南京邮电大学《高等数学》教研室　编写

高等数学 同步练习册

（下册）

清华大学出版社

高等数学
同步练习册
（下册）

南京邮电大学《高等数学》教研室　编写

清华大学出版社
北京

内容简介

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书，与教材体系相同，与教学内容紧密衔接，基本点、重点、难点突出，题型难易程度适中，题目典型，题量适当，注重基本概念、基本定理、基本运算，适当配有提高题，以训练学生的解题技巧。

本练习册分为上下册，内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等13章的习题及期中、期末模拟考试题各四套。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习册．下/南京邮电大学《高等数学》教研组编写．—北京：清华大学出版社，2006.10

ISBN 7-302-13632-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．南…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093492 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：梁　颖

印 刷 者：北京市清华园胶印厂

装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：185×260　**印张**：6.25　**字数**：159 千字

版　次：2006 年 10 月第 1 版　2006 年 10 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-13632-7/O・566

印　数：1～5000

定　价：10.00 元

前言

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书，具有与教材体系相同，与教学内容紧密衔接，基本点、重点、难点突出，题型难易程度适中，题目典型，题量适当的特点。本练习册选题注重基本概念、基本定理、基本运算，适当配有提高题，以训练学生的解题技巧。通过对该练习册上习题的分析、解答和论证，学生能有目标地进行课后练习，巩固课堂所学内容。

本练习册分为上下册，内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等 13 章的习题及期中、期末模拟考试题各四套。

本练习册的形式为学生的作业本，一方面由于比较规范，便于任课教师批改；另一方面，减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

本练习册第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 9 章、第 10 章、第 13 章由王雪红编写，第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章、第 11 章、第 12 章由欧阳金丽编写，全书由欧阳金丽统稿。

本练习册已在南京邮电大学使用两届，受到师生好评。王建民、邱中华、王晓平、宋洪雪、严珍珍等老师对练习册提出了很多宝贵意见；南京邮电大学教务处、数理学院对本练习册的编写与出版给予了大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，错误在所难免，恳请老师、同学不吝指正，我们不胜感激。

编　者

2006 年 6 月于南京

目　录

第 7 章　重　积　分

7.1　重积分的概念与性质

1. 确定积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant\frac{1}{2}}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的正负号。

2. 根据重积分性质比较下列积分的大小

(1) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$；

(2) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)^2\mathrm{d}v$ 与 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域。

3. 利用重积分性质估计下列积分值

(1) $I=\iint\limits_D(x+1)^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$；

(2) $I=\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $I=\iiint\limits_\Omega\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2-1}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$。

7.2 二重积分的计算法

7.2.1 利用直角坐标计算二重积分

1. 填空题$\left(\text{在直角坐标系下,化二重积分}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\text{为二次积分}\right)$

(1) $D:\begin{cases}y^2\leqslant 4x\\ x\leqslant y\end{cases}$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ __________或__________;

(2) $D:\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ x-y\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases}$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ __________或__________;

交换下列二次积分的积分次序:

(3) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ __________;

(4) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=$ __________;

(5) $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1}^{2x+1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}y=$ __________。

2. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D(x+x^3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$;

(2) $\iint\limits_D\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $x=0$, $y=\pi$,及 $y=x$ 所围成的区域。

3. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积。

4. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $x=y$ 和 x 轴所围成,它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量。

5. 设 $f(x)\in[0,a]$ 证明:$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$。

7.2.2　利用极坐标计算二重积分

1. 填空题(化下列二次积分为极坐标形式的二次积分)

(1) $\int_0^{2R}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x =$ __________;

(2) $\int_0^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y =$ __________;

(3) $\int_0^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}y =$ __________;

(4) $\int_0^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y =$ __________;

(5) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}\mathrm{d}x\int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y =$ __________。

2. 利用极坐标计算下列不定积分

(1) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$,其中 D: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$;

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D: $x^2+y^2-2Rx\leqslant 0$;

(3) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$,其中 D: $x^2+y^2\leqslant 1, x>0, y>0$。

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$ 所包围的且在柱面内部的体积。

7.3 三重积分

7.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题(化三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分)

(1) Ω: 由曲面 $xy=z$ 及 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________;

(2) Ω: 由曲面 $x^2+y^2=4$ 及平面 $z=0, z=x+y+10$ 所围成的闭区域$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________;

(3) Ω: 由曲面 $3x^2+y^2=z$ 及 $z=1-x^2$ 所围成的闭区域

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________。

2. 计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$,其中$\Omega$: $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的第一象限内的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由平面 $z=0, y=z, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

3. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,证明: $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^3$。

7.3.2　柱面坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题 (在柱面坐标系下化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分)

(1) Ω：由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=R(R>0)$ 所围成的闭区域 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________；

(2) Ω：由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及 $3z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________；

(3) Ω：由曲面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一象限内的闭区域 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________。

2. 利用柱面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及 $z=5$ 所围的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是 $z=x^2+y^2$ 及 $z=6$ 所围的区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是 $2z=x^2+y^2$ 及 $z=2, z=8$ 所围的区域。

3. 利用三重积分计算 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积。

7.3.3 球面坐标系下三重积分的计算法

1. 填空题$\left(\text{在球面坐标系下化三重积分}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\text{为三次积分}\right)$

(1) Ω：由曲面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的闭区域$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________；

(2) Ω：由曲面$x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 4$及$x^2+y^2\leqslant z^2$所围成的闭区域

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________；

(3) Ω：由曲面$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$及$z\geqslant 0$所围成的闭区域

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________。

2. 利用球面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$的球体；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是$2\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant 4$及$z\geqslant 0$所围的区域。

3. 利用三重积分计算$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$及$x^2+y^2=z^2$（含z轴的部分）所围成的立体的体积。

7.4　重积分的应用

1. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三个坐标面所割部分的面积，其中$a$，$b$，$c>0$。

2. 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被抛物柱面$z^2=2x$所割下部分的面积。

3. 设薄片所占的闭区域D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，$y\geqslant 0$，求均匀薄片的质心。

4. 已知球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$，其上任一点的密度在数量上等于该点到原点的距离的平方，试求这个球体的质心。

5. 设均匀薄片（面密度$\mu=1$）所占的闭区域D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，求其对$y$轴的转动惯量$I_y$。

6. 已知均匀圆柱体的底半径为R，高为H，求其对母线的转动惯量。

7.5 总 习 题

1. 填空题

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________；

(2) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v=$ __________。

2. 选择题

(1) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ （　　）

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(D) 0

(2) 设 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，且 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$，则 $a=$ （　　）

(A) 1　(B) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$　(C) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$　(D) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

(3) 设有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0\}$，$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$，则有 （　　）

(A) $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v$　(B) $\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v$　(D) $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v$

3. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 16$；

(2) $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1(a>0,b>0)$ 与 x 轴、y 轴围成的区域；

(3) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant R^2$；

(4) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2=2x+2y-1$。

4. 计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_\Omega (x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是半球面 $x^2+y^2+z^2=2z(z\geqslant 0)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,其中 Ω 是由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 围成的空间区域;

(4) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$,其中 Ω 是两个球:$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz\ (R>0)$ 的公共部分。

5. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片,为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上,问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

6. 计算由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ 所围的立体 Ω 的体积 $(a>0)$。

7. 计算由球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az(a>0)$ 所围立体的全表面积。