ZHAOQINGGAOZHONGDAOXUE

配新课标人教版

肇庆高中导学

数学

A版系列1-1（选修）

南方出版社

[redacted]

前言 QIAN YAN

美国有个叫摩根的人，据说他不怎么会讲课，但却能把教材内容设计成一个个问题，让学生照着去做，结果学生不仅学得好而且乐意学，后来他竟成为美国著名的教育家。近年来“洋思中学”的名字几乎响彻了中国大地，在这个学校，老师上课从不教给学生现成的东西，而是将课本知识转化成问题，让学生通过解决问题来掌握知识，形成能力。这里，我们不想去探究摩根的教育思想和洋思的课改经验，但却悟出了一个浅显而又深刻的道理：那就是学生自己思索得出的东西，比老师现成说出的东西印象要深刻得多，效果要好得多。

目前围绕新课标教材编写的教辅书，可算的上琳琅满目，但内容方面却大同小异，真正“编”出特色和新意的并不多见。教辅书就如同一个身边的老师，他能告诉你问题的结果、答题的步骤、解题的思路和方法，帮助你理解知识、学会运用、提升能力。但这也和老师上课一样，不同的老师，上课效果是不同的。好老师能使你记忆犹新，轻松乐学，事半功倍；不好的老师则反之。基于这种思考，我们深入研究了最新的课改方向和高考动态，汇集了最先进的教研成果及课标教材使用情况，全力打造出一套完全体现新课标理念，透彻解读高中新课标教材，重在培养学生学科素养和学习能力的全新式助学用书——肇庆高中导学新课标版。

本丛书按照**“教材内容问题化，基本知识能力化”**的编写思路，将“导学”与“学案”特点并重凸显，力图体现这样的理念：一是立足于学生自主学习、自主探索，以学案方式将教材内容问题化，通过一系列问题的解决使学生的学习能力得到升华；二是重在方法立说和学法指导，目的是教会学生学习——会读、会记、会想(思)、会练(做)，最终达到会考的目的。丛书主体栏目在对教材内容的处理上，设计情景问题，注重形式创新，并采用大单元、小课时(或节)的编写模式，做到与课堂教学同步，起到堂堂达标的作用。

本丛书具有以下特点:

【源于基础,构建网络】深入挖掘教材的基础知识和基本能力点,并梳理知识间的内在联系,使零散、孤立的知识交汇,编制成具有系统性、条理性的网络结构,便于学生学习、记忆、检索、提取和应用。

【贴近学生,激活思维】丛书内容及难度贴近学生的实际水平,贴近学生的经验和心理。各科内容以本学科为核心,将触角伸向其他学科和现实社会,联系当前生产和生活实际,拓宽学生的认知领域和思维空间,挖掘知识技能并激活潜在的智力因素。

【循序渐进,逐级提升】本丛书遵循由浅入深、由易到难的原则,例题和练习题设置合理、注重梯度,能够兼顾不同层面和水平的学生,既让一般学力水平的"吃好",又能使学有余力的"吃饱"。尊重个体,照顾差异,是现代教育理念下人本思想的一个重要体现。

【思想统一,风格各异】各科既遵循统一的设计思想和编写理念,又在突出核心栏目的基础上彰显学科特点,在栏目组合、体例设置、布局谋篇上形成各自独特的风格,使九科分册异彩纷呈、百花争妍,又自然和谐地组成一个有机的整体。

总之,本丛书以超前的理念、创新的品质、高效的策略、实用的价值,引领广大师生进入学习的最佳境界。也许当您用过这本书后才会知道:原来学习竟可以这样轻松、有趣!

诚然,我们还不成熟,我们正在成长;因为成长,我们才具有生命力!因为成长,才更需要大家的呵护!请把您使用过程中发现的欠缺和不足记录下来,告诉我们,我们会虚心倾听,努力改进。请记住,您的意见对我们很重要噢。

编　者
2005 年 9 月

目录 MU LU

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

1.1.1　命题

自学导引

1. 一般地，我们把用________、________或________表达的，可以判断________的________叫做命题(proposition).

2. 判断为________的语句叫做真命题(true proposition).

判断为________的语句叫做假命题(false proposition).

3. 在数学中，"若 p 则 q"是命题的常见形式，其中 p 叫做命题的________，q 叫做命题的________.

疑难剖析

问题 1：怎样判断一个语句是否是命题？

【例 1】判断下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)末位是 0 的整数能被 5 整除.

(2)平行四边形的对角线相等且互相平分.

(3)两直线平行则斜率相等.

(4)$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A=\angle B$，则 $\sin A=\sin B$.

(5)余弦函数是周期函数吗？

解：(1)是命题，真命题.

(2)是命题，假命题.

(3)是命题，假命题.

(4)是命题，真命题.

(5)不是命题.

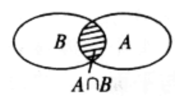
启示：判断一个语句是否是命题，根据命题的定义，要看它是否符合两个条件：(1)陈述句；(2)可以判断真假. 这两个条件缺一不可.

问题 2：怎样判断一个命题的真假？

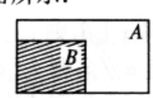
【例 2】(2004 年湖北，理)设 A、B 为两个集合，下列四个命题：①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in A$，有 $x\in B$；②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$. 其中真命题的序号是________.(把符合要求的命题的序号都填上)

解析：$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，有 $x\notin B$，故①错误；②错误；④正确.

亦或如图所示.



③反例如图所示.



$A\not\subseteq B\Rightarrow A\not\supseteq B$. 反之，同理.

答案：④

启示：熟练运用韦恩图解集合运算题可有事半功倍的效果.

问题 3：请介绍一下命题的"若 p 则 q"形式.

【例 3】指出下列命题的条件 p 和结论 q.

(1)若空间四边形为正四面体，则顶点在底面上的射影为底面的中心；

(2)若两条直线 a 和 b 都和直线 c 平行，则直线 a 和直线 b 平行.

解:(1)条件 p:空间四边形为正四面体.结论 q:顶点在底面上的射影为底面的中心.

(2)条件 p:两直线 a 和 b 都和直线 c 平行.结论 q:直线 a 和 b 平行.

【例 4】将下列命题改写成"若 p 则 q"的形式，并判断真假.

(1)偶数能被 2 整除；

(2)奇函数的图象关于原点对称；

(3)同弧所对的圆周角不相等.

解:(1)若一个数是偶数，则它能被 2 整除.真命题.

(2)若一个函数是奇函数，则它的图象关于原点对称.真命题.

(3)若两个角为同弧所对的圆周角，则它们不相等.假命题.

拓展迁移

【例题】指出下列命题的真假：

(1)命题:"不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 没有实数解"；

(2)命题:"$A \nsubseteq (A\cup B)$".

解析:(1)此命题是假命题，因为不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 有一个解:$x=-2$.

(2)此命题是假命题，因为根据并集的定义:$A\subseteq(A\cup B)$.

【拓展】(2004 年上海卷，第 13 题)在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中，真命题是 ……………………………… (　　)

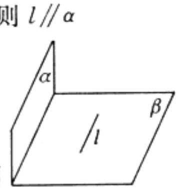
A. 若 $l\subset\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$

B. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha/\!/\beta$，则 $l\perp\alpha$

C. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l/\!/\alpha$

D. 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l/\!/m$，则 $l/\!/\alpha$

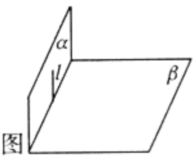
解析:A 不正确，如图



，$l\subset\beta$.

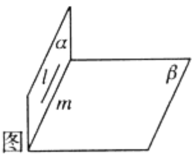
B 正确.

C 不正确，如图



，$l\subset\alpha$.

D 不正确，如图



，此时 $l\subset\alpha$.

答案:B

自我检测

1. 下列语句中是命题的是 …………… (　　)

A. $|x+a|$　　B. $\{0\}\in\mathbf{N}$

C. 元素与集合　　D. 真子集

2. 若 A、B 是两个集合，则下列命题中的真命题是 ……………………………… (　　)

A. 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$

B. 如果 $A\cap B=A$，那么 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

C. 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cup B=A$

D. 如果 $A\cup B=A$，那么 $A\subseteq B$

3. 下列命题中是假命题的是 ………… (　　)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

D. $5>3$

4. 下列语句中命题的个数是 ………… (　　)

①地球上的四大洋　②$-5\in\mathbf{Z}$　③$\pi\notin\mathbf{R}$

④"我国的小河流"可以组成一个集合

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 同住一间寝室的四名女生，她们当中有一人在修指甲，一人在看书，一人在梳头发，另一人在听音乐.①A 不在修指甲，也不在看书；②B 不在听音乐，也不在修指甲；③如果 A 不在听音乐，那么 C 不在修指甲；④D 既不在看书，也不在修指甲；⑤C 不在看书，也不在听音乐.若上面的命题都是真命题，问她

们各在干什么？

A 在______，B 在______，C 在______，D 在______.

6. ①若 $xy=1$，则 x、y 互为倒数；②四条边相等的四边形是正方形；③平行四边形是梯形；④若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$. 其中真命题的序号是______.

7. 将下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并判断其真假.

(1)正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角全相等；

(2)末位数字是 0 或 5 的整数能被 5 整除.

8. 设有两个命题：p：不等式 $|x|+|x-1|\geqslant m$ 的解集为 $\mathbf{R}$；q：函数 $f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数. 若这两个命题中有且只有一个真命题，求实数 m 的范围.

规律小结

1. 通过本节知识的学习，掌握命题、真假命题的概念，能够根据定义判断什么是命题，以及命题的真假性.

2. 掌握并能够熟练应用命题的真假性求字母的值或参数的范围.

3. 能够分清命题的条件和结论，并且会把命题写成“若 p 则 q”的形式.

1.1.2～1.1.3　四种命题及相互关系

自学导引

四种命题
- 原、逆、否、逆否命题
- 四种命题的关系
- 反证法

1. 一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的______和______，那么我们把这样的两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题叫做______(original proposition)，另一个命题叫做原命题的______(inverse proposition).

2. 若原命题为“若 p 则 q”，则它的逆命题为“______”.

3. 对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好为另一个命题的______和______，把这样的两个命题叫做互否命题. 如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个命题叫做原命题的______(negative proposition).

4. 若原命题为“若 p 则 q”，则它的否命题为“______”.

5. 对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的______和______，我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题，其中一个命题叫做原命题，则另一个命题叫做原命题的______(inverse and negative proposition).

6. 若原命题为“若 p 则 q”，则它的逆否命题为______.

7. 两个命题互为逆否命题，它们是______具有______.

8. 两个命题为______或______，它们的真假性没有关系.

9. 用反证法证明命题的一般步骤是：

(1)____；

(2)____；

(3)____.

疑难剖析

问题 1：怎样理解四种命题的概念？

【例 1】在空间中，①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.（把符合要求的命题序号都填上）

解析：①的逆命题是：若四点中任何三点都不共线，则这四点不共面. 显然不正确.

②的逆命题是：若两条直线是异面直线，则这两条直线没有公共点. 为真命题.

答案：②

启示：本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识，考查命题的有关概念.

【例 2】写出下列命题的否定和否命题.

(1)正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角全相等；

(2)零的平方等于零.

分析：本题的关键是弄清命题的否定，即 $\neg p$ 与否命题的区别，命题的否定是对命题的结论加以否定，而否命题是对命题的条件和结论都加以否定.

解：(1)命题的否定：正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角不全相等.

否命题：不是正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角不全相等.

(2)命题的否定：零的平方不等于零.

否命题：不等于零的数的平方不等于零.

启示：求命题的否定需注意将命题中的关键词语改成它的否定词组. 下面把常用的一些词语和它的否定词语对照列表如下：

原词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是
原词语	都是	至多有一个	至多有 n 个	至少有一个
否定词语	不都是	至少有两个	至少有 $n+1$ 个	一个也没有
原词语	任意的	能	p 或 q	
否定词语	某个	不能	p 且 q	

问题 2：怎样用反证法证明命题？

【例 3】若 a、b、c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，求证：a、b、c 中至少有一个大于 0.

分析：利用反证法证明.

证明：(用反证法)假设 a、b、c 都不大于 0，即 $a\leqslant0$，$b\leqslant0$，$c\leqslant0$，则 $a+b+c\leqslant0$，而 $a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$，

$\because \pi-3>0$，且 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant0$，

$\therefore a+b+c>0$. 这与 $a+b+c\leqslant0$ 矛盾，因此，a、b、c 中至少有一个大于 0.

启示：含有"至多""至少"类型的命题常用反证法证明.

【例 4】已知 a、b、c 是一组勾股数即 $a^2+b^2=c^2$，求证：a、b、c 不可能都是奇数.

分析：利用反证法证明.

证明：假设 a、b、c 都是奇数.

$\because a$、b、c 是一组勾股数，$\therefore a^2+b^2=c^2$. ①

$\because a$、b、c 都是奇数，$\therefore a^2$、b^2、c^2 也都是奇数.

$\therefore a^2+b^2$ 是偶数. 这样①式的左边是偶数，右边是奇数，产生矛盾. $\therefore a$、b、c 不可能都是奇数.

启示：命题以否定的形式出现常选用反证法证明.

拓展迁移

【例题】已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上

的增函数，a、$b\in \mathbf{R}$，对命题“若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

(1)写出其逆命题，判断其真假，并证明你的结论；

(2)写出其逆否命题，判断其真假，并证明你的结论.

分析：利用四种命题的定义.

解：(1)逆命题是：若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$. 真命题.

用反证法证明：假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，$b<-a$.

$\because f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，则 $f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$，$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$. 这与题设相矛盾.

$\therefore$逆命题为真.

(2)逆否命题：若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则 $a+b<0$. 真命题.

$\because$一个命题$\Leftrightarrow$它的逆否命题，$\therefore$可证明原命题为真命题.

$\because a+b\geqslant 0$，$\therefore a\geqslant -b$，$b\geqslant -a$.

又$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数，

$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

$\therefore$逆否命题为真.

启示：互为逆否命题的两个命题，在证明一个的真假性时，可证明它的等价命题.

【拓展】写出命题“若 $x+y<5$，则 $x<2$ 或 $y<3$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

分析：利用四种命题的定义.

解：逆命题：若 $x<2$ 或 $y<3$，则 $x+y<5$. 假命题.

否命题：若 $x+y\geqslant 5$，则 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$. 假命题.

逆否命题：若 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$，则 $x+y\geqslant 5$. 真命题.

启示：首先应正确判断出命题的条件和结论，特别是否命题是对命题的条件和结论同时否定.

自我检测

1. 若命题 p 的否命题为 r，命题 r 的逆命题为 s，则 s 是 p 的逆命题 t 的 …………（　　）

A. 逆否命题　　B. 逆命题

C. 否命题　　D. 原命题

2. 当命题“若 p 则 q”为真时，下列命题中一定正确的是 ……………………………（　　）

A. 若 q 则 p　　B. 若 $\neg p$ 则 $\neg q$

C. 若 $\neg q$ 则 $\neg p$　　D. p 且 q

3. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中 ……………………（　　）

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数也可能是偶数

D. 以上判断均不正确

4. 给定下列命题：

①“若 $k>0$，则方程 $x^2+2x-k=0$ 有实根”；②“若 $a>b$，则 $a+c>b+c$”的否命题；③“矩形的对角线相等”的逆命题；④“若 $xy=0$，则 x、y 中至少有一个为 0”的否命题.

其中真命题的序号是________.

5. 命题“若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$”的否命题是________，逆否命题是________.

6. 把命题“当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$”写成“若 p 则 q”的形式，并写出它的逆命题、否命题与逆否命题，并判断其真假.

7. 写出命题“已知 a、b、c、d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

8. 如果一条直线和两条平行线中的一条是异面直线，且不与另一条直线相交，那么这条直线与另一条直线也是异面直线.

规律小结

1. 关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以作如下表述：

交换原命题的条件和结论，所得的命题是逆命题；

同时否定原命题的条件和结论，所得的命题是否命题；

交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题是逆否命题.

(1)一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式就是：

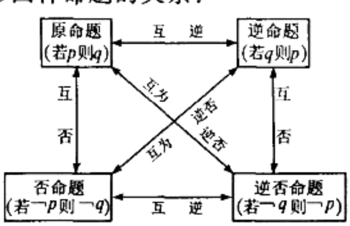
原命题：若 p 则 $q(p\Rightarrow q)$；

逆命题：若 q 则 $p(q\Rightarrow p)$；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q(\neg p\Rightarrow \neg q)$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p(\neg q\Rightarrow \neg p)$.

(2)四种命题的关系：



(3)学习四种命题关键在于了解命题的结构，掌握四种命题的组成及互为逆否命题的等价性，即原命题⇔它的逆否命题，原命题的否命题⇔原命题的逆命题. 因此，判断四种命题的真假时，可只判断其中的两个.

(4)否命题和命题的否定是两个易混的问题，要注意其区别，另外要掌握一些常见词的否定词.

2. 以下几种形式的命题常用反证法证明：

(1)某些命题的结论是否定形式，如不是、不能、不存在等；

(2)某些命题的结论以至少、至多、唯一等形式出现；

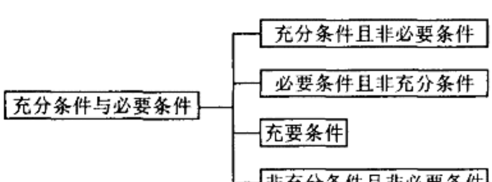
(3)某些命题的结论的反面非常明显或结论的反面容易证明；

(4)某些命题的直接证法较困难. 有些命题，虽然其表面似乎不是以上形式，但本质上仍属以上形式，或很容易化归为以上形式的命题均可用反证法证明.

3. 用反证法证明有一个步骤是得出矛盾，一般有三种：一是与原命题的已知条件矛盾；二是与自身矛盾；三是与另一个已知的真命题矛盾.

1.2　充分条件与必要条件

自学导引



1. 一般地，“若 p 则 q”为真命题，即由 $p\Rightarrow q$ 就说 p 是 q 的______(sufficient condition)，q 是 p 的______(necessary condition).

2. 若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$ 则 $p\Leftrightarrow q$ 就说 p 是 q 的______，简称充要条件. 那么 q 也是 p 的______.

3. 如果命题“若 p 则 q”为真，记作 p ______ q，“若 p 则 q”为假，记作______.

4. 如果已知 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的______，q 是 p 的______.

5.如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的________，记作________.

疑难剖析

问题 1:怎样判断 p 是 q 的什么条件?

【例 1】在下列各题中，判断 A 是 B 的什么条件，并说明理由.

(1)A:$|p|\geqslant 2$，$p\in\mathbf{R}$，B:方程 $x^2+px+p+3=0$ 有实根;

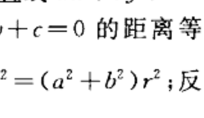
(2)A:圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，B:$c^2=(a^2+b^2)r^2$.

解:(1)当 $|p|\geqslant 2$ 时，例如 $p=3$，则方程 $x^2+3x+6=0$ 无实根，而方程 $x^2+px+p+3=0$有实根，必有 $p\leqslant -2$ 或 $p\geqslant 6$，可推出 $|p|\geqslant 2$，故 A 是 B 的必要不充分条件.

(2)若圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，圆心到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 r，即 $r=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以 $c^2=(a^2+b^2)r^2$；反过来，若 $c^2=(a^2+b^2)r^2$，则$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$ 成立，说明 $x^2+y^2=r^2$ 的圆心$(0,0)$到直线 $ax+by+c=0$的距离等于 r，即圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，故 A 是 B 的充分必要条件.

启示:对于涉及充分必要条件判断的问题，必须以准确、完整地理解充分、必要条件的概念为基础，有些问题需转化为等价命题后才容易判断.

【例 2】若 p:$A\subsetneqq B\subseteq S$，$q$:$(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)$，则 p 是 q 的什么条件?



解:利用集合的图示法，由右图知 $A\subsetneqq B\subseteq S\Rightarrow(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)$，$(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)\Rightarrow A\subsetneqq B\subseteq S$，所以 p 是 q 的充要条件.

启示:本题采用的是从条件直接推结论的方法，其中突出了数形结合的思想方法(图示法).

问题 2:怎样求充要条件?

【例 3】求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件.

解:(1)$a=0$ 时适合.

(2)当 $a\neq 0$ 时，显然方程没有零根，若方程有两异号的实根，则 $a<0$；若方程有两个负的实根，则必须满足$\begin{cases}\frac{1}{a}>0,\\-\frac{2}{a}<0,\\\Delta=4-4a\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $0<a\leqslant 1$.

综上，若方程至少有一个负的实根，则 $a\leqslant 1$；反之，若 $a\leqslant 1$，则方程至少有一个负的实根.因此，关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是 $a\leqslant 1$.

启示:①$a=0$ 的情况不要忽视；②若令 $f(x)=ax^2+2x+1$，由于 $f(0)=1\neq 0$，从而排除了方程有一个负根，另一个根为零的情形.

问题 3:怎样进行命题充要条件的证明?

【例 4】设 x、$y\in\mathbf{R}$，求证:$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

证明:充分性:若 $xy=0$，那么，①$x=0$，$y\neq 0$；②$x\neq 0$，$y=0$；③$x=0$，$y=0$，于是$|x+y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$，即 $x>0$，$y>0$ 或 $x<0$，$y<0$，

当 $x>0$，$y>0$ 时，$|x+y|=x+y=|x|+|y|$.

当 $x<0$，$y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$.

总之，当 $xy\geqslant 0$ 时，有$|x+y|=|x|+|y|$.

必要性:由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 x、$y\in\mathbf{R}$，得$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$，即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$.

$|xy|=xy$. $\therefore xy\geqslant 0$.

启示:充要条件的证明关键是根据定义确定哪是已知条件，哪是结论，然后搞清楚充分性是证明哪一个命题，必要性是证明哪一个命题.

拓展迁移

【例题】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$

$p^n+q(p\neq0,p\neq1)$，求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

解：$a_1=S_1=p+q$.

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1)$.

$\because p\neq0,p\neq1$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$.

若$\{a_n\}$为等比数列，则$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$.

$\therefore \dfrac{p(p-1)}{p+q}=p$.

$\because p\neq0$，

$\therefore p-1=p+q$.

$\therefore q=-1$，

这是$\{a_n\}$为等比数列的必要条件.

下面证明$q=-1$是$\{a_n\}$为等比数列的充分条件.

当$q=-1$时，$S_n=p^n-1(p\neq0,p\neq1)$，$a_1=S_1=p-1$；

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$，

$\therefore a_n=(p-1)p^{n-1}(p\neq0,p\neq1)$，

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}}=p$为常数.

$\therefore q=-1$时，数列$\{a_n\}$为等比数列，

即数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件为$q=-1$.

启示：(1)本题重点考查充要条件的概念及解答充要条件命题时的思维的严谨性.

(2)以等比数列的判定为主线，使本题的闪光点在于抓住数列前n项和与通项之间的递推关系，严格利用定义去判定.

(3)题目求的是充要条件，即有充分性和必要性两层含义，很容易忽视充分性的证明.

(4)由$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant2)\end{cases}$关系式去寻找$a_n$与$a_{n+1}$的比值，但同时要注意充分性的证明.

【拓展】在$\triangle ABC$中，“$A>30^\circ$”是“$\sin A>\dfrac{1}{2}$”的 ……………………………… (　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：在$\triangle ABC$中：$A>30^\circ\Rightarrow0<\sin A<1\not\Rightarrow\sin A>\dfrac{1}{2}$，$\sin A>\dfrac{1}{2}\Rightarrow30^\circ<A<150^\circ\Rightarrow A>30^\circ$.

$\therefore$“$A>30^\circ$”是“$\sin A>\dfrac{1}{2}$”的必要不充分条件.

答案：B

自我检测

1. 对任意实数a、b、c，在下列命题中，真命题是 ……………………………………… (　　)
   A. “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件
   B. “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件
   C. “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件
   D. “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件
2. “$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$”的 ……………………………………… (　　)
   A. 必要不充分条件
   B. 充分不必要条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
3. 函数$f(x)=x|x+a|+b$是奇函数的充要条件是 ……………………………… (　　)
   A. $ab=0$　　B. $a+b=0$
   C. $a=b$　　D. $a^2+b^2=0$
4. $x^2+(y-2)^2=0$是$x(y-2)=0$的 … (　　)
   A. 必要不充分条件
   B. 充分不必要条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
5. $x\geqslant0$是$x^2\leqslant x$的__________条件.
6. 设p、r都是q的充分条件，s是q的充分必要条件，t是s的必要条件，t是r的充分条件，那么p是t的__________条件，r是t的__________条件.

7. 命题 $p:x>0,y<0$，命题 $q:x>y,\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$，则 p 是 q 的什么条件？

8. 求不等式 $kx^2+x+k>0$ 恒成立的充要条件.

规律小结

1. 掌握充分条件、必要条件、充分必要条件的意义.

2. 充要条件是揭示命题的条件和结论因果关系的重要数学概念，因此在学习充分条件、必要条件和充要条件的同时，应注意与命题的四种形式相结合.

3. 会判断命题 p 成立与命题 q 成立的关系，并能用充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件来表达命题 p 与命题 q 的关系.

4. 证明命题 p 成立是命题 q 成立的充要条件时，要明确充分性、必要性的证明中，谁是条件谁为应推证的结论.

5. 会求某些简单问题成立的充要条件.

6. 所涉及的问题及解决方法主要有：

(1)要理解“充分条件”“必要条件”的概念：当“若 p 则 q”形式的命题为真时，就记作 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 是 p 的必要条件，因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2)要理解“充要条件”的概念，对于符号“$\Leftrightarrow$”要熟悉它的各种同义词语：“等价于”“当且仅当”“必须并且只需”“……，反之也真”等.

(3)数学概念的定义具有相称性，即数学概念的定义都可以看成是充要条件，既是概念的判断依据，又是概念所具有的性质.

(4)从集合观点看，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A、B 互为充要条件.

(5)证明命题条件的充要性时，既要证明原命题成立(即条件的充分性)，又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

7. 判断命题的充要关系有下述常用方法：

(1)定义法.

(2)等价法，即利用 $A\Rightarrow B$ 与 $\neg B\Rightarrow\neg A$，$B\Rightarrow A$ 与 $\neg A\Rightarrow\neg B$，$A\Leftrightarrow B$ 与 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$ 的等价关系. 对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题，一般运用等价法.

(3)利用集合间的包含关系判断，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件.

8. 确定条件为不充分或不必要的条件时，常用构造反例的方法说明.

1.3 简单的逻辑联结词

自学导引

1. p 且 q 就是用联结词________把命题 p 和命题 q 联结起来，得到的新命题，记作________.

2. p 或 q 就是用联结词________把命题 p 和命题 q 联结起来，得到的新命题，记作________.

3. 对一个命题 p ________，得到一个新命题，记作 $\neg p$，读作“________”或

“__________”.

4. 已知 p、q 的真假时，常用下列表格判断 p 且 q、p 或 q、非 p 的真假.

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真			
真		假		
	真		真	
假		假		

疑难剖析

问题 1：怎样判断复合命题的形式及其真假？

【例 1】指出下列命题的真假：

(1)命题：“不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 没有实数解”；

(2)命题：“-1 是偶数或奇数”；

(3)命题：“$\sqrt{2}$属于集合 $\mathbf{Q}$，也属于集合 $\mathbf{R}$”；

(4)命题：“$A\not\subseteq(A\cup B)$”.

解：(1)此命题是“$\neg p$”的形式，其中 p：不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 有实数解. 因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以命题 p 为真命题，即 $\neg p$ 为假命题. 所以原命题为假命题.

(2)此命题是“p 或 q”的形式，其中 p：-1 是偶数，q：-1 是奇数，因为命题 p 为假命题，命题 q 为真命题，所以“$p\vee q$”为真命题. 故原命题为真命题.

(3)此命题为“$p\wedge q$”的形式，其中 p：$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，q：$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，因命题 p 为假命题，命题 q 为真命题，所以命题“$p\wedge q$”为假命题. 故原命题为假命题.

(4)此命题为“$\neg p$”的形式，其中 p：$A\subseteq(A\cup B)$，因为 p 为真命题，所以“$\neg p$”为假命题. 故原命题为假命题.

启示：为了正确判断复合命题的真假，首先要确定复合命题的构成形式，然后指出其中简单命题的真假，再根据真值表判断这个复合命题的真假.

问题 2：怎样理解逻辑联结词？

【例 2】在“方程 $x^2-4=0$ 的解是 $x=\pm 2$”这个命题中，使用的逻辑联结词的情况是 ……（　　）

A. 没有使用逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词“且”

C. 使用了逻辑联结词“或”

D. 使用了逻辑联结词“非”

解析：“$x^2-4=0$ 的解是 $x=\pm 2$”就是指“$x^2-4=0$的解是 $x=2$ 或 $x=-2$”. 因此该命题是用逻辑联结词“或”联结的. ∴选 C.

答案：C

启示：要理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义.

逻辑联结词中的“或”相当于集合中的“并集”，它与日常用语中的“或”含义不同. 一般地，日常用语用的“或”是两个中任选一个，不能都选，而逻辑联结词中的“或”，可以是两个都选，但又不是两个必须都选，而是两个中至少选一个，相当于“并集”定义中的“或”，逻辑联结词中的“且”相当于集合中的“交集”，即必须两个都选.

逻辑联结词中的“非”相当于集合中在全集中的补集，逻辑联结词中的“非”的含义有否定的意思，“等于”的否定是“不等于”，“大于”的否定是“不大于”，即“小于或等于”，“都是”的否定是“不都是”，“至少有一个”的否定是“没有一个”，“$x=a$ 或 $x=b$”的否定是“$x\neq a$ 且 $x\neq b$”.

本例题是用“或”联结的，一般地，对于一元二次方程的两个实数根是用“或”联结的，如本题，类似地还有 $xy=0$ 可写作 $x=0$ 或 $y=0$. 而对于实数 x、y 满足 $x^2+y^2=0$，则用“且”联结，即 $x=0$ 且 $y=0$.

问题 3：怎样用真值表解题？

【例 3】已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

解：若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两不等的负根，则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$，即 p：$m>2$.

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，
则 $\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$.
解得 $1<m<3$，即 $q:1<m<3$.
$\because p$ 或 q 为真，$\therefore p$、q 至少有一为真. 又 p 且 q 为假，
$\therefore p$、q 至少有一为假. 因此，p、q 两命题应一真一假，即 p 为真，q 为假或 p 为假，q 为真.
$\therefore \begin{cases} m>2, \\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m\leqslant 2, \\ 1<m<3. \end{cases}$
解得 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

启示：由简单命题的真假可根据真值表来判断复合命题的真假. 反过来，由复合命题的真假也应能准确断定构成此复合命题的简单命题的真假情况，简单命题的真假也应由真值表来判断. 如"p 且 q"为假，应包括"p 真 q 假""p 假 q 真""p 假 q 假"这三种情况.

拓展迁移

【例题】已知 $a>0$，$a\neq 1$，设 P：函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 内单调递减；Q：曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点. 如果 P 和 Q 有且只有一个正确，求 a 的取值范围.

解：当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减；当 $a>1$ 时，$y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不是单调递减. 曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于两点等价于 $(2a-3)^2-4>0$，即 $a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

(1)若 P 正确，且 Q 不正确，即函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴不交于两点，因此 $a\in(0,1)\cap([\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{5}{2}])$，即 $a\in[\frac{1}{2},1)$.

(2)若 P 不正确，且 Q 正确，即函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不是单调递减，曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于两点，因此 $a\in(1,+\infty)\cap((0,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty))$，即 $a\in(\frac{5}{2},+\infty)$.

综上，a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},1)\cup(\frac{5}{2},+\infty)$.

启示：本题考查对数函数与二次函数的单调性及简易逻辑等，还考查了分类讨论的思想方法.

【拓展】(2004 年福建，文)命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件，命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，则 …………………… (　　)

A. "$p\vee q$"为假　　B. "$p\wedge q$"为真
C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

解析：命题 p 的判断可举反例：$a=2$，$b=-3$，则 $|a|+|b|>1$，但 $|a+b|=1$，故命题 p 是假命题.
命题 q：由函数解析式知 $|x-1|-2\geqslant 0$，
解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$，所以命题 q 真.
答案：D
启示：本题主要考查充要条件、简易逻辑和不等式求解.

自我检测

1. 命题"平行四边形的对角线相等且互相平分"是 …………………………… (　　)
   A. 简单命题
   B. "p 或 q"形式的复合命题
   C. "p 且 q"形式的复合命题
   D. "非 p"形式的复合命题
2. 若命题 p：0 是偶数，命题 q：2 是 3 的约数，则下列命题中为真的是 …………… (　　)
   A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$
   C. $\neg p$　　D. $\neg p\wedge\neg q$
3. 如果命题"$p\vee q$"与命题"$\neg p$"都是真命题，那么 ……………………………… (　　)
   A. 命题 p 不一定是假命题
   B. 命题 q 一定为真命题
   C. 命题 q 不一定是真命题
   D. 命题 p 与命题 q 的真假相同
4. 命题 p：0 不是自然数，命题 q：π 是无理数，在命题"$p\wedge q$""$p\vee q$""$\neg p$""$\neg q$"中，假命

题是________,真命题是__________.

5. 由命题 p:6 是 12 或 24 的约数,q:6 是 24 的约数,构成的“$p\vee q$”形式的命题是____________,“$p\wedge q$”形式的命题是____________,“$\neg p$”形式的命题是__________.

6. 若把命题“$A\subseteq B$”看成一个复合命题,那么复合命题的形式是__________,其中构成它的两简单命题分别是__________.

7. 已知 p:$a\in A$,q:$a\in B$,写出由 p、q 构成的“$p\vee q$”“$p\wedge q$”“$\neg p$”形式的复合命题.

8. 分别指出由下列各组命题构成的“$p\vee q$”“$p\wedge q$”“$\neg p$”形式的复合命题的真假.

(1)p:$4+3=7$,q:$5<4$;

(2)p:9 是质数,q:8 是 12 的约数;

(3)p:$1\in\{1,2\}$,q:$\varnothing\subsetneqq\{1,2\}$;

(4)p:$\varnothing=\{0\}$,q:$\varnothing\subseteq\varnothing$.

规律小结

1. 要会判断命题给出的语句是否是命题,并会确定复合命题构成的形式.

2. 要能正确判断复合命题的真假. 在判断复合命题的真假时,要首先确定复合命题的构成形式,再指出其中简单命题的真假,最后根据真值表来判断.

3. 逻辑联结词“或”“且”“非”的意义与日常生活中的“或”“且”“非”的含义不同,应注意其区别.

4. 会利用真值表判断已知 p、q、$p\wedge q$、$p\vee q$、$\neg p$ 中的三者的真假情况来判断其余命题的真假.

1.4　全称量词与存在量词

自学导引

1. 短语“__________”“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,用符号“$\forall$”表示,含有全称量词的命题叫做__________.

2. 短语“__________”“__________”在逻辑中通常叫做存在量词,用符号“________”表示,含有存在量词的命题叫做__________.

3. 全称命题“对 M 中任意一个 x,有 $P(x)$ 成立”可用符号__________表示,读作“对任意 x 属于 M,有 $P(x)$ 成立”.

4. 特称命题“存在 M 中的一个 x,使 $P(x)$ 成立”,可用符号__________表示,读作“________________”.

5. 关于含有一个量词的全称命题的否定,有下面的结论:

全称命题 P:$\forall x\in M$,$P(x)$,它的否定________. 全称命题的否定是____________.

6. 关于含有一个量词的特称命题的否定,有下面的结论:特称命题 P:$\exists x\in M$,$P(x)$,

它的否定 $\neg P$：$\forall x\in M$，$\neg P(x)$. 特称命题的否定是__________.

疑难剖析

问题 1：怎样判别全称命题与特称命题及其真假？

【例 1】判断下列命题是全称命题还是特称命题？并判断其真假.

(1)对数函数都是单调函数；

(2)至少有一个整数，它既能被 2 整除，又能被 5 整除；

(3) $\forall x\in\{x|x$ 是无理数$\}$，x^2 是无理数；

(4) $\exists x\in\{x|x\in\mathbf{Z}\}$，$\log_2 x>0$.

解：(1)全称命题，真命题.

(2)特称命题，真命题.

(3)全称命题，假命题. 例如 $\exists x=\sqrt{3}$，但 $x^2=3$ 是有理数.

(4)特称命题，真命题.

启示：利用全称命题和特称命题的定义来判断.

问题 2：命题的否定与否命题相同吗？

【例 2】判断下列命题的真假，并写出这些命题的否定：

(1)三角形的内角和为 180°；

(2)每个二次函数的图象都开口向下；

(3)存在一个四边形不是平行四边形.

解：(1)是全称命题且为真命题.

命题的否定：三角形的内角和不全为 180°，即存在一个三角形且它的内角和不等于 180°.

(2)是全称命题且为假命题.

命题的否定：存在一个二次函数的图象开口不向下.

(3)是特称命题且为真命题.

命题的否定：所有的四边形都是平行四边形.

启示：命题的否定要与否命题区别开来，全称命题的否定是特称命题，而特称命题的否定是全称命题.

问题 3：怎样用全称命题、特称命题解题？

【例 3】函数 $f(x)$ 对一切实数 x、y 均有 $f(x+y)-f(y)=(x+2y+1)x$ 成立，且 $f(1)=0$.

(1)求 $f(0)$ 的值；

(2)当 $f(x)+2<\log_a x$，$x\in(0,\frac{1}{2})$ 恒成立时，求 a 的取值范围.

解：(1)由已知等式 $f(x+y)-f(y)=(x+2y+1)\cdot x$，

令 $x=1$，$y=0$ 得 $f(1)-f(0)=2$，又因为 $f(1)=0$，所以 $f(0)=-2$.

(2)由(1)知 $f(0)=-2$，所以 $f(x)+2=f(x)-f(0)=f(x+0)-f(0)=(x+1)\cdot x$. 因为 $x\in(0,\frac{1}{2})$，所以 $f(x)+2\in(0,\frac{3}{4})$. 要使 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$f(x)+2<\log_a x$ 恒成立，显然当 $a>1$ 时不可能，所以 $\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{4},\end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\leqslant a<1$.

启示：题意给出全称命题，显然可以任取 $x=1$，$y=0$ 代入.

拓展迁移

【例题】已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1)当 $b>0$ 时，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant1$，证明 $a\leqslant2\sqrt{b}$；

(2)当 $b>1$ 时，证明对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$；

(3)当 $0<b\leqslant1$ 时，讨论：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件.

(1)**证明**：依题意设对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant1$，

$\because f(x)=-b(x-\frac{a}{2b})^2+\frac{a^2}{4b}$，

$\therefore f(\frac{a}{2b})=\frac{a^2}{4b}\leqslant1$.