考研数学应试指导（经济类）

KAOYAN SHUXUE YINGSHI ZHIDAO

杨桂元　李天胜 ■ 主编

合肥工业大学出版社

考研数学应试指导

杨桂元　李天胜　主编

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学应试指导/杨桂元，李天胜主编. —合肥：合肥工业大学出版社，2006.6

ISBN 7-81093-413-9

Ⅰ.考… Ⅱ.①杨…②李… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 058940 号

考研数学应试指导

杨桂元　李天胜　主　编　　　　责任编辑　疏利民

出　版	合肥工业大学出版社		版　次	2006 年 7 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号			2006 年 7 月第 1 次印刷
邮　编	230009		开　本	787×1092　1/16
电　话	总编室:0551-2903038		印　张	15.75
	发行部:0551-2903198		字　数	386 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn		发　行	全国新华书店
E-mail	press@hfutpress.com.cn		印　刷	合肥现代印务有限公司

ISBN 7-81093-413-9/O·27　　定价:25.00 元

作者简介

杨桂元，男，1957 年 5 月出生，安徽财经大学统计与应用数学学院教授，数量经济学专业学科组组长兼硕士生导师，数量经济研究所所长。安徽省高校中青年学科带头人培养对象，享受安徽省人民政府特殊津贴。2001 年被教育部授予“全国优秀教师”称号；2003 年被安徽省教育厅授予首届“教学名师”。

省级精品课程“经济数学基础”的负责人。长期从事线性代数、概率论与数理统计、经济应用数学的教学科研工作和考研辅导，具有丰富的教学经验。主编的教材《线性代数》、《概率论与数理统计》获得 2005 年安徽省高校教学成果三等奖。

李天胜，男，1946 年 2 月出生，安徽财经大学统计与应用数学学院副教授，2003 年被评为安徽省优秀教师。省级精品课程“经济数学基础”的第二责任人。长期从事微积分、经济应用数学的教学科研工作和考研辅导，具有丰富的教学经验。主编的教材《微积分》获得 2005 年安徽省高校教学成果三等奖。

前　言

应参加全国经济管理类硕士研究生数学入学考试广大同学的要求，根据教育部最新制定的”全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，我们结合多年来主讲考研辅导班的经验编写了《考研数学应试指导》（经济类）。

本书内容是针对经济管理类硕士研究生数学入学考试，在考生系统掌握微积分、线性代数、概率统计的基本理论与方法的基础上，通过对本书的深入钻研，演算习题，对微积分、线性代数、概率统计的基本概念、理论和运算达到一个温故而知新的效果。增强解题能力，提高应试水平，从而在应考中取得良好的成绩。

本书按照考试大纲的要求分为微积分、线性代数和概率统计三部分，每一部分分为若干章。每一章包括：考试要求、基本内容、常见题型及例题解析、补充练习题和参考答案与提示五部分内容。考试要求是根据教育部最新制定考试大纲归纳的与每一章内容相关的考试要求；基本内容是串讲各章内容的知识要点、基本结论、重要定理和解题方法，充分体现了相关的内在联系；常见题型及例题解析是按内容或方法的内在联系介绍历年硕士研究生数学入学考试试题和典型题目，没有详细给出解题过程，而是按照题目的难易程度不拘形式地给出提示或参考答案，容易的题目没有提示，目的是让考生根据提示自己动手做题目，达到真正锻炼自己解题能力的目的，这也是我们这本书的最大特点；补充练习是给读者提供更多题型练习的机会，并且给出提示或参考答案。实践证明：通过阅读题解掌握解题方法的效果远远不如通过做习题来掌握解题方法。所以，我们将题目和提示提供给读者，由读者尝试给出解题的全部过程，将能明显提高读者的解题能力。本书题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理，可作为考研辅导班的辅导用书或考生自学用书，对本科生及数学工作者也是一本比较好的学习用书或参考书。

本书是在我们多年讲授考研辅导课程的基础上经过多次修改而成，也是安徽省精品课程经济数学基础建设的成果之一。在本书的出版过程中，得到了合肥工业大学出版社疏利民编辑的大力支持，参阅了历年硕士研究生入学统一考试大纲和全国硕士研究生入学数学考试分析，参阅了其他数学考研辅导资料，在此一并致谢！

最后欢迎读者对本书中的错误和不妥之处提出批评意见和建议。

杨桂元　李天胜

2006 年 6 月 28 日

目录

第三部分 概率统计 (189)

第一部分

微积分

第一章 函数

一、考试要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

二、基本内容

1. 函数

设 D 是已知的数集，如果对于每一个 $x \in D$，变量 y 依照规则 f 有唯一的数值与之对应，则称对应规则 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x) \qquad x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，全体自变量 x 的集合 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域，全体因变量 y 的集合 Z 称为函数的值域.

函数"$y = f(x) \quad x \in D$"简称为"函数 $f(x)$"或"函数 f".

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 如果对于每一个 $y \in Z$，存在唯一的 $x \in D$，使 $f(x) = y$，则在 Z 上定义了一个以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为

$$x = f^{-1}(y) \qquad y \in Z \tag{1}$$

如果遵从"自变量用 x 表示，因变量用 y 表示"的习惯将(1)式的 x，y 互换，可得

$$y = f^{-1}(x) \qquad x \in Z \tag{2}$$

其中(1)式称为函数 $y = f(x)$ 的"本义反函数"；(2)式称为函数 $y = f(x)$ 的"矫形反函数". 通常我们所说的反函数，指的都是矫形反函数.

3. 函数的几何特性

奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数；

$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

单调性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$，则

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调增加；

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调减少.

有界性：若存在 $M > 0$，使得对任意的 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，否则，称 $f(x)$ 在 I 上无界.

若存在 $A < B$，使得对任意的 $x \in I$，都有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，也称 $f(x)$ 在 I 上有界.

注：以上概念中的"$\leqslant$"号也可以是"$<$".

周期性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $T \neq 0$，使得对任意的 $x \in I$，满足 $x + T \in I$ 且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是区间 I 上的周期函数，使上式成立的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

4. 复合函数

若 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则当 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$ 时，函数 $y = f[\varphi(x)]$ 称为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，其中 $y = f(u)$ 称为"外层函数"，$u = \varphi(x)$ 称为"内层函数"，x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

5. 初等函数

由六类基本初等函数（常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次的四则运算和有限次的复合运算、并可以用一个式子表示的函数统称为初等函数.

注：幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 也是初等函数，利用对数恒等式可将其转化为 $e^{g(x)\ln f(x)}$ 的形式.

三、常见题型及例题解析

（一）函数的概念

要点：函数表达式的确定.

1. 利用函数概念

【例 1】　若 $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = \frac{3}{x}$，则 $f(x) =$ ________.

提示：令 $\frac{1}{x} = t$ 代入原关系式，并将所得新关系式中的 t 改写为 x，然后解关于 $f(x)$ 的方程组.

答案：$f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

练习：若 $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$，求 $f(x)$ 并注明 a,b,c 应满足的条件.

答案：$f(x) = \frac{c(a - bx^2)}{(a^2 - b^2)x}$　（a、b、c 为非零实数且 $a^2 \neq b^2$）

【例 2】　若 $f(x^2 - 1) = \ln\frac{x^2}{x^2 - 2}$，且 $f[\varphi(x)] = \ln x$，则 $\varphi(x) =$ ________.

提示：先求 $f(x)$，再根据 $f[\varphi(x)] = \ln x$ 求 $\varphi(x)$.

答案：$\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$

【例 3】　(2001) 设 $z = e^{-x} - f(x - 2y)$，且当 $y = 0$ 时，$z = x^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

提示:将 $y=0$ 代入原关系式,解出 $f(x)$,即可写出函数 $z=z(x,y)$ 的表达式.

答案:$z=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{2y-x}+(x-2y)^2,\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2y-x}+2(x-2y)$

2.利用变量替换

【例 4】 (2004)函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中 $g(y)$ 可微且 $g(y)\neq 0$,则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ __________.

提示:令 $\begin{cases}xg(y)=u\\ y=v\end{cases}$,可得 $\begin{cases}x=\dfrac{u}{g(y)}=\dfrac{u}{g(v)}\\ g(y)=g(v)\end{cases}$,然后一并代入原关系式,即可写出函数 $f(u,v)$ 的表达式.

答案:$f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v),\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$

3.求出函数表达式中的未知常数

【例 5】 设 $f(x)=3x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在,求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 及 $f(x)$.

提示:令 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$ 代入原关系式,再对新关系式取 $x\to 0$ 的极限并求出 A 来.

答案:$f(x)=3x^2-6x$

练习:

(1) 若 $f(x)=3x^2+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$ __________.

提示:令 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$ 代入原关系式,再对新关系式作区间[0,1]上的定积分.

答案:$f(x)=3x^2+2x$

(2) 若 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$ __________.

提示:令 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=A$ 代入原关系式,将新关系式两边平方后再作区间[0,1]上的定积分.

答案:$f(x)=3x+3\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x)=3x-\dfrac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$

(3) (1999)设 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 D 由 $y=0$、$y=x^2$ 与 $x=1$ 围成,则 $f(x,y)=$ ( ).

A. xy　　B. $2xy$　　C. $xy+\dfrac{1}{8}$　　D. $xy+1$

提示:令 $\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$ 代入原关系式,再对新关系式作区域 D 上的二重积分.

答案:C

4.含参变量极限所表示的函数

【例 6】 作函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-1)}{x^{2n}+1}$ 的图形,并判断间断点的类型.

提示：n 是极限变量，x 是参变量. 要分别对 $|x|<1$、$|x|=1$、$|x|>1$ 三种情况进行讨论.

答案：$f(x)=\begin{cases}-x & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|>1\end{cases}$，$x=\pm1$ 是第一类跳跃间断点.

【例 7】 (1992) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^{x}$，则 $f'(t)=$ ________.

提示：x 是极限变量，t 是参变量. 求极限时要把参变量 t 暂时当成常数对待.

答案：$f(t)=te^{2t}$，$f'(t)=e^{2t}(2t+1)$

【例 8】 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 的连续性与可导性(此处只求函数表达式).

提示：n 是极限变量，x 是参变量. 要分别讨论 $x<1$、$x=1$、$x>1$ 三种情况.

答案：$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<1\\ \dfrac{1+a+b}{2} & x=1\\ x^2 & x>1\end{cases}$

练习：

(1) 若 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$　$(x>0)$，则 $f(x)=$ ________.

提示：分别讨论 $0<x<1$、$x=1$、$x>1$ 三种情况.

答案：$f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<1\\ 0 & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点是(　　).

A. 不存在　　B. $x=1$　　C. $x=0$　　D. $x=-1$

提示：分别讨论 $|x|<1$、$|x|>1$、$x=1$、$x=-1$ 四种情况.

答案：$f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$，间断点是 $x=1$. 选 B.

5. 变上限定积分与含参变量定积分所表示的函数(第六章讨论)

(二) 反函数

要点：(1) 反函数存在的条件：函数单调；

(2) 反函数的几何意义：对称于直线 $y=x$；

(3) 反函数的重要性质：$f^{-1}[f(x)]=x$，$f[f^{-1}(x)]=x$；

(4) 反函数的求法，特别是分段函数反函数的求法；

(5) 利用反函数求值域.

【例 9】 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，且 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，则 $g(x)$ ________.

提示：求 $f(x)$ 的反函数.

答案：$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

【例 10】 若 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2^x & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，则 $f^{-1}(x)=$ ________.

提示：在各自对应的区间分别求 $f(x)$ 的反函数.

答案：$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 4\\ \log_2 x & 4<x\leqslant 16\end{cases}$

【例 11】 函数 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域为________.

提示：求反函数的定义域.

答案：$(0,1)\cup(1,+\infty)$

【例 12】 设 $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 且 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$ $(n=1,2,3\cdots)$，若 $f_{35}(x)=f_5(x)$，求 $f_{28}(x)$.

提示：利用反函数 $f^{-1}[f(x)]=x$ 的性质，先从递推公式 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$ 中将 $f_n(x)$"解放"出来，得"由大及小"的递推公式 $f_n(x)=f_1^{-1}[f_{n+1}(x)]$，然后逐步由 $f_{35}(x)$ 推出 $f_{28}(x)$.

答案：$f_{28}(x)=\dfrac{1}{1-x}$

（三）函数的几何特性

1. 奇偶性

要点：(1) 奇偶性定义；(2) 奇偶性判别.

常用的结论：

(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数；

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则只有 $f[f(x)]$ 是奇函数，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$ 均为偶函数；

(3) 偶函数的导数是奇函数，奇函数的导数是偶函数；

(4) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数，

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数；

(5) 奇函数的所有原函数都是偶函数，而偶函数的原函数中只有一个是奇函数. 即

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 是偶函数；

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中

当 $C=0$ 时是奇函数；当 $C\neq 0$ 时是非奇非偶函数.

【例 13】 若 $f(x)$ 是可导的奇函数，则下列函数中（ ）是奇函数.

A. $\sin f'(x)$ B. $\int_0^x \sin x \cdot f(t)\mathrm{d}t$ C. $\int_0^x f(\sin t)\mathrm{d}t$ D. $\int_0^x [\sin t + f(t)]\mathrm{d}t$

提示：B 选项中的 $\sin x$ 可提出积分号外.

答案：B

【例 14】（2002）下列函数中（ ）为偶函数.

A. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ B. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$ D. $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

提示：$f(t^2)$ 是偶函数，但 $f^2(t)$ 的奇偶性不确定.

答案：A

【例 15】 $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ 是（ ）函数.

A. 偶 B. 奇 C. 非奇非偶 D. 既奇又偶

提示：方法一：利用奇偶性定义，写出 $f(-x)$ 的表达式并与 $f(x)$ 比较；

方法二：观察 $f(x)$ 的图像是否具有对称性.

答案：A.

【例 16】（1997）若在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $f(-x)=f(x)$，且在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内，有（ ）.

A. $f'(x)>0, f''(x)<0$ B. $f'(x)>0, f''(x)>0$

C. $f'(x)<0, f''(x)<0$ D. $f'(x)<0, f''(x)>0$

提示：根据一、二阶导数的几何意义（单调与凹凸），并利用偶函数的对称性.

答案：C.

【例 17】 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=2^x-1$，则 $f(x)$ = ________.

提示：当 $x<0$ 时，由于 $-x>0$，故可根据已知求出 $f(-x)$ 的表达式，然后再利用奇函数性质求出 $x<0$ 时，$f(x)$ 的表达式.

答案：$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\geqslant 0\\ 1-2^{-x} & x<0\end{cases}$

2. 单调性

要点：（1）单调性定义（常在证明题中使用）；

（2）单调性的判定（第四章讨论）.

关于复合函数单调性的一个结论：

若 $f(x)$ 是增函数，$g(x)$ 是减函数，则 $f[f(x)]$ 与 $g[g(x)]$ 是增函数，$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 是减函数.

（即复合函数的内、外层函数单调性相同时是增函数，相反时是减函数.）

【例 18】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，$g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$，则在区间 $(0,1)$ 内（ ）.

A. $f(x)$ 是增函数，$g(x)$ 是减函数　　B. $f(x)$ 是减函数，$g(x)$ 是增函数

C. $f(x)$、$g(x)$ 都是增函数　　D. $f(x)$、$g(x)$ 都是减函数

答案:B

3. 有界性

要点：

(1) 有界与无界的概念；

(2) 有界的几何解释：函数的图像被“夹”在与 x 轴平行的一组平行线之间；

(3) 无穷大与无界的关系：无穷大一定无界，但无界不一定是无穷大；例如 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界，但不是无穷大.

(4) 极限与有界的关系：

数列极限的整体有界性：收敛数列一定是有界数列.

函数极限的局部有界性：

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$，使 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 空心邻域内有界；
- 若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，则存在 $M > 0$，使 $f(x)$ 在 $|x| > M$ 的区域内有界.

(5) 函数有界性判定法：

极限法：常用于判断函数是否有界；

放大不等式法与最值法：常用于判断函数上、下界的具体值.

【例 19】 (2004) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

提示:由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，故只须研究 $x\to 0, x\to 1, x\to 2$ 以及 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)$ 的极限是否为 ∞ 即可.

答案:A

【例 20】 函数 $f(x) = xe^{-x^2}(2-\cos x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是(　　).

A. 无界的偶函数　　B. 无界的奇函数

C. 有界的偶函数　　D. 有界的奇函数

提示:由对称性，只须研究 $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}$ 是否为 ∞.

答案:D

【例 21】 函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 在其定义域内(　　).

A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

C 有界且 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$　　D. 有界且 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$

提示:方法一：放大不等式法($|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+|x|^2} \leqslant \cdots = \dfrac{1}{2}$).

方法二：最值法. 由对称性，只须求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的最值.

答案:C

【例 22】 证明函数 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

提示:①$f(x)$ 是连续的偶函数;②$f(x)$ 在 $[0,M]$ 上有界;③ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\cdots=\dfrac{1}{2}$.

4. 周期性

要点:周期函数的定义 $f(x+T)=f(x)$(常用于证明某函数为周期函数).

与函数周期性有关的几个结论:

(1) 周期函数的导数是周期函数且周期不变;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数,则

$$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx \qquad (a\in R)$$

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.如 $f(x)=\cos x+1$ 是周期函数,但其原函数 $F(x)=\sin x+x$ 就不是周期函数;

(4) 周期函数之和不一定是周期函数.如 $f(x)=\cos 2x+\sin \pi x$ 中,前者周期为 π,后者周期为 2,不存在“最小公倍数”(注:“最小公倍数”中的“倍数”必须是有理数,因而 2π 不是该函数的周期!可以验证,$f(x+2\pi)\neq f(x)$).

【例 23】 设 $F(x)=f(x)\pm g(x)$,其中 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 α、β 为周期的周期函数,则 $F(x)$( ).

A. 是以 $\alpha\pm\beta$ 为周期的周期函数

B. 是以 $\alpha\beta$ 为周期的周期函数

C. 是以 α 与 β 的最小公倍数为周期的周期函数

D. 是否为周期函数不能确定

提示:与函数周期性有关的结论(4).

答案:D

【例 24】 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期是( ).

A. π B. $\dfrac{\pi}{2}$ C. 2π D. 4π

提示:方法一:化 $f(x)=\sqrt{1+|\sin 2x|}$;

方法二:观察 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的图像.

答案:B.

四、补充练习题

1. 设对任意的 x,有 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$,则 $f(x)=$ ________.

2. 设 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

3. 设 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,且 $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则 $\varphi(x)=$ ________,其定义区间为________.

4. 若对 $x>0$,有 $f(e^x)=1+x$,$f[g(x)]=1+x+\ln x$,则 $g(1)=$ ________.