

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

数学

(理工农医类)

孙成基 主编

(附解题指导) (第11版)

2006最新版



高等教育出版社

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

数 学(理工农医类)

(附解题指导)

第11版

孙成基 主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习指导丛书·数学:理工农医类:
附解题指导/孙成基主编. —11版. —北京:高等教育
出版社,2006.1

高中起点升本、专科

ISBN 7-04-019115-6

I. 全... II. 孙... III. 数学课—成人教育:高等
教育—入学考试—自学参考资料 IV. G723.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第160716号

策划编辑 李 宁
责任编辑 朱 静

责任编辑 古 锋
责任印制 陈伟光

封面设计 王 晔

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京民族印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 19
字 数 460 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>
版 次 1986年4月第1版
2006年1月第11版
印 次 2006年1月第1次印刷
定 价 27.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19115-00

出版前言

《全国各类成人高考复习指导丛书》第11版是在第10版的基础上,根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》(2006年版)修订而成的。

本丛书自1986年问世以来,一直受到广大读者的欢迎,在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用。20年来,随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化,特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的几次修订,这套丛书也相应地历经了10次全面的修订。几经修改完善,这套丛书的整体质量不断提高,结构更加科学、合理,成为具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材,在全国享有良好声誉。

按照新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》的要求修订而成的全新第11版,具有如下特点:

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出,注重基础知识复习和能力训练,题型与练习贴近考试实际,实用性、针对性强。

2. 题型设计以及叙述方式等各个方面,注重从以知识立意向以能力立意的转变;在注重学科基本能力训练的同时,注重考生综合运用知识的能力和应试水平的提高;适合成人学习特点的体系结构更加完善。

3. 注重吸收新知识、新成果,丛书的时代感更加鲜明。

4. 在覆盖新大纲知识点的前提下,适当压缩了字数,使丛书更加简明、实用。

修订后的本丛书(第11版)包括以下8本:

《语文 附解题指导》

《数学 附解题指导》(文史财经类)

《数学 附解题指导》(理工农医类)

《英语 附解题指导》

《物理化学综合科 物理分册 附解题指导》

《物理化学综合科 化学分册 附解题指导》

《历史地理综合科 历史分册 附解题指导》

《历史地理综合科 地理分册 附解题指导》

《数学》(理工农医类)本次修订的主要内容为:

删去了立体几何中的三垂线定理及其逆定理、两个平行平面的距离的概念、两个平面平行、垂直的判定定理和性质定理,删去了直线的向量参数方程、平行六面体的概念和线性回归的方法及其简单应用。

本书主编为孙成基(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》起草人),参加编写的还有烟学敏、韩恩熙、李金香.本次修订工作由孙成基完成.

高等教育出版社
2006年1月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传 真：(010)82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)58581115/58581116/58581117/58581118

特别提醒：“中国教育考试在线”网站<http://www.eduexam.com.cn>是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、试题宝库、在线考场、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡。该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息并以此辨别图书真伪。

目 录

代 数(I)

第一章 集合	1	第三章 指数和对数	20
第二章 不等式和不等式组	6	第四章 函数	28

三 角 函 数

第五章 三角函数	54	第七章 解三角形	96
§ 1 任意角的三角函数	54	§ 1 反三角函数的符号	96
§ 2 三角函数的图象和性质	67	§ 2 解三角形	98
第六章 两角和与两角差的三角函数	78		

平面解析几何

第八章 直线与简易逻辑	107	§ 1 圆	142
§ 1 平面向量	107	§ 2 椭圆	152
§ 2 直线的方程	120	§ 3 双曲线	162
§ 3 两条直线的位置关系	129	§ 4 抛物线	170
第九章 圆锥曲线	142	§ 5 参数方程	178

代 数(II)

第十章 数列	186	§ 1 函数的极限	230
第十一章 排列、组合与二项式定理	200	§ 2 函数的连续性	232
第十二章 概率与统计初步	213	§ 3 导数	234
第十三章 复数	222	§ 4 导数的应用	240
第十四章 导数	230		

立 体 几 何

第十五章 直线和平面	248	第十六章 多面体和旋转体	278
§ 1 平面	248	§ 1 多面体	278
§ 2 空间两条直线	252	§ 2 球	285
§ 3 空间直线和平面	258	附录 2005 年成人高等学校招生全国	
§ 4 空间两个平面	268	统一考试数学(理工农医类)	
§ 5 空间向量	274	试题及参考答案	289

代数(I)

第一章 集 合

【本章要求】

了解集合的意义及其表示法,了解空集、子集、交集、并集、全集、补集的概念及其表示法,了解符号 $\varnothing, \subseteq, =, \in, \notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

【内容提要】

1. 集合的基本概念

集合的意义 把某些指定的对象集中在一起,就成为一个集合(简称集).常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合.

元素 集合中的每个对象叫做集合的**元素**.常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.

有限集 含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

无限集 含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

对于一个给定的集合 A 和确定的元素 a ,它们之间有且只有以下两种关系:

1) 若 a 是 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$.

2) 若 a 不是 A 的元素,则称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$.

空集 不含任何元素的集合叫做**空集**,记为 $\varnothing$.

2. 集合的表示法

列举法 把集合的元素一一列举出来,并写在大括号“ $\{ \}$ ”内的方法,叫做**列举法**.

描述法 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并将该条件写在大括号“ $\{ \}$ ”内的方法,叫做**描述法**.如不等式 $x-5>2$ 的解集可表示为 $\{x|x-5>2\}$ 或 $\{x;x-5>2\}$.

常见的几种数集的表示符号:

$\mathbf{N}^+$ (或 $\mathbf{N}_+$)表示正整数集.

$\mathbf{N}$ 表示非负整数集,即自然数集.

$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

$\mathbf{R}$ 表示实数集.

说明 根据国家标准,“0”是自然数,请不要继续沿用自然数集不包括“0”的说法.

3. 集合与集合的关系

子集 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

相等的集合 若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称 $A = B$.

真子集 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

说明 在国家标准中, 用符号 $\subsetneq$ (或 $\supsetneq$) 表示集合间的真子集关系; 用符号 $\subseteq$ (或 $\supseteq$) 表示集合间的子集关系, 这个关系也可用符号 $\subset$ (或 $\supset$) 表示.

规定 空集是任何集合的子集. 可见, 空集是任何非空集合的真子集.

注意: $A \subseteq A$.

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

交集的性质: 1) $A \cap A = A$; 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

并集的性质: 1) $A \cup A = A$; 2) $A \cup \emptyset = A$.

补集 对于集合 S , 若集合 $A \subseteq S$, 那么由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$, 或简记作 $\complement A$.

注意: $\complement_S A \cup A = S$; $\complement_S A \cap A = \emptyset$.

全集 若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素, 那么这个集合就可以看做一个全集, 全集记作 U .

【例题与解题指导】

例1 选择题

(1) 已知集合 $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, 则 $(B \cup C) \cap A =$

(A) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (B) $\emptyset$ (C) $\{0, 3\}$ (D) $\{0\}$

(2) 设集合 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$, 则 $M \cup N =$

(A) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ (B) $\{x \mid 2 < x < 3\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 4\}$ (D) $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$

(3) 设集合 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 10\}$, $N = \{x \mid x > 7 \text{ 或 } x < 1\}$, 则 $M \cap N =$

(A) $\{x \mid 7 < x \leq 10\}$ (B) $\{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$
(C) $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$ (D) $\{x \mid 1 < x \leq 10\}$

(4) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, 则 $\complement_U M \cap N =$

(A) $\emptyset$ (B) U (C) N (D) M

(5) 下列关系中, 正确的是

(A) $\{0\} = \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{0\}$ (C) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ (D) $0 \subsetneq \emptyset$

(6) 设集合 $M = \{(x, y) \mid xy > 0\}$, $N = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则

(A) $M \cup N = M$ (B) $M \cup N = N$ (C) $M \cap N = M$ (D) $M \cap N = \emptyset$

解 (1) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $(B \cup C) \cap A = \{0, 3\}$. 选(C).

说明 求两个集合的并集, 相同的元素只写一个, 如 $B \cup C$ 中的元素 3.

在集合的运算中, 如有小括号应先算小括号内的.

(2) $M \cup N = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$. 选(D).

说明 由不等式指定的集合运算, 可利用数轴直观地求解.

(3) $M \cap N = \{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$. 选(B).

(4) $\complement_U M = \{2, 4, 6\}$, $\complement_U M \cap N = \{2, 4, 6\}$. 选(C).

(5) $\{0\}$ 是只含有一个元素 0 的单元集合, 而 $\emptyset$ 是空集, 所以(A) 不正确; 符号“ $\in$ ”用于

元素与集合的关系,故(B)也不正确;因为空集是任何非空集合的真子集,所以(C)正确.

(6) M 与 N 都是点的集合.

由 $xy > 0$ 知,点 (x, y) 的横、纵坐标同号,集合 $M = \{\text{第一或第三象限的点}\}$.

由 $x > 0$ 且 $y > 0$ 知,点 (x, y) 的横、纵坐标的值均为正,集合 $N = \{\text{第一象限的点}\}$.

因此, $M \cup N = M$. 选(A).

例2 填空题

(1) 若 $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若 $A \subseteq C$, 化简 $(A \cup B) \cup (B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 若 $M = \{x \mid 2x + a = 0\}$, $P = \{x \mid 1 < x < 4, \text{且 } x \in \mathbb{N}_+\}$, 且 $M \cap P$ 为非空集合, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (1) A 为奇数集合, 而 B 为整数集合, 则 $A \cap B = A$; $A \cup B = B$.

(2) 由 A 及 $A \cap B$ 知, $1, 3, 5 \in B$ 且 $2, 4 \notin B$; 由 A 及 $A \cup B$ 知, $0, 6 \in B$. 故 $B = \{1, 3, 5, 0, 6\}$.

(3) 由于 $A \subseteq C$, 所以 $A \cup B \subseteq B \cup C$, 则 $(A \cup B) \cup (B \cup C) = B \cup C$.

(4) 由已知, $P = \{2, 3\}$, 把 $x = 2, 3$ 分别代入 $2x + a = 0$ 中, 得 $a = -4$ 或 $a = -6$.

例3 设 $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 求集合 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 的所有的子集.

解 因为 $\complement_U A = \{0, 1, 4, 5\}$, $\complement_U B = \{0, 1\}$,

所以 $\complement_U A \cap \complement_U B = \{0, 1\}$.

因此 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 的所有的子集为: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\emptyset$.

例4 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid -5 < x < 5\}$, $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 7\}$. 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U (A \cap B)$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

解 由已知, 得 $\complement_U A = \{x \mid x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\}$, $\complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 7\}$,

所以 $\complement_U A \cup \complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\}$.

因为 $A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$, 所以 $\complement_U (A \cap B) = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\}$.

练习一

1. 选择题

(1) 已知集合 $S = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $\complement_S M \cap N =$

(A) $\{0\}$ (B) $\{-3, -4\}$ (C) $\{-1, -2\}$ (D) $\emptyset$

(2) 设集合 $M = \{x \mid x \geq -4\}$, $N = \{x \mid x < 6\}$, 则 $M \cup N =$

(A) $\mathbb{R}$ (B) $\{x \mid -4 \leq x < 6\}$ (C) $\emptyset$ (D) $\{x \mid -4 < x < 6\}$

(3) 设全集 $U = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\complement_U P = \{x \mid x \geq a\}$, $\complement_U Q = \{x \mid x \geq b\}$, 若 $P \cap Q = P$, 则

(A) $a \geq b$ (B) $b \geq a$ (C) $a > b$ (D) $b > a$

(4) 设 $M = \{x \mid x \leq \sqrt{10}\}$, $a = 3$, 下列各式正确的是

(A) $a \in M$ (B) $a \notin M$ (C) $\{a\} \in M$ (D) $\{a\} \subseteq M$

(5) 已知集合 M 满足条件: $\{1, 2\} \subseteq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么这样的集合 M 有

(A) 6 个 (B) 7 个 (C) 8 个 (D) 9 个

(6) 若 M, P 为非空集合, 且 $M \subsetneq P, P \subsetneq U, U$ 为全集, 则下列集合中空集是

(A) $M \cap P$ (B) $\complement_U M \cap \complement_U P$ (C) $\complement_U M \cap P$ (D) $M \cap \complement_U P$

2. 填空题

(1) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $A = \{\text{正数}\}, B = \{\text{非负数}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若 $A = \{x | x > -1\}, B = \{x | x > -3\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 若 $A = \{x | x \geq -2\}, B = \{x | -1 < x \leq 4\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 若 $A = \{x | 1 < x \leq 5\}, B = \{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 若 $A = \{\text{等边三角形}\}, B = \{\text{等腰三角形}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

(7) 若 $U = \mathbf{R}, A = \{x | x > -1\}$, 则 $\complement_U A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) 若 $U = \{\text{三角形}\}, A = \{\text{直角三角形}\}$, 则 $\complement_U A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(9) 若 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 4, 5\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = \underline{\hspace{2cm}}, (A \cup B) \cap C = \underline{\hspace{2cm}},$
 $(A \cap B) \cap C = \underline{\hspace{2cm}}, A \cap (B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}, B \cap (A \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 若 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}, A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 在下列各题横线上填写适当的符号($\in, \notin, =, \supset, \subsetneq$):

(1) $\emptyset$ $\underline{\hspace{1cm}} \{a\}$; (2) a $\underline{\hspace{1cm}} \{a\}$; (3) $\{a\}$ $\underline{\hspace{1cm}} \{a\}$; (4) $\{a\}$ $\underline{\hspace{1cm}} \{a, b\}$;

(5) 6 $\underline{\hspace{1cm}} \{0, 1, 2\}$; (6) 0.5 $\underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q}$; (7) $\mathbf{R}$ $\underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q}$; (8) $\mathbf{N}$ $\underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Z}$.

4. 写出集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的所有子集, 并指出其中哪个集合不是集合 A 的真子集.

5. 设集合 $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, B = \{x | x = 4m \pm 1, m \in \mathbf{Z}\}$, 试确定 A 与 B 的关系.

练习一解题指导

1. 解 (1) $\complement_S M = \{-3, -4\}, \complement_S M \cap N = \{-3, -4\}$. 选(B).

(2) $M \cup N = \mathbf{R}$. 选(A).

(3) $P = \{x | x < a\}, Q = \{x | x < b\}$.

由 $P \cap Q = P$ 知, $P \subsetneq Q$ 或 $P = Q$.

当 $P \subsetneq Q$ 时, 由图 1-1 知 $b > a$;

当 $P = Q$ 时, $a = b$.

从而 $b \geq a$. 选(B).

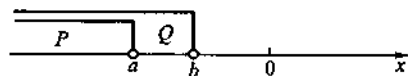


图 1-1

(4) 符号“ $\subsetneq$ ”用于表示集合与集合的关系, 而 a 是元素, 可排除(A); 因为 $3 < \sqrt{10}$, 故可排除(B); 符号“ $\in$ ”用于表示元素与集合的关系, 而 $\{a\}, M$ 都是集合, 可排除(C). 故(D)正确.

(5) 有集合 $\{1, 2\}$ 及它分别与下列集合: $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ 的并集, 共 7 个. 故选(B).

(6) 由 $M \cap P = M$ 可排除(A); 由 $\complement_U M \cap \complement_U P = \complement_U P$ 可排除(B); 由 $M \subsetneq P$ 知, $\complement_U M \cap P$ 是由集合 P 中除去 M 中所有元素组成的非空集合(图 1-2 中阴影部分), 所以可排除(C). 故(D)正确.

2. 解 (1) $A \cap B = \{2, 4\}; A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$

(2) $A \cap B = A; A \cup B = B.$

(3) $A \cap B = A; A \cup B = B.$

(4) $A \cap B = B; A \cup B = A.$

(5) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}.$

(6) $A \cap B = A, A \cup B = B.$

(7) $\complement_U A = \{x \mid x \leq -1\}.$

(8) $\complement_U A = \{\text{斜三角形}\}.$

(9) $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5\}, (A \cup B) \cap C = \{3\}, (A \cap B) \cap C = \emptyset, A \cap (B \cup C) = \{2\}, B \cap (A \cup C) = B.$

(10) $A = \{\text{偶数}\}, B = \{\text{奇数}\}, \text{则 } A \cap B = \emptyset; A \cup B = \mathbb{Z}.$

3. 解 (1) $\supsetneq$ (2) $\in$ (3) $=$ (4) $\supsetneq$ (5) $\notin$ (6) $\in$ (7) $\supsetneq$ (8) $\supsetneq$.

4. 解 集合 A 的所有子集为: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$ 及 $\emptyset$. 其中 $\{0, 1, 2\}$ 不是集合 A 的真子集.

5. 解 由于 $A = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}, B = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\},$ 所以 $A = B.$

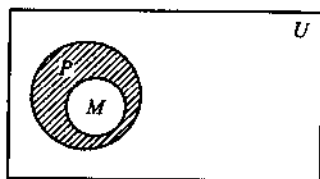


图 1-2

第二章 不等式和不等式组

【本章要求】

(1) 理解不等式的性质, 会用不等式的性质和基本不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $|a+b| \leq |a| + |b|$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 解决一些简单问题.

(2) 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式, 会解一元二次不等式, 了解区间的概念, 会表示不等式或不等式组的解集.

(3) 了解绝对值不等式的性质, 会解形如 $|ax+b| \geq c$ 和 $|ax+b| \leq c$ 的绝对值不等式.

【内容提要】

1. 不等式的意义和性质

(1) 不等式的意义

若 $a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(2) 不等式的性质

$$1) \quad a > b \Leftrightarrow b < a;$$

$$2) \quad a > b, b > c \Rightarrow a > c;$$

$$3) \quad a > b \Rightarrow a + c > b + c;$$

$$4) \quad a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d;$$

$$5) \quad a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc;$$

$$6) \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc;$$

$$7) \quad a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd;$$

$$8) \quad a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbf{N}, \text{且 } n > 1);$$

$$9) \quad a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad (n \in \mathbf{N}, \text{且 } n > 1);$$

$$10) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad (a, b \in \mathbf{R}, \text{且当 } a, b \text{ 同号时取等号}).$$

2. 解不等式

(1) 不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中, 能使不等式成立的未知数的所有可能取到的值的集合, 叫做这个不等式的解的集合. 求不等式的解集的过程, 叫做解不等式.

(2) 一元一次不等式及其解法

1) 一元一次不等式的一般形式为 $ax > b$.

2) 解的讨论:

(i) 当 $a \neq 0$ 时

如果 $a > 0$, 那么解集是 $\left\{x \mid x > \frac{b}{a}\right\}$, 也可写成 $x > \frac{b}{a}$, 下面也有类似写法.

如果 $a < 0$, 那么解集为 $x < \frac{b}{a}$.

(ii) 当 $a = 0$ 时

如果 $b \geq 0$, 那么 $ax > b$ 无解, 即解的集合是空集 $\emptyset$; 如果 $b < 0$, 那么 $ax > b$ 的解为全体实数, 即解的集合是 $\mathbf{R}$.

(3) 一元二次不等式及其解法

1) 一般形式为 $ax^2 + bx + c > 0$, 这里 $a \neq 0$.

2) 解的讨论:

设 $\Delta = b^2 - 4ac$, x_1, x_2 (为讨论方便, 不妨设 $x_1 < x_2$) 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根.

(i) 当 $\Delta < 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $\mathbf{R}$;

如果 $a < 0$, 不等式的解集是 $\emptyset$.

(ii) 当 $\Delta = 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $x \neq -\frac{b}{2a}$;

如果 $a < 0$, 不等式无解.

(iii) 当 $\Delta > 0$ 时

如果 $a > 0$, 不等式的解集是 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

如果 $a < 0$, 不等式的解集是 $x_1 < x < x_2$.

注意: 一元二次不等式的解法, 应结合二次函数的图象来理解.

(4) 含有绝对值的不等式的解法

1) 若 $a > 0$, $|x| < a$ 的解集是 $-a < x < a$;

2) 若 $a > 0$, $|x| > a$ 的解集是 $x > a$ 或 $x < -a$.

(5) 不等式组的解

不等式组的解, 即不等式组中每一个不等式解集的交集.

3. 基本不等式

1) 若 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 \geq 0$;

2) 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当 $a = b$ 时取等号).

4. 关于区间的概念

设 a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$.

1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫做开区间, 记作 (a, b) ;

2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做闭区间, 记作 $[a, b]$;

3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$, $(a, b]$.

特别地, $\mathbf{R}$ 可记为 $(-\infty, +\infty)$, 符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 它

们不是数,只是记号. $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 分别表示 $x \geq a$, $x > a$, $x \leq b$, $x < b$ 的一切实数 x 的集合.

【例题与解题指导】

例 1 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > -1, & \text{①} \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0, & \text{②} \end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①,得 $x > -6$;

由②,得 $x > 0$.

所以,原不等式组化成

$$\begin{cases} x > -6, \\ x > 0, \end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x > 0.$$

此解集在数轴上表示为图 2-1 中 x 轴上粗实线部分.

例 2 解不等式 $-8 < \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5$.

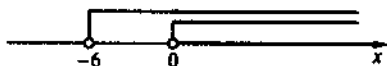


图 2-1

解 不等式两边同乘以 4,得

$$-32 < -3x - 2 - 20 < -20, \text{即 } -32 < -3x - 22 < -20.$$

不等式两边同时加 22,得 $-10 < -3x < 2$,

两边同时除以 -3,得

$$\frac{10}{3} > x > -\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $-\frac{2}{3} < x < \frac{10}{3}$.

说明 本例中的不等式,也可化为不等式组

$$\begin{cases} \frac{-3x-2}{4} - 5 > -8, \\ \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5 \end{cases}$$

来解.

例 3 解不等式 $12x^2 - 5x - 3 > 0$.

解 方程 $12x^2 - 5x - 3 = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

又因为 x^2 的系数是 $12 > 0$, 所以原不等式的解集是 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > \frac{3}{4}$.

例 4 解不等式 $-2x^2 \geq 3x - 4$.

解 原不等式可化成 $2x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

因为方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的根是 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$, 又 x^2 的系数是 $2 > 0$, 所以, 原不等式的解集是 $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$.

例 5 解不等式 $\frac{3x+6}{5x-15} < 0$.

分析 只需分式的分子、分母异号即可, 即 $3x+6$ 与 $5x-15$ 异号, 从而 $(3x+6) \cdot (5x-15) < 0$, 即转化为解一元二次不等式.

解 原不等式同解于

$$(3x+6)(5x-15) < 0.$$

所以原不等式的解为 $-2 < x < 3$.

说明 原不等式两边不能直接同乘以 $5x-15$, 因为 $5x-15$ 的值正、负未定.

想一想, 不等式 $\frac{3x+6}{5x-15} \leq 0$ 的解是什么?

例 6 解不等式 $\frac{3x+2}{x-3} > 1$.

解 移项, 得

$$\frac{3x+2}{x-3} - 1 > 0,$$

整理化简, 得

$$\frac{2x+5}{x-3} > 0,$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3) > 0.$$

方程 $(2x+5)(x-3) = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 3$, 且 $(2x+5)(x-3)$ 中含 x^2 项的系数是 $2 > 0$,

因此, 原不等式的解集为 $x > 3$ 或 $x < -\frac{5}{2}$.

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例 5 的类型再解.

以上两例介绍了分式不等式的解法, 请留意.

例 7 解不等式 $|3-2x| - 5 > 0$.

分析 经过移项, 原不等式化为 $|3-2x| > 5$, 它属于绝对值不等式中的类型(2), 进而去掉绝对值号解之.

如果注意到 $|3-2x| = |2x-3|$, 解之较方便.

解 原不等式化为 $|2x-3| > 5$, 则

$$2x-3 > 5 \text{ 或 } 2x-3 < -5,$$

所以

$$x > 4 \text{ 或 } x < -1 \text{ 为所求不等式的解.}$$

例 8 解不等式 $8 - |3x+5| \geq 0$.

分析 经移项, 原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$, 它属于绝对值不等式中的类型(1), 进而去掉绝

对值号解之.

解 原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$, 则

$$-8 \leq 3x+5 \leq 8, -13 \leq 3x \leq 3,$$

所以 $-\frac{13}{3} \leq x \leq 1$ 为所求不等式的解.

说明 解含绝对值的不等式, 应先判断它是两种类型中的哪一种, 再去掉绝对值号解之.

例 9 若不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, 求 a, b 的值.

分析 从解一元二次不等式的过程考虑.

解 由已知, $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两根, 则

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{a}, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

解之, 得 $a = -12, b = -2$.

例 10 解不等式 $2 < |3x-2| < 3$.

解 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} |3x-2| > 2, & \text{①} \\ |3x-2| < 3. & \text{②} \end{cases}$$

由①, 得 $3x-2 > 2$ 或 $3x-2 < -2$, 则

$$x > \frac{4}{3} \text{ 或 } x < 0. \quad \text{③}$$

由②, 得 $-3 < 3x-2 < 3$,

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}. \quad \text{④}$$

使③, ④同时成立, 得 $-\frac{1}{3} < x < 0$ 或 $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$, 此为原不等式的解.

例 11 解不等式 $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 3$.

解法一 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0, & \text{①} \\ 4x^2 + 4x + 1 < 9. & \text{②} \end{cases}$$

由①, 得 $(2x+1)^2 \geq 0$, 故该不等式的解为全体实数.

由②, 得 $(x+2)(x-1) < 0$, 即 $-2 < x < 1$.

故原不等式的解为 $-2 < x < 1$.

解法二 原不等式可化为 $\sqrt{(2x+1)^2} < 3$, 则

$$|2x+1| < 3,$$

所以

$$-3 < 2x+1 < 3,$$

故原不等式的解为

$$-2 < x < 1.$$