先学习数、式及其运算,再引进幂函数和多项式函数(一次函数与二次函数);先学习指数、对数的概念和运算法则,再引进指数函数与对数函数.因此,三角比一章的学习是进一步学三角函数的重要基础.此外,三角比(包括它的运算)的学习主要是运用代数方法来研究几何图形(相似形、圆等),因而它对以后学习立体几何、解析几何、向量、复数等起着十分重要的作用,在生产实际中和高等学校理、工、商科各类课程的学习中,也要用到三角比及其运算.

为把几何问题转化为代数问题进行研究,教材从引进任意角的概念、建立三角比到三角恒等式的推导,都是在平面直角坐标系中讨论.采用这种“坐标法”,从数形结合的角度认识、研究三角比及其运算,方法简捷且易为学生接受.

教材先引进弧度制,再介绍任意角.用弧度制进行角的度量,使角的集合与实数的集合之间建立起一一对应关系,便于下一章学习三角函数时,把三角函数看成是以实数为自变量的函数.但是学生在初中学习角的时候,角度制深深印在脑海里,弧度制往往不易被接受和使用,这就需要在教学中反复再现.教材把弧度制放在任意角之前,是希望自任意角起,尽量采用弧度制,使弧度制的概念能被学生深刻理解和熟练运用.

在初中学习了锐角的四个三角比基础上,教材对此加以扩充,定义了任意角的六个三角比,并在观察它们之间的关系后,给出了三角比的运算关系,即三角恒等式:同角三角比的关系式、诱导公式以及两角和(差)、二倍角和半角的三角比公式,并运用它们进行求值,化简和证明恒等式.本章的特点是公式多,应用广,要力求使学生熟练、灵活地掌握每一个公式.这些公式中,有两个公式十分重要.一是“$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$”,它在解决问题中,应用非常广泛;另一是“$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$”,它对于学习后续知识,关系重大.理解每个公式的推导

过程及它们之间的内在联系，再通过一定量的练习，是不难达到熟记和运用本章公式的目的.

数学来源于实践，又反过来作用于实践. 在学习了三角比和三角恒等式以后，本章最后安排了“解斜三角形”一节，由于采用“坐标法”，三角形的面积公式 $\left(S=\frac{1}{2}ab\sin C\right)$、正弦定理和余弦定理的推导显得浅显易懂. 只是因为在学习大量三角公式以后再运用这些知识解三角形，所以有可能使待解决的问题具有更强的综合性，应该注意控制它们的难度.

5.1 任意角及其度量

知识结构框图表解

- 角的概念的推广、弧度制
  - 角的概念的推广
  - 弧度制
  - 弧度制下的扇形公式

基础知识详解与要点点拨

角的静态定义：两条射线所组成的图像就构成了一个角.

角的动态定义：角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的. 射线的端点叫做角的顶点，旋转开始时的射线叫做角的始边，终止时的射线叫做角的终边.

正角、负角和零角：按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角.

按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角.

当射线没有作任何旋转时，形成的角叫做零角.

在直角坐标系中，把角的顶点置于坐标原点，角的始边与 x 轴的正半轴重合，此时角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角，或者说这个角属于第几象限；

若角的终边落在坐标轴上，就说此角不属于任何一个象限.

弧度制——另一种度量角的单位制. 它的单位是 rad 读作“弧度”.

定义：长度等于半径长的弧所对的圆心角称为 1 弧度的角.

如图 5－1：$\angle AOB=1$ rad　$\angle AOC=2$ rad　周角 $=2\pi$ rad

正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是 0.

$\because 360^\circ=2\pi$ rad　$\therefore 180^\circ=\pi$ rad

$\therefore 1^\circ=\frac{\pi}{180}$rad $\approx 0.017\,45$ rad

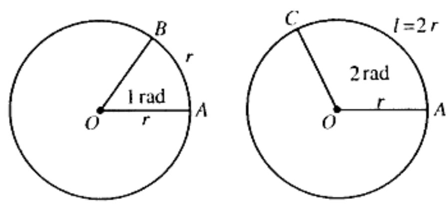

图 5－1

$$1\ \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$$

在具体运算时，“弧度”二字和单位符号“rad”可以省略. 如：3 表示 3 rad，$\sin \pi$ 表示 π rad 的角的正弦. 应确立如下的概念：角的概念推广之后，无论用角度制还是弧度制都能在角的集合与实数的集合之间建立一种一一对应的关系.

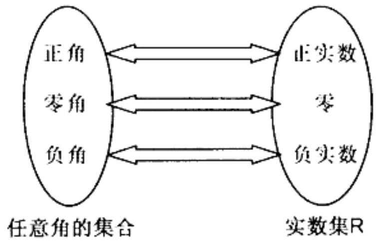

图 5－2

若扇形的圆心角为 α $(0 < \alpha < 2\pi)$，半径为 r，弧长为 l，面积为 S.

则：$l = \alpha r$，$S = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$，$S = \dfrac{1}{2}lr$.

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

度数与弧度数的互化问题

例 1 (1) 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度，(2) 把 $\dfrac{3}{5}\pi$ rad 化成度.

解 (1) $67^\circ 30' = \left(67\dfrac{1}{2}\right)^\circ$ $\therefore 67^\circ 30' = \dfrac{\pi}{180}\text{rad} \times 67\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}\pi\ \text{rad}$

(2) $\dfrac{3}{5}\pi\ \text{rad} = \dfrac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$

注意 此类角度与弧度互化的题目都可借助于计算器进行运算. 由于特殊角使用的频率较高，所以需要记住 $0\sim 2\pi$ 内的特殊角的表示，以提高解题速度.

例 2 下列命题正确的是(　　)

A. 用弧度制表示的角都是正角　　B. 1 弧度角的大小与圆的半径无关

C. 大圆中 1 弧度角比小圆中 1 弧度角大　　D. 圆心角为 1 弧度的扇形的弧长相等

解 在弧度制下有正角、零角、负角，∴ A 错.

弧度角与所在圆的半径无关，∴ C 错.

扇形的弧长由半径和圆心角决定，∴ D 错.

∴ 选 B.

例 3 在 2 小时 30 分内，时针转过了________弧度，分针转过了________弧度.

解题策略 因为时钟的分针和时针在转动是都是按顺时针方向转动的，所以所转的角都是负角. 一小时分针转 -2π，时针转 $-\dfrac{\pi}{6}$.

解 时针：$-\dfrac{\pi}{6} \times 2.5 = -\dfrac{\pi}{6} \times \dfrac{5}{2} = -\dfrac{5}{12}\pi$；分针：$-2\pi \times 2.5 = -5\pi$，$\therefore -\dfrac{5}{12}\pi$，$-5\pi$.

注意 当任意角的概念引入后，看一个角不仅要看它的大小，还要注意它的旋转方向，以逆时针方向为正，顺时针方向为负.

判定角的象限问题

例 4 将下列各角化成 $\alpha + 2k\pi$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi,\ k \in \mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限的角：(1) $\dfrac{22}{3}\pi$；(2) -315°；(3) $1\,500^\circ$；(4) -9π.

解题策略 关键是找出合适的 k，使 $0 \leqslant \alpha < 2\pi$，再根据它的大小来判断终边所在的象限.

解 (1) $\frac{22}{3}\pi=\frac{4\pi}{3}+6\pi$ 第三象限

(2) $-315°=45°-360°=\frac{\pi}{4}-2\pi$ 第一象限

(3) $1\,500°=\frac{25}{3}\pi=4\times2\pi+\frac{\pi}{3}$ 第一象限

(4) $-9\pi=-5\times2\pi+\pi$ 不是象限角

注意 有些角无法直接判断它属于第几象限，只能写成 $2k\pi+\alpha\ (k\in\mathbf{Z},\ 0\leqslant\alpha<2\pi)$ 就能进行判断. 当角的终边在坐标轴上，那么就认为这种角不属于任何象限.

终边相同的角的问题

例 5 用弧度制表示：(1) 终边在 x 轴上的角的集合；
(2) 终边在 y 轴上的角的集合；
(3) 终边在坐标轴上的角的集合.

解题策略

利用终边相同的角的表示方法.

解 (1) 终边在 x 轴上的角的集合 $S_1=\{\beta\mid\beta=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) 终边在 y 轴上的角的集合 $S_2=\left\{\beta\mid\beta=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(3) 终边在坐标轴上的角的集合 $S_3=\left\{\beta\mid\beta=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

注意 x 轴、y 轴包括正半轴、负半轴，都需考虑.

例 6 已知 $0<\theta<2\pi$，7θ 与 θ 的终边相同，试求角 θ.

解题策略 利用终边相同的角的关系，确定 θ.

解 $7\theta=\theta+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，$6\theta=2k\pi$，$\theta=\frac{k\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又 $0<\theta<2\pi$，$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$.

注意 终边相同的角的关系中 $k\in\mathbf{Z}$，利用这个性质可把指定范围内的角逐一找出.

弧度制下的计算问题

例 7 半径为 12 cm，弧长为 8π cm 的弧所对的圆心角为 α.

(1) 求圆心角 α 的弧度数；

(2) 写出与角 α 的终边相同的角的集合 A；

(3) 判断 A 是否为 $B=\left\{\beta\mid\beta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$的真子集.

解 (1) $l=\alpha r$

$8\pi=\alpha\cdot12$

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$.

(2) $A=\left\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{2}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\alpha = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi\ (k \in \mathbf{Z})$

$$= 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{6}$$

$\because 4k+1 \in \mathbf{Z}$

$\therefore \alpha \in B$

又$\frac{\pi}{6} \in B$，$\frac{\pi}{6} \notin A$

$\therefore A \subsetneqq B$，即 A 为 B 的真子集.

注意 对于第三问，可先采用列举法写出 A、B 中的部分元素，通过观察得到结论后再予证明.

例 8 如图 5-3，已知扇形 AOB 的周长是 6 cm，该扇形的中心角是 1 弧度，求该扇形的面积.

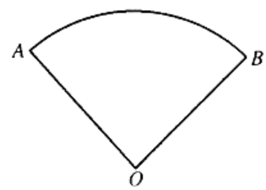

图 5-3

解题策略 扇形的面积公式 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$、$S = \frac{1}{2}lr$ 中，都要用到半径 r，所以一定要求出半径 r.

解 设扇形的半径为 r，弧长为 l，则有 $\begin{cases} 2r + l = 6 \\ \frac{l}{r} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ l = 2 \end{cases}$ $\therefore$ 扇形的面积 $S = \frac{1}{2}rl = 2(\text{cm})^2$

注意 求出半径 r 后，也可利用公式 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$，得 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 2(\text{cm})^2$.

例 9 已知一扇形的圆心角是 120°，求此扇形面积与其内切圆面积之比.

解题策略 关键是求出内切圆的面积.

解 如图 5-4：C、D、E 为切点

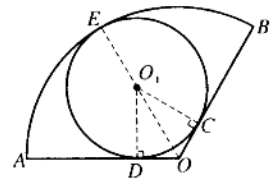

图 5-4

设内切圆半径为 r，扇形半径为 R

$$\left.\begin{array}{l} O_1O = O_1D \\ \angle O_1DO = \angle O_1CO = 90^\circ \\ O_1D = O_1C = r \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \text{Rt}\triangle O_1DO \approx \text{Rt}\triangle O_1CO$

$\therefore \angle O_1OC = \angle O_1OD = \frac{1}{2}\angle COD = 60^\circ$

$\therefore O_1O = O_1C \cdot \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$

$\therefore EO = EO_1 + O_1O = r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = R$

$\therefore S_{内切圆}=\pi r^2$

$\because S_{扇}=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 r^2=\frac{\pi r^2}{3}\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{7+4\sqrt{3}}{9}\pi r^2$

$\therefore$ 扇形面积：内切圆面积$=\frac{7+4\sqrt{3}}{9}$.

注意 本题最后所求为面积之比，可设未知量，不需求解，但可较方便地表示各个量，达到简化的目的.

例 10 如图 5－5，已知扇环的两条弧的长分别是 l_1 与 l_2，两条直边的长都为 d，求扇环的面积.

解题策略 利用扇环＝大扇形－小扇形.

解

$$S_{扇形OBD}=\frac{1}{2}\alpha\cdot OB^2$$

$$S_{扇形OAC}=\frac{1}{2}\alpha\cdot OA^2$$

$$S_{环}=\frac{1}{2}\alpha(OB^2-OA^2)$$

$$=\frac{1}{2}\alpha(OB+OA)(OB-OA)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\cdot OB+\alpha\cdot OA)\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}(l_1+l_2)d$$

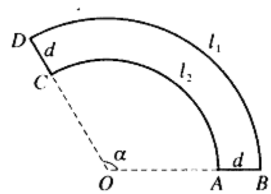

图 5－5

注意 扇形、扇环的面积公式可利用类似于三角形、梯形的面积公式记忆.

历届高考题解析与应注意的问题

例 11 （2005 年全国高考题）已知 α 为第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$所属的象限是（　　）

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

解题策略 根据各象限角的范围进行计算.

解 $\because$ α 为第三象限角，$\therefore$ $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3}{4}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，$\therefore$ 当 k 为偶数，$\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限；当 k 为奇数，$\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限. $\therefore$ 选 D.

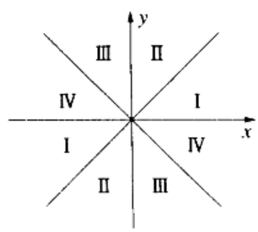

图 5－6

注意 本题也可用图解.

Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ为 α 所属的象限，在图 5 - 6 中所处的位置为 $\frac{\alpha}{2}$ 所属的象限. 如Ⅰ在图中处于一、三象限，即表示第一象限角 α 的半角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边可能在第一、三象限，图中给出了更精确的范围限制.

课后习题解答

练习 5.1(1)

1. (1) $\{\theta \mid \theta = k \cdot 360^\circ + 45^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) $\{\theta \mid \theta = k \cdot 360^\circ - 100^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

(3) $\{\theta \mid \theta = k \cdot 360^\circ + 300^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

2. 设角 α 与所求角的终边重合，且 $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$.

(1) 因为 $\alpha = (-1) \times 360^\circ + 530^\circ = 170^\circ$，而 170° 的角属于第二象限，所以 530° 的角属于第二象限.

(2) 因为 $\alpha = (-4) \times 360^\circ + 1\,450^\circ = 10^\circ$，而 10° 的角属于第一象限，所以 $1\,450^\circ$ 的角属于第一象限.

(3) 因为 $\alpha = 2 \times 360^\circ - 630^\circ = 90^\circ$，而 90° 的角终边在 y 轴正半轴上，不属于任何象限，所以 -630° 的角终边在 y 轴正半轴上，不属于任何象限.

练习 5.1(2)

1. (1) $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= \frac{5}{6}\pi$ 弧度.

(2) $22^\circ 30' = 22.5^\circ = 22.5 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= \frac{\pi}{8}$ 弧度.

(3) $36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= \frac{\pi}{5}$ 弧度.

(4) $285^\circ = 285 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= \frac{19}{12}\pi$ 弧度.

(5) $-207^\circ = -207 \times \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= -\frac{23}{20}\pi$ 弧度.

2. (1) $\frac{3}{4}\pi$ 弧度 $= \frac{3}{4}\pi \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 135^\circ$.

(2) $-\frac{3}{10}\pi$ 弧度 $= -\frac{3}{10}\pi \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -54^\circ$.

(3) $\frac{2}{3}\pi$ 弧度 $= \frac{2}{3}\pi \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 120^\circ$.

(4) -5 弧度 $= -5 \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -286.48^\circ$.

3. (1) $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\sin\frac{\pi}{6}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

(3) $\tan\frac{\pi}{3}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

(4) $\cot\frac{\pi}{4}=\cot 45^\circ=1$.

4. $l=\alpha r=\frac{2}{3}\pi\times 5=\frac{10}{3}\pi$, $S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{25}{3}\pi$.

5. 用角度制表示：$\{\theta \mid \theta=k\cdot 180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，用弧度制表示：$\{\theta \mid \theta=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

6. 因为α是第二象限角，所以$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

当k是偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；当k是奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角.

因此，当α是第二象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限的角.

习题 5.1

1. (1) 因为$\alpha=1\times 360^\circ-238^\circ=122^\circ$，而$122^\circ$的角终边在第二象限，所以$-238^\circ$的角是第二象限的角.

(2) 因为$\alpha=(-4)\times 360^\circ+1\,441^\circ=1^\circ$，而$1^\circ$的角终边在第一象限，所以$1\,441^\circ$的角是第一象限的角.

(3) 因为$\alpha=5\times 360^\circ-1\,441^\circ=359^\circ$，而$359^\circ$的角终边在第四象限，所以$-1\,441^\circ$的角是第四象限的角.

(4) 因为$\alpha=(-4)\times 360^\circ+1\,790^\circ=350^\circ$，而$350^\circ$的角终边在第四象限，所以$1\,790^\circ$的角是第四象限的角.

2. (1) $\frac{50\pi}{3}=2\times 8\pi+\frac{2}{3}\pi$.

(2) $-\frac{50}{3}\pi=2\times(-9)\pi+\frac{4}{3}\pi$.

(3) $-108^\circ=-108\times\frac{\pi}{180}=-\frac{3}{5}\pi$(弧度)，$-\frac{3}{5}\pi=2\times(-1)\pi+\frac{7}{5}\pi$.

(4) $-225^\circ=-225\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{4}\pi$(弧度)，$-\frac{5}{4}\pi=2\times(-1)\pi+\frac{3}{4}\pi$.

3. $l=\frac{5\pi}{3}$，$r=2$，$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{5}{6}\pi$；$S=\frac{1}{2}lr=\frac{5}{3}\pi$(平方单位).

4. 角度制表示：$\{\theta \mid \theta=k\cdot 90^\circ+45^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，弧度制表示：$\left\{\theta \mid \theta=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. 弧长为 11 250 cm，周数约为 119.4 周.

因为直径为 30 cm，所以半径$r=15$ cm，又因为每秒旋转 25 弧度，所以半分钟内所转过的圆心角$\alpha=25\times 30=750$(弧度)，因此，弧长$l=\alpha r=750\times 15=11\,250$(cm)，所转过的周数$=\frac{11\,250}{2\pi\times 15}\approx 119.4$(周).

6. 长度等于半径的弦，它所对的圆心角是$\frac{\pi}{3}$弧度；长度等于半径的$\sqrt{2}$倍的弦，它所对的圆心角是$\frac{\pi}{2}$弧度；长度等于半径的$\sqrt{3}$倍的弦，它所对的圆心角是$\frac{2}{3}\pi$弧度.

5.2 任意角的三角比

知识结构框图表解

- 任意角的三角比
  - 任意角的三角比的定义
  - 终边相同的角的三角比
  - 特殊角的三角比
  - 各三角比在每个象限的符号

基础知识详解与要点点拨

设α是一个任意角，在α的终边上任取(异于原点的)一点$P(x,\ y)$，则P与原点的距离$r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0$

比值$\frac{y}{r}$叫做α的正弦　记作：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$

比值$\frac{x}{r}$叫做α的余弦　记作：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

比值$\frac{y}{x}$叫做α的正切　记作：$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

比值$\frac{x}{y}$叫做α的余切　记作：$\cot\alpha=\frac{x}{y}$

比值$\frac{r}{x}$叫做α的正割　记作：$\sec\alpha=\frac{r}{x}$

比值$\frac{r}{y}$叫做α的余割　记作：$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

单位圆——圆心在原点O，半径等于单位长度的圆.

三角函数线：

设单位圆圆心在原点，和横坐标的正方向OX交于A点，与纵坐标轴的正方向OY交于B点，与角α的终边交于P点，从P点作OX的垂线MP，垂足为M，过A、B分别作单位圆的切

线，延长 OP 或 PO，分别与两条切线交于 T 点和 S 点. 则 $\sin\alpha = MP$（正弦线），$\cos\alpha = OM$（余弦线），$\operatorname{tg}\alpha = AT$（正切线），$\operatorname{ctg}\alpha = BS$（余切线），$\sec\alpha = OT$（正割线），$\csc\alpha = OS$（余割线）. MP，OM，AT，BS，OT，OS 统称三角函数线.

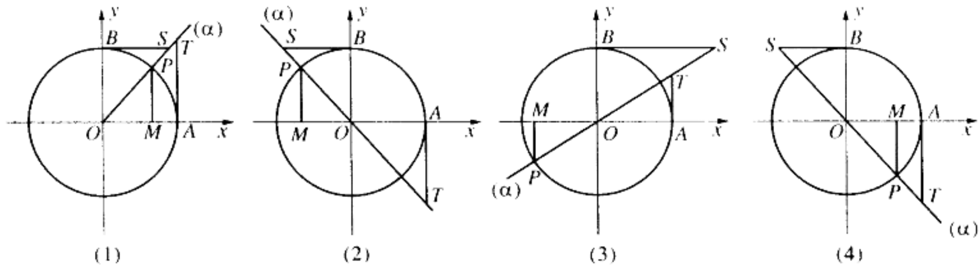

图 5-7

终边相同的角的三角比（第一组诱导公式）：

$\sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha$，

$\cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha$，

$\tan(2k\pi+\alpha) = \tan\alpha$，

$\cot(2k\pi+\alpha) = \cot\alpha$，其中 $k \in \mathbf{Z}$.

各三角比在每个象限的符号：

第一象限：$x>0$，$y>0$，$\therefore \sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，$\tan\alpha>0$，$\cot\alpha>0$，$\sec\alpha>0$，$\csc\alpha>0$

第二象限：$x<0$，$y>0$，$\therefore \sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，$\tan\alpha<0$，$\cot\alpha<0$，$\sec\alpha<0$，$\csc\alpha>0$

第三象限：$x<0$，$y<0$，$\therefore \sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，$\tan\alpha>0$，$\cot\alpha>0$，$\sec\alpha<0$，$\csc\alpha<0$

第四象限：$x>0$，$y<0$，$\therefore \sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，$\cot\alpha<0$，$\sec\alpha>0$，$\csc\alpha<0$

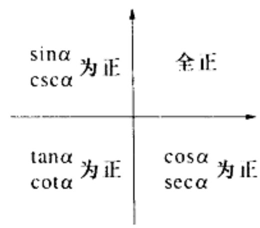

图 5-8

记忆法则：

可简记为：一正、二正弦、三切、四余弦.

典型例题精讲与规律、方法、技巧总结

定义法求三角比

例 1 已知 α 的终边经过点 $P(2, -3)$，求 α 的六个三角比值.

解题策略

利用三角比的定义求解.

解 $x=2$，$y=-3$，$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \sin\alpha = -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan\alpha = -\dfrac{3}{2}$ $\quad \cot\alpha = -\dfrac{2}{3}$

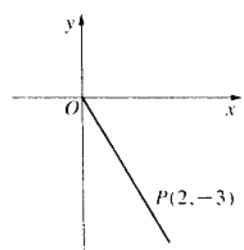

图 5-9

$\sec\alpha=\frac{\sqrt{13}}{2}$　$\csc\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{3}$

例 2　已知角 α 的终边经过 $P(4a,\ -3a)$ $(a\neq 0)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

解题策略　因为角的终边经过点 $P(4a,\ -3a)$，所以 $r=\sqrt{25a^2}=5|a|=\begin{cases}5a,\ a>0\\-5a,\ a<0\end{cases}$.
由上述计算可知 a 分两种情况的不同的三角比，当 $a>0$ 时，点 P 在第四象限；当 $a<0$ 时，点 P 在第二象限.

解　若 $a>0$，$r=5a$　则 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$　$\cos\alpha=\frac{4}{5}$　$\therefore 2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

若 $a<0$，$r=-5a$　则 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$　$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$　$\therefore 2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$

注意　由于 a 是个不确定的量，所以需要分类讨论，即在解题时一定要保证 $r>0$.

例 3　已知角 α 的终边上一点 P，$OP=13$ 且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，求 P 点的坐标.

解题策略　可设点 P 的坐标为 $P(x,\ y)$，因为 $OP=r=13$，由 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{5}{13}$ 得 $x=-5$.

解　设点 P 的坐标为 $P(x,\ y)$，因为 $OP=r=13$，由 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{5}{13}$ 得 $x=-5$.

又因为 $r^2=x^2+y^2$，得 $y^2=144$，$y=\pm 12$.

所以点 P 的坐标是 $(-5,\ 12)$ 或 $(-5,\ -12)$.

注意　本题是任意角的三角比公式的逆用，还应注意 $r^2=x^2+y^2$ 这个公式有时有多解，注意不要漏解.

判断角所处的位置

例 4　已知 θ 是第三象限角且 $\cos\frac{\theta}{2}<0$，问 $\frac{\theta}{2}$ 是第几象限角？

解题策略　利用条件，确定 $\frac{\theta}{2}$ 所在范围的交集.

解　$\because (2k+1)\pi<\theta<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$　$(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$　$(k\in\mathbf{Z})$

则 $\frac{\theta}{2}$ 是第二或第四象限角

又 $\because \cos\frac{\theta}{2}<0$　则 $\frac{\theta}{2}$ 是第二或第三象限角

$\therefore \frac{\theta}{2}$ 必为第二象限角

例 5　已知 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin 2\theta}<1$，则 θ 为第几象限角？

解题策略　利用指数函数的值域及半角的范围.

解　由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin 2\theta}<1$　$\therefore \sin 2\theta>0$

$\therefore 2k\pi < 2\theta < 2k\pi + \pi \ (k \in \mathbf{Z}) \quad \therefore k\pi < \theta < k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbf{Z})$

$\therefore \theta$ 为第一或第三象限角

注意 对于 $k\pi < \theta < k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbf{Z})$ 需对 k 进行奇偶分类，来确定 θ 的范围.

知识联系与拓展

三角函数线的应用

例 6 利用单位圆中的三角函数线证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x < \tan x$.

解题策略 把 $\sin x$，x，$\tan x$ 转化为图像的线进行比较.

证明 任取 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，分别作出角 x 的正弦线 CD 及正切线 AT（见图 5－10).

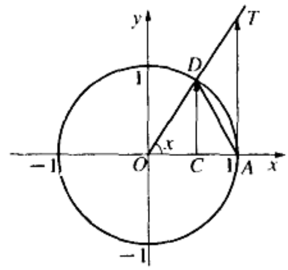

图 5－10

根据 $S_{\triangle OAD} < S_{扇形OAD} < S_{\triangle OAT}$，即：

$\frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |CD| < \frac{1}{2} \cdot |OA|^2 \cdot x < \frac{1}{2} |OA| \cdot |AT|$，

化简整理即得：$\sin x < x < \tan x$.

注意 用单位圆中的有向线段分别表示角的正弦、余弦、正切、余切时，一定要注意这四条有向线段的方向、位置及书写.

历届高考题解析与应注意的问题

例 7 （1985 年全国高考题）

$\tan x = 1$ 是 $x = \frac{5\pi}{4}$ 的________.

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解题策略 利用诱导公式.

解 当 $x = \frac{5}{4}\pi$ 时，$\tan x = 1$ $\quad\therefore$ 必要性成立.

当 $\tan x = 1$ 时，利用诱导公式 $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

均满足. $\therefore$ 充分性不成立.

$\therefore$ 选 A.

注意 $\tan x = 1$ 还可得到除上述结论外的其他角，但此处对于充分性只需找出一个反例即可.

例 8 （1990 年上海高考题）

角 α 属于第二象限，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = -\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 角属于________.

A. 第一象限的角　　B. 第二象限的角　　C. 第三象限的角　　D. 第四象限的角

解题策略 根据半角和余弦值进行判定.

解 α属于第二象限，$\therefore \frac{\alpha}{2}$在第一、三象限.

又 $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ $\therefore \frac{\alpha}{2}$ 在第二、三象限

$\therefore \frac{\alpha}{2}$在第三象限

$\therefore$ 选 C.

注意 对于题中给出的条件，可逐一转换，最后找公共部分即可.

例 9 (1990 年全国高考题)

函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是________.

A. $\{-2, 4\}$ B. $\{-2, 0, 4\}$ C. $\{-2, 0, 2, 4\}$ D. $\{-4, -2, 0, 4\}$

解题策略 首先确定 x 的范围，再分象限讨论.

解 根据解析式可得 x 的终边不能在坐标轴上.

(1) x 在第一象限

$y=1+1+1+1=4.$

(2) x 在第二象限

$y=1-1-1-1=-2$

(3) x 在第三象限

$y=-1-1+1+1=0$

(4) x 在第四象限

$y=-1+1-1-1=-2$

$\therefore$ 选 B.

注意 需逐个象限验算，防止经验主义，想当然.

课后习题解答

练习 5.2(1)

1. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$, $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$, $\sec\alpha=-\frac{5}{3}$, $\csc\alpha=\frac{5}{4}$.

2. $\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\frac{5}{6}\pi=-\sqrt{3}$, $\sec\frac{5}{6}\pi=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\csc\frac{5}{6}\pi=2$.

$\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{7}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\frac{7}{6}\pi=\sqrt{3}$, $\sec\frac{7}{6}\pi=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\csc\frac{7}{6}\pi=-2$.