中学数学教学导论

# 代　数 I

贺昌亭　编著

PEP

人民教育出版社

中学数学教学导论

# 代 数 I

贺昌亭　编著

人民教育出版社

(京)新登字113号

中学数学教学导论

代　数　I

编著　贺昌亭

责任编辑　薛彬

*

人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
北京市房山区印刷厂印装

开本850×1168 1/32　印张15　字数360,000
1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷
印数　1—2,340

ISBN　7-107-10872-7
G·2494　定价6.00元

# 前　言

当前多数中学数学教师已达到或接近“专业合格证书”的水平，他们希望用已学到的某些高等数学的知识去指导自己讲授的中学数学教材(以下简称“教材”)，从而进一步提高专业素质和教学质量. 教育行政部门也积极准备开展中学教师的在职继续教育. 为了适应这个新形势的需要，我们编写了《中学数学教学导论》丛书. 这套丛书共有四册:《代数 I》侧重于经典代数,《代数 II》侧重于概率统计,《几何》侧重于古典几何,《数与函数》侧重于实数集和与函数有关的内容. 这四册书的内容基本上覆盖了“教材”的内容.

这套丛书是中国电视师范学院播放的“中学数学教学导论”课录像带的文字教材. 它同时可作为各类高师院校举办的中学数学教师培训班、进修班等教学用书,也可作为广大中学数学教师自学教材或教学参考书.

我们遵循学用结合和学以致用的编写原则，用某些高等数学的基本内容、思想和方法指导“教材”，帮助中学数学教师,特别是广大的初中数学教师,以较高观点认识“教材”和把握“教材”,从而提高教学能力和教学质量,为基础教育服务.

我们以师专数学专业几门重要基础课为起点，同时也考虑到当前广大初中数学教师的专业现状. 为了帮助他们克服学习这套丛书的困难,不仅在文字叙述上力求通顺易懂，使其具有可读性，而且还简要地引录了某些基础课的内容,使其便于自学. 每章或每节力求从“教材”提出问题,然后用高等数学的内容、思想和方法作

细致的分析和探讨，从而使得知识范围扩大了，使得理论严格了，使得孤立的内容联系了起来，使得司空见惯的问题有了新意，引出了教学和教材上的许多新课题，等等. 由于从“教材”提出的问题升华了，自然就能达到较为深刻理解“教材”的目的.

数学教育有不同的层次. 我们认为培养具有现代数学思想，并能用现代数学思想指导“教材”和教学的中学数学教师，是高师院校数学专业教改的重要课题. 尽管这套丛书距用现代数学思想指导“教材”还有很大距离，但是我们愿意在这套丛书的基础上，进一步探索这个重要课题，与从事高师数学教育的同志们共勉.

这套丛书引用的“教材”是人民教育出版社出版的初级中学课本《代数》第一～四册，《几何》第一、二册和高级中学课本(甲种本)《代数》第一～三册，《立体几何》与《平面解析几何》与《微积分初步》.

人民教育出版社、中国电视师范学院和东北师大电教中心为组织出版这套丛书给予巨大支持. 每册书的责任编辑给予很多具体指导和帮助，审查加工又付出了辛勤劳动. 在此对三个单位和责任编辑一并表示深切感谢.

我们编写这套丛书尚属探索，各册的编写风格也不尽相同，缺点，甚至错误在所难免，恳请读者不吝赐教.

作　者

1991.5

于长春东北师大数学系

# 目　　录

## 第一章　数的扩充知识和方法



## 第二章　代数学的基本概念



## 第三章　消元法

# 第一章　数的扩充知识和方法

在这章里，我们以朴素的方式讨论数的扩充知识和方法. 这样做的目的，一方面在于把数从自然数到复数的逐渐扩充的过程系统化、完整化. 从而使我们对于数的扩充的起因、方法与过程有一个比较清楚的认识；另一方面则在于，在上述的讨论中我们将发现许多在代数学的理论中起着基本作用的概念、观点和方法.

数起源于数(shǔ)，一个一个地数(shǔ)，因而出现了

1,2,3,4,5,….

这就是自然数.

仅有自然数还远远不能满足客观上的需要. 我们有时需要分. 但分不尽怎么办？因而产生了分数，称为正有理数.

仅有正有理数还是不能满足客观上的需要. 我们为了表示具有相反意义的量，很自然地就产生了负数.

到了这样的阶段，我们已经得到了正、负有理数和零. 这些数做为一个整体来看已经达到了某种意义的完备性. 即有理数集对四则运算是封闭的. 通俗一些说，任意两个有理数的和、差、积、商(分母不为0)仍然是有理数.

有理数集的完备性是就相对意义来讲的. 对于客观上不断提出的新问题，又显露出它的不完备之处. 例如，从几何方面来说，有许多线段的长度都不能用有理数表达出来. 边为单位长的正方形的对角线的长度就不能用有理数来表达. 这个问题从代数方面看，就是连最简单的二次方程

$$x^2-2=0,$$

在有理数集的范围内都不能解. 因而，为了解决客观上的一些新问题，就产生了无理数. 有理数和无理数统称为实数.

当然，实数集比有理数集有更多的完备性. 但换个角度来看，还很容易暴露出实数集的不完备之处. 例如，在实数集里，连$-1$这样的数都没有平方根. 这样，还必须引进新数，以适应客观上的需要，因而产生了虚数.

"科学的产生和发展一开始就是由生产决定的". 数的产生和发展自然也是这样的.

关于数的知识，大家已有相当的了解. 这里在原有的基础上做进一步的整理，使我们对数的认识更有条理性. 从而能够较好地进行中学数学中有关数的题材的教学.

## §1.1 自 然 数

这里我们不想从头严格地论述自然数的理论，只从对自然数已有的认识当中明确提出几个基本性质，做为进一步讨论的基础.

### 1.1.1 自然数列

自然数之间有一个关系，我们把它叫做"紧接着"的关系. "紧接着"自然数$a$的自然数记作$a'$. 其实

$$a' = a + 1.$$

自然数之间的"紧接着"的关系具有以下性质:

1) 有这样一个自然数，它不"紧接着"任何自然数. 1就是这样的自然数.

2) 每个自然数都恰有一个"紧接着"它的自然数.

3) 不同的两个自然数，"紧接着"它们的自然数也不同.

4) 如果一部分自然数有如下的性质:

(i) 1 在这部分里；

(ii) 若 $a$ 在这部分里，则“紧接着”$a$ 的自然数 $a'$ 也在这部分里；

那么这部分自然数就是全部自然数.

这样，全部自然数就能一个“紧接着”一个地列举出来：

$$1,2,3,4,5,\cdots.$$

上述的四条性质恰是自然数集所特有的性质. 换个说法：自然数集具有这四条性质；凡具有这四条性质者准是我们所熟悉的自然数集.

### 1.1.2 自然数的运算

**1. 加法**

自然数可以相加. 这种加法使每两个自然数 $a$ 与 $b$ 都能加得一个和：$a+b$，而且有如下的性质：

1) $a+1$ 就是紧接着 $a$ 的那个自然数；

2) $a+b'=(a+b)'$.

**2. 乘法**

自然数可以相乘. 这种乘法使每两个自然数 $a$ 与 $b$ 都能乘得一个积：$a\cdot b$；而且有如下的性质：

1) $a\cdot 1=a$;

2) $a\cdot b'=a\cdot b+a$.

自然数的加法、乘法满足以下算律：

**加法交换律**

$$a+b=b+a;$$

**加法结合律**

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

**乘法交换律**

$$a\cdot b=b\cdot a;$$

**乘法结合律**

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

**分配律**

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

其中 $a,b,c$ 是任意的自然数.

**3. 减法**

对于任意两个自然数 $a$ 与 $b$,如果存在唯一的自然数 $u$, 使得

$$b+u=a,$$

那么就说 $u$ 是 $a$ 减 $b$ 的**差**,记作

$$u=a-b.$$

求差的运算叫做**减法**.

$a$ 减 $b$ 的差不是总存在的($a$ 减 $b$ 的差存在的充分必要条件是 $a>b$). 因而,减法在自然数集上不是可实行的. 换个说法就是自然数集关于减法不是封闭的.

**4. 除法**

对于任意两个自然数 $a$ 与 $b$,如果存在唯一的自然数 $v$,使得

$$a\cdot v=b,$$

那么就说 $v$ 是 $a$ 除 $b$ 的**商**,记作

$$v=\frac{b}{a}.$$

求商的运算叫做**除法**.

$a$ 除 $b$ 的商不是总存在的($a$ 除 $b$ 的商存在的充分必要条件是 $a\backslash b$*)). 因而,除法在自然数集上不是可实行的. 换个说法就是自然数集关于除法不是封闭的.

---

*) 符号 $a\backslash b$ 表示 $a$ 整除 $b$. 即存在自然数 $v$,使得 $a\cdot v=b$.

### 1.1.3 自然数的大小比较

由于自然数可以列举出来:

$$1,2,3,4,5,\cdots.$$

从而在直观上我们完全可以判断两个自然数哪个大，哪个小. 另外，我们也能用数学的方法刻划自然数的大小. 即对任意两个自然数 $a$ 与 $b$,则有

$$a<b \Longleftrightarrow a+u=b,$$

其中 $u$ 是自然数.

自然数之间的大小关系具有如下的性质:

1) 任意两个自然数 $a$ 与 $b$,恰有下列三个关系之一:

$$a=b,a<b,b<a;$$

2) 若 $a<b,b<c$ 则 $a<c$;

如果与自然数的加法、乘法相联系，那么对任意的自然数 $a,b,c$ 还有

3) $a<b \Longleftrightarrow a+c<b+c$;

4) $a<b \Longleftrightarrow ac<bc$.

有时用符号 $a\leqslant b$ 表示 $a=b$ 或者 $a<b$,说成 $a$ 小于等于 $b$. 对于 $a<b(a\leqslant b)$，有时也记作 $b>a(b\geqslant a)$，相应地说成 $b$ 大于 $a$($b$ 大于等于 $a$).

### 1.1.4 自然数的整除问题

由于除法在自然数集上不是可实行的，因而自然数的整除才成了有意义的研讨课题.

**1. 整除的概念及性质**

**定义 1.1.1** 对自然数 $a$ 与 $b$,如果存在自然数 $q$,使得

$$b=aq,$$

则称 $a$ 整除 $b$,记作 $a\backslash b$. 否则就说 $a$ 不整除 $b$,记作 $a\times b$.

按定义，直接可得：

对每一个自然数 $a$，都有

$$1\backslash a,\ a\backslash a;$$

若 $b\backslash a$ 则有 $b\leqslant a$.

进一步可以指出自然数整除的如下性质：

1) $a\backslash b$ 且 $b\backslash a\Longleftrightarrow a=b$;

2) 若 $a\backslash b$ 且 $a\backslash c$ 则 $a\backslash(b+c)$;

3) 若 $a\backslash b$ 或 $a\backslash c$ 则 $a\backslash bc$;

4) 若 $a\backslash b_i$，$k_i$ 是任意的自然数，$i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$a\backslash(k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n);$$

5) 令 $b=c_1+c_2+\cdots+c_{s-1}+c_s$，则有

$$a\backslash b \text{ 且 } a\backslash c_1,\cdots,a\backslash c_{s-1}\Longrightarrow a\backslash c_s;$$

6) 若 $a\backslash b$，$b\backslash c$ 则 $a\backslash c$.

对于自然数的相除来说有所谓的带余除法定理，即

**定理 1.1.1** 对自然数 $a$ 与 $b$，若 $a\leqslant b$，则有

1) 存在唯一的自然数 $q$，使得

$$b=aq,$$

或者

2) 存在一对自然数 $q$ 与 $r$，使得

$$b=aq+r,$$

其中 $1\leqslant r<a$. 并且这样的 $q$ 与 $r$ 只有一对.

**证** 考虑使 $ak\geqslant b$ 的自然数 $k$. 于是，若有自然数 $q$，使得

$$aq=b,$$

易知这样的 $q$ 是唯一的，即 1)成立. 不然，令

$$M=\{k\mid ak>b,k\text{ 是自然数}\}.$$

由于$ab>b$，可知$M$不空. 可令 $k=q+1$ 为$M$中的最小自然数，则有

$$aq<b<a(q+1).$$

从而可得

$$b=aq+r,1\leqslant r<a.$$

最后不难指出这样的 $q$ 与 $r$ 是唯一确定的,即 2)成立. □

如果 $b=aq$ 成立, 即 $a$ 整除 $b$. 这时,$q$ 就是 $a$ 除 $b$ 的商. 如果

$$b=aq+r,1\leqslant r<a$$

成立,即 $a$ 不整除 $b$. 这时,称 $q$ 是 $a$ 除 $b$ 的**部分商**,$r$ 是 $a$ 除 $b$ 的**余数**.

**2. 约数　公约数　最大公约数**

**定义 1.1.2**　设 $a,b,c$ 为任意的自然数.

1) 若 $a\backslash b$, 则称 $a$ 是 $b$ 的约数,或者说 $a$ 是 $b$ 的因数. 这时,也说 $b$ 是 $a$ 的倍数.

2) 若 $a\backslash b,a\backslash c$,则称 $a$ 是 $b$ 与 $c$ 的公约数.

显然, 对任何自然数 $a$,1 与 $a$ 都是 $a$ 的约数. 称 1 与 $a$ 为 $a$ 的**平凡约数**. 此外,如果 $a$ 还有其它的约数 $c$: $c\backslash a$ 且 $c\neq 1$, $c\neq a$, 就说 $c$ 是 $a$ 的**非平凡约数**.

若 $c\backslash a$ 且 $c\neq a$,则称 $c$ 为 $a$ 的**真约数**.

例如,对于 4 来说,1 与 4 是 4 的平凡约数;2 是 4 的非平凡约数. 而 1 与 2 则是 4 的真约数.

2,3,5 这样的自然数只有平凡约数, 而没有非平凡约数. 可是,它们都有真约数. 1 既没有非平凡约数也没有真约数.

**定义 1.1.3**　设 $a$ 与 $b$ 为任意的自然数. 称 $a$ 与 $b$ 的公约数中的最大者为 $a$ 与 $b$ 的最大公约数.

**定理 1.1.2**　任意两个自然数 $a$ 与 $b$ 都有唯一的最大公约数. □

把 $a$ 与 $b$ 的唯一确定的最大公约数记作$(a,b)$.

**定理 1.1.3**　$a\backslash b\Longleftrightarrow(a,b)=a$. □

**定理 1.1.4** 若 $b=au+c$,则有

$$(a,b)=(a,c). \quad \square$$

**定理 1.1.5** 若 $a\nmid b$,则有(不妨认为 $a<b$)

$$\begin{aligned}
&b=aq_1+r_1, && 1\leqslant r_1<a,\\
&a=r_1q_2+r_2, && 1\leqslant r_2<r_1,\\
&r_1=r_2q_3+r_3, && 1\leqslant r_3<r_2,\\
&\quad\vdots\\
&r_{k-3}=r_{k-2}q_{k-1}+r_{k-1}, && 1\leqslant r_{k-1}<r_{k-2},\\
&r_{k-2}=r_{k-1}q_k+r_k, && 1\leqslant r_k<r_{k-1},\\
&r_{k-1}=r_kq_{k+1},
\end{aligned}$$

使得 $r_k=(a,b)$.

**证** 根据定理 1.1.1, 从 $a$ 与 $b$ 开始, 反复地进行带余除法, 便可得到所指的 $k+1$ 个等式.

由定理 1.1.4,可得

$$\begin{aligned}
(a,b)&=(a,r_1)=(r_1,r_2)=(r_2,r_3)=\cdots\\
&\cdots=(r_{k-3},r_{k-2})=(r_{k-2},r_{k-1})=(r_{k-1},r_k).
\end{aligned}$$

再由定理 1.1.3,可得

$$(r_{k-1},r_k)=r_k.$$

从而便得 $r_k=(a,b)$. $\square$

上面的定理说明怎样具体地求出两个自然数 $a$ 与 $b$ 的最大公约数.

两个自然数 $a$ 与 $b$ 的最大公约数还有如下的值得强调的重要性质.

**定理 1.1.6** 设 $a$ 与 $b$ 是任意的两个自然数. 令由 $a$ 与 $b$ 确定的自然数的集合

$I=\{au-bv$ 或 $bu-av\mid u,v$ 是任意自然数$\}$. 取 $d$ 为 $I$ 中的最小自然数,则有

$$d=(a,b).$$

**证** 首先，不妨令 $d=au-bv$，我们来证，$d$ 是 $a$ 与 $b$ 的一个公约数．事实上不难看出 $a$ 与 $b$ 都含在 $I$ 里．因而 $d\leqslant a$, $d\leqslant b$．于是，假如 $d\nmid b$，由带余除法定理，则有

$$b=dq+r, 1\leqslant r<d.$$

从而

$$\begin{aligned} b&=(au-bv)q+r\\ &=auq-bvq+r\\ \Longrightarrow & b+bvq-auq=r\\ & b(1+vq)-auq=r. \end{aligned}$$

这表明 $r$ 含在 $I$ 里，且 $r<d$．这与 $d$ 是 $I$ 中的最小的自然数相矛盾．故而，必有 $d\backslash b$．

完全类似地，可得 $d\backslash a$．即 $d$ 是 $a$ 与 $b$ 的一个公约数．

其次，说明 $d$ 是 $a$ 与 $b$ 的公约数中的最大者．

令 $c\backslash a, c\backslash b$，即有 $a=a_1c, b=b_1c$．于是

$$\begin{aligned} d=au-bv\Longrightarrow d&=a_1cu-b_1cv\\ &=c(a_1u-b_1v) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow c\leqslant d.$$

总之，即得 $d=(a,b)$．□

**定理1.1.7** 令 $d$ 是 $a$ 与 $b$ 的一个公约数．那么，$d$ 是 $a$ 与 $b$ 的最大公约数当且仅当对 $a$ 与 $b$ 的任意一个公约数 $c$，都有 $c\backslash d$．

**证** 充分性是自然的，利用定理 1.1.6可得必要性．□

**定义1.1.4** 若 $(a,b)=1$，则称 $a$ 与 $b$ 互素(互质)．

**定理 1.1.8** $a$ 与 $b$ 互素的充分必要条件是存在自然数 $u$, $v$, 使得

$$au-bv=1 \text{ 或者 } bu-av=1.$$

**证** 利用定理 1.1.6 可得必要性．利用定理 1.1.7 可得充分性．□