

南京邮电大学《高等数学》教研室 编写

高等数学 同步练习册

(下册)



清华大学出版社

高等数学

同步练习册

(下册)

南京邮电大学《高等数学》教研室 编写

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书,与教材体系相同,与教学内容紧密衔接,基本点、重点、难点突出,题型难易程度适中,题目典型,题量适当,注重基本概念、基本定理、基本运算,适当配有提高题,以训练学生的解题技巧。

本练习册分为上下册,内容包括:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等 13 章的习题及期中、期末模拟考试题各四套。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习册. 下/南京邮电大学《高等数学》教研组编写. —北京:清华大学出版社,2006. 10

ISBN 7-302-13632-7

I. 高… II. 南… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093492 号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 客 户 服 务: 010-62776969

责任编辑: 梁 颖

印 刷 者: 北京市清华园胶印厂

装 订 者: 三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185 × 260 印 张: 6.25 字 数: 159 千字

版 次: 2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-13632-7/O · 566

印 数: 1 ~ 5000

定 价: 10.00 元

前 言

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书,具有与教材体系相同,与教学内容紧密衔接,基本点、重点、难点突出,题型难易程度适中,题目典型,题量适当的特点。本练习册选题注重基本概念、基本定理、基本运算,适当配有提高题,以训练学生的解题技巧。通过对该练习册上习题的分析、解答和论证,学生能有目标地进行课后练习,巩固课堂所学内容。

本练习册分为上下册,内容包括:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等 13 章的习题及期中、期末模拟试题各四套。

本练习册的形式为学生的作业本,一方面由于比较规范,便于任课教师批改;另一方面,减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

本练习册第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 9 章、第 10 章、第 13 章由王雪红编写,第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章、第 11 章、第 12 章由欧阳金丽编写,全书由欧阳金丽统稿。

本练习册已在南京邮电大学使用两届,受到师生好评。王建民、邱中华、王晓平、宋洪雪、严珍珍等老师对练习册提出了很多宝贵意见;南京邮电大学教务处、数理学院对本练习册的编写与出版给予了大力支持,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,错误在所难免,恳请老师、同学不吝指正,我们不胜感激。

编 者

2006 年 6 月于南京

目 录

第 7 章 重积分	1	8.5 斯托克斯公式 环流量与旋度	23
7.1 重积分的概念与性质	1	8.6 总习题	24
7.2 二重积分的计算法	2	第 9 章 无穷级数	29
7.2.1 利用直角坐标计算二重积分	2	9.1 常数项级数的概念与性质	29
7.2.2 利用极坐标计算二重积分	3	9.2 常数项级数的审敛法	30
7.3 三重积分	4	9.3 幂级数	33
7.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法	4	9.4 将函数展开成幂级数	35
7.3.2 柱面坐标系下三重积分的计算法	5	9.5 傅里叶级数	36
7.3.3 球面坐标系下三重积分的计算法	6	9.6 一般周期函数的傅里叶级数	38
7.4 重积分的应用	7	9.7 总习题	39
7.5 总习题	8	第 10 章 常微分方程	45
第 8 章 曲线积分与曲面积分	15	10.1 常微分方程的基本概念	45
8.1 曲线积分	15	10.2 一阶微分方程	45
8.1.1 对弧长的曲线积分	15	10.2.1 一阶微分方程(一)	45
8.1.2 对坐标的曲线积分	16	10.2.2 一阶微分方程(二)	46
8.2 格林公式及其应用	17	10.2.3 一阶微分方程(三)	47
8.3 曲面积分	19	10.3 高阶线性微分方程	48
8.3.1 对面积的曲面积分	19	10.3.1 高阶线性微分方程(一)	48
8.3.2 对坐标的曲面积分	21	10.3.2 高阶线性微分方程(二)	50
8.4 高斯公式 通量与散度	22	10.4 总习题	52

第 11 章 复变函数与解析函数	55	第 13 章 复变函数的级数与留数定理	71
11.1 复数及其运算	55	13.1 复变函数项级数	71
11.2 复变函数	56	13.2 泰勒级数	72
11.3 解析函数	57	13.3 洛朗级数	73
11.4 初等函数	58	13.4 留数与留数定理	74
11.5 总习题	59	13.5 总习题	76
第 12 章 复变函数的积分	63	高等数学(下)期中模拟试卷(一)	79
12.1 复变函数积分的概念	63	高等数学(下)期中模拟试卷(二)	83
12.2 基本积分定理	64	高等数学(下)期末模拟试卷(一)	87
12.3 基本积分公式	65	高等数学(下)期末模拟试卷(二)	91
12.4 解析函数与调和函数的关系	66		
12.5 总习题	67		

第7章 重积分

7.1 重积分的概念与性质

1. 确定积分 $I = \iint_{|x|+|y| \leq \frac{1}{2}} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\right) dx dy$ 的正负号。

2. 根据重积分性质比较下列积分的大小

(1) $\iint_D \ln(x+y) dx dy$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dv$ 与 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域。

3. 利用重积分性质估计下列积分值

(1) $I = \iint_D (x+1)^y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$;

(2) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(3) $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ 。

7.2 二重积分的计算法

7.2.1 利用直角坐标计算二重积分

1. 填空题(在直角坐标系下,化二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$ 为二次积分)

$$(1) D: \begin{cases} y^2 \leq 4x \\ x \leq y \end{cases}, \iint_D f(x,y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 或 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) D: \begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \iint_D f(x,y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 或 } \underline{\hspace{2cm}};$$

交换下列二次积分的积分次序:

$$(3) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^{2x+1} f(x,y) dy + \int_0^1 dx \int_{2x-1}^1 f(x,y) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 计算下列二重积分

$$(1) \iint_D (x+x^3y^2) dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\};$$

$$(2) \iint_D \cos(x+y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x=0, y=\pi, \text{ 及 } y=x \text{ 所围成的区域}.$$

3. 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积。

4. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2, x=y$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x,y) = x^2+y^2$, 求该薄片的质量。

$$5. \text{ 设 } f(x) \in [0, a] \text{ 证明: } \int_0^a dx \int_0^x f(x)f(y) dy = \frac{1}{2} \left[\int_0^a f(x) dx \right]^2.$$

7.2.2 利用极坐标计算二重积分

1. 填空题(化下列二次积分为极坐标形式的二次积分)

(1) $\int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y) dx = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2) dy = \underline{\hspace{2cm}};$

(4) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x \sqrt{x^2+y^2} dy = \underline{\hspace{2cm}};$

(5) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 利用极坐标计算下列不定积分

(1) $\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4-(x^2+y^2)}},$ 其中 $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 2;$

(2) $\iint_D (x+y) d\sigma,$ 其中 $D: x^2+y^2-2Rx \leq 0;$

(3) $\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} d\sigma,$ 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1, x > 0, y > 0.$

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=2ax (a > 0)$ 所包围的且在柱面内部的体积。

7.3 三重积分

7.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题(化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)

(1) Ω : 由曲面 $xy = z$ 及 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = 0, z = x + y + 10$ 所围成的闭

区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) Ω : 由曲面 $3x^2 + y^2 = z$ 及 $z = 1 - x^2$ 所围成的闭区域

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dv$, 其中 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

(2) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的第一象限内的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z = 0, y = z, y = 1$ 以及抛物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域。

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^3$ 。

7.3.2 柱面坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题 (在柱面坐标系下化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)

(1) Ω : 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = R (R > 0)$ 所围成的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____;

(2) Ω : 由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 及 $3z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____;

(3) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成的在第一象限内的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____。

2. 利用柱面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及 $z = 5$ 所围的区域;

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 6$ 所围的区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是 $2z = x^2 + y^2$ 及 $z = 2, z = 8$ 所围的区域。

3. 利用三重积分计算 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体的体积。

7.3.3 球面坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题 (在球面坐标系下化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)

(1) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____;

(2) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ 及 $x^2 + y^2 \leq z^2$ 所围成的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____;

(3) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 及 $z \geq 0$ 所围成的闭区域 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$ _____。

2. 利用球面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围的区域;

(2) $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$, 其中 Ω 是 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的球体;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是 $2 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 4$ 及 $z \geq 0$ 所围的区域。

3. 利用三重积分计算 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含 z 轴的部分) 所围成的立体的体积。

7.4 重积分的应用

1. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三个坐标面所割部分的面积, 其中 $a, b, c > 0$ 。

2. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被抛物柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的面积。

3. 设薄片所占的闭区域 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0$, 求均匀薄片的质心。

4. 已知球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$, 其上任一点的密度在数量上等于该点到原点的距离的平方, 试求这个球体的质心。

5. 设均匀薄片(面密度 $\mu = 1$) 所占的闭区域 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 求其对 y 轴的转动惯量 I_y 。

6. 已知均匀圆柱体的底半径为 R , 高为 H , 求其对母线的转动惯量。

7.5 总 习 题

1. 填空题

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dv = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 选择题

(1) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy =$

()

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$

(D) 0

(2) 设 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 且 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$,

则 $a =$ ()

(A) 1 (B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (C) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (D) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

(3) 设有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有

()

(A) $\iiint_{\Omega} x dv = 4 \iiint_{\Omega_1} x dv$ (B) $\iiint_{\Omega} y dv = 4 \iiint_{\Omega_1} y dv$

(C) $\iiint_{\Omega} z dv = 4 \iiint_{\Omega_1} z dv$ (D) $\iiint_{\Omega} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xyz dv$

3. 计算下列二重积分

(1) $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 16$;

(2) $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与 x 轴、 y 轴围成的区域;

(4) $\iint_D xy dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$.

(3) $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$;

4. 计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x^3 + y^3 + z^3) dv$, 其中 Ω 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z (z \geq 0)$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成的区域;

- (2) $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 是由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体;
- (4) $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是两个球: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 的公共部分。

- (3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 围成的空间区域;

5. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

-
6. 计算由曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ 所围的立体 Ω 的体积 ($a > 0$)。
7. 计算由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 和抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$) 所围立体的全表面积。