观察試驗資料的数学加工法

沙庆林 編

人民交通出版社

採礦通論

上　冊

内容提要

本書介紹如何利用誤差理論、最小二乘法、或然率理論以及数学統計学等原理，通过数学加工，來提高我們在工程試驗中对某一未知对象的测定和观察的精度。

本書可供公路、桥梁以及其他土木工程技术人員和材料試驗人員参考。

观察試驗資料的数学加工法

沙庆林 編

*

人民交通出版社出版

（北京安定門外和平里）

北京市書刊出版业营业許可証出字第〇〇六号

新华书店科技发行所发行　全国新华书店經售

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1960年8月北京第一版　1960年8月北京第一次印刷

开本：787×1092 1/32　印張：3 8/32張 插頁1

全書：99,000字　印数：1—4,300册

統一書号：15044·1410

定价（10）：0.47元

目录

第一章　序　言

测定或观测某一未知对象，一方面必须使用为此而特制的仪器，另一方面必须利用观测者的感觉器官。所以，不論测定或观测进行得多么仔細，也不論所使用的仪器多么完善，一切观测都不可避免地要产生誤差。例如在测定土的湿度和密实度时，尽管多次测定是在同一地点进行，以及在进行某种試驗时，尽管所有的試模都是相同的，差不多經常发生这种現象，一切观测結果間总有些差別。这就是說，一切测得的結果都和测量对象的眞值有所差别，即包含有誤差在內。测量或試驗誤差的产生，主要是由于观测者的感觉器官不够完善、仪器的缺陷、試样或試模間不可避免的差别以及进行测量时所处的外界条件的影响（溫度、空气湿度、风等）。因此，就发生一个問題：进行某种测定或試驗后，所得結果的精确度到底有多大？在实践中，几乎經常发生这种現象：单个测定或試驗所得結果的誤差大于容許的誤差。为了使测定所得結果的誤差小于容許的誤差，往往必須进行重复多次的测定或試驗。在此就发生第二个問題：到底需要多少次测定或試驗，才能滿足对于精度的要求？

在工程上經常遇到这种情况：测定或試驗的对象与某些因素有关。例如，土的强度与其湿度和密实度有关，公路路面的使用期限与交通量的大小有关，材料在荷重作用下所发生的形变与荷重作用的时間有关，等等。后者发生变化，前者也将随之而发生变化。在这些相关的因素間，是存在着一定的規律性的。在实践中，通常利用公式来表示这种規律性。公式有理論公式，半經驗公式与經驗公式三种。在此就发生了一个問題：理論公式是否符合实际测定或試驗所得的結果呢？在沒有理論公式的情况下，又如何来选择經驗公式呢？或者，已有的經驗公式是否适合在某种情况下所得的結果呢？

不管是用理論公式还是用經驗公式，实际上，都不可能十分确切地

表示出两个相关因素間的关系。例如，我們用直綫方程式来表示两个相关因素間的关系，而实际上，这种关系可能不完全是直綫关系。因此，就发生另一个問題：所用公式的可靠程度有多大呢？或这个公式是否比另一个公式更好呢？

解决这些实际問題时，必須利用誤差理論、最小二乘法、或然率理論及数学統計学的原理。这些原理在某些专門的书中〔参考书1、2、3、5〕都有詳細的叙述。但是，由于这些书的对象不同，叙述煩复，不够通俗，一般讀者看后，在具体用以解决上述諸問題时，往往会发生困难。

仅就公路領域来講，随着科学研究工作的开展，这些問題愈来愈迫切地要求解决了。本书的目的是帮助讀者了解如何具体应用这些原理来解决这些問題。因此，书中只把有关的原理作一簡要的介紹，然后，用实例說明如何应用。

第二章 測定或試驗精度的表示法

当同一人用同一个仪器在相同情况下，作反复的測定或試驗时，各个結果将会有在大小和符号上各不相同的誤差。有时，这些誤差彼此相等或甚至等于零。在一切測量或試驗过程中，偶然的誤差是不可避免的。

在实驗室中，对若干相同的試样（例如土样）作强度試驗后，虽然平行試驗是在同一种情况下进行的，所得結果間的差別往往超过10%，在个別情况下，可能达到25%～30%。在野外，在一块不大的面积（例如数平方米）上，反复多次地測定土的含水量或路面的强度后，同样会发見，在所得的結果間存在着大小不一的差別。如果說，在測量中观測某一对象所产生的偶然誤差是由仪器誤差、人的誤差及外界的誤差（空气的湿度、溫度、风等等）所引起，則在进行上述試驗或类似的平行試驗时，偶然誤差主要可能是由于試样間、土或路面在面积内的不均匀性所引起。这种不均匀性，实际上也是不可避免的。

偶然誤差表面上看，似乎沒有規律性，而实質上它是具有規律性

的。重复观测或重复試驗的次数愈多，这种規律性也就表現得愈明显。

偶然誤差具有下述的几种特性：

1.在一定的观测条件下，偶然誤差的絕对值不会超过一定的限度。根据这一性質，可以确定在每一观测或試驗过程中所允許的誤差范围。

2.絕对值小的誤差比絕对值大的誤差經常出現得多。这一性質說明了誤差值的規律性。

3.絕对值相等的正誤差与負誤差出現的次数相同。

4.同量的等精度观测，其偶然誤差的算术平均值，随着观测次数的增加而无限地趋向于零。

一、算术平均值

根据上述四种性質，可以肯定地說，当試驗或测定的次数无限地增加时，其算术平均值趋向于眞值。但事实上是不可能进行无数次观测的。因此，通常都把同一量的多次等精度观测的結果的算术平均值作为該量最可靠的值。在不存在眞值的情况下（例如，在实驗室中及在野外所作的試驗），那就更只有采用算术平均值了。很显然，算术平均值出現的或然率最大。

算术平均值是按下式計算的：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}{n}=\frac{\Sigma x}{n}\cdots\cdots \qquad (1)$$

式中：x_1，x_2，$x_3\cdots\cdots x_n$——对同一量进行反复观测后，或进行平行試驗后所得的数值。

n——反复观测的次数或平行試驗的个数。

$\bar{x}$——n个数值的算术平均值。

算术平均值与每一个单次观测或試驗結果間的差，称为对于算术平均值的剩余誤差，或称为最或然誤差。不論观测或試驗次数的多少，某一观测列或試驗列的最或然誤差之和，都等于零。最或然誤差用e代表：

$$e_i=\bar{x}-x_i \qquad (2)$$

例题1. 在某一路段上测定路基土的含水量，进行12次平行試驗

后，所得的结果为$W_1=0.80$，$W_2=0.79$，$W_3=0.77$，$W_4=0.75$，$W_5=0.74$，$W_6=0.75$，$W_7=0.73$，$W_8=0.74$，$W_9=0.72$，$W_{10}=0.68$，$W_{11}=0.67$，$W_{12}=0.74$（都以相对含水量表示）。

根据公式(1)，其算术平均值

$$\overline{W}=\frac{0.80+0.79+0.77+0.75+0.74+0.75+0.73}{12}$$

$$+\frac{0.74+0.72+0.68+0.67+0.74}{12}=0.74。$$

根据公式(2)，其最或然誤差

$\varepsilon_1=0.74-0.80=-0.06$，　$\varepsilon_2=0.74-0.79=-0.05$，

$\varepsilon_3=0.74-0.77=-0.03$，　$\varepsilon_4=0.74-0.75=-0.01$，

$\varepsilon_5=0.74-0.74=0$，　$\varepsilon_6=-0.01$，　$\varepsilon_7=0.01$，

$\varepsilon_8=0$，$\varepsilon_9=0.02$，　$\varepsilon_{10}=0.06$，　$\varepsilon_{11}=0.07$，　$\varepsilon_{12}=0$。

$\Sigma\varepsilon=-0.06-0.05-0.03-0.01+0-0.01+0.01+0+0.02+0.06+0.07=0$

例题2. 在另一路段上，同样进行12次平行测定后，所得路基土的含水量为$W_1=0.84$，$W_2=0.80$，$W_3=0.77$，$W_4=0.79$，$W_5=0.73$，$W_6=0.72$，$W_7=0.70$，$W_8=0.68$，$W_9=0.66$，$W_{10}=0.64$，$W_{11}=0.86$，$W_{12}=0.69$。

根据公式(1)，其算术平均值

$$\overline{W}=\frac{0.84+0.80+0.77+0.79+0.73+0.72+0.70}{12}$$

$$+\frac{0.68+0.66+0.64+0.86+0.69}{12}=0.74。$$

根据公式(2)，其最或然誤差

$\varepsilon_1=0.74-0.84=-0.10$，　$\varepsilon_2=0.74-0.80=-0.06$

$\varepsilon_3=0.74-0.77=-0.03$，　$\varepsilon_4=0.74-0.79=-0.05$

$\varepsilon_5=0.01$，$\varepsilon_6=0.02$，$\varepsilon_7=0.04$，$\varepsilon_8=0.06$，$\varepsilon_9=0.08$，

$\varepsilon_{10}=0.10$，$\varepsilon_{11}=-0.12$，$\varepsilon_{12}=0.05$。

$\Sigma\varepsilon=-0.10-0.06-0.03-0.05+0.01+0.02+0.04+0.06+0.08+0.10-0.12+0.05=0$。

算术平均值有几个数学性質对实际应用有較大的好处。

1.和的算术平均值等于算术平均值的和。

設对同一观測对象进行了两組观測，其結果为Σx_1与Σx_2，所进行的观測总数为n，如其共同的平均值为$\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_1+\Sigma x_2}{n}=\frac{\Sigma x_1}{n}+\frac{\Sigma x_2}{n}=\bar{x}_1+\bar{x}_2$$

同理，可証明差的算术平均值等于算术平均值的差。

2.在变量数列中，如各个变量值具有同一常数时，则該变量数列的平均值的計算，可以先将該常数項略去，計算得平均值后，再加上此常数。

例如：变量数列x_1+a_1，x_2+a_2，$x_3+a_3\cdots\cdots x_n+a_n$，的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x+a)}{n}=\frac{\Sigma x}{n}+a。$$

3.在变量数列中，如各个变量具有同一倍数，则求其算术平均值时，可以先将此倍数略去，求出算术平均值，然后将所得算术平均值乘以該倍数值。

例如：一变量数列为Ax_1，Ax_2，$Ax_3\cdots\cdots Ax_n$，則其算术平均值$\bar{x}$应为

$$\bar{x}=\frac{\Sigma Ax}{n}=A\ \frac{\Sigma x}{n}。$$

当变量数列中的变量数目相当多，且变量值的位数多或各变量为小数时，直接計算往往会感到麻煩，并且容易发生錯誤。因此，根据算术平均值的第2及第3个性質，可以在运算时，将各数字先化成簡单整数，再进行計算。这样可以避免复杂繁瑣的計算。这种計算方法称作修整法。

例如：在求例題8的算术平均值时，可以将各值先减去一常数$C=200$，得10，-10，5，30，0，15，3，-8，-5，-10，然后求其算术平均

值，得

$$\overline{E'}=\frac{10-10+5+30+0+15+3-8-5-10}{10}=+3$$

因此 $\overline{E}=\overline{E'}+200=203$。

又如，在同一类型路段上，测得土基的相对含水量如下表所示，求算相对含水量的平均值及其均方差。将各相对含水量值分别乘以100，并列在表的第2行中，然后根据第2行中的数值，計算平均值 $\overline{100W_O}$ 等等。

W_O	0.71	0.67	0.65	0.64	0.62	0.60	0.59	0.56	0.55	0.52	0.49
$100W_O$	71	67	65	64	62	60	59	56	55	52	49
$100(W_O-\overline{W_O})$	−11	−7	−5	−4	−2	0	1	4	5	8	11
$[100(W_O-\overline{W_O})]^2$	121	49	25	16	4	0	1	16	25	64	121

从表中第2行的数值，得

$$\overline{100W_O}=\frac{660}{11}=60$$

而 $\Sigma[100(W_O-\overline{W_O})]^2=442$。

由此得 $\Sigma(W_O-\overline{W_O})^2=\frac{442}{100\times100}=0.0442$。

因此，均方差（参看第2节）

$$\sigma_{W_O}=\sqrt{\frac{0.0442}{10}}=0.665$$

二、均 方 差

为了判断不可避免的偶然誤差对所得观测或試驗結果的影响，换句話說，为了估計观測或試驗的精度，必須要有一系列的观測或試驗。根

据大数法則，观測或試驗的次数愈多，則其精度估計就愈正确。

前述例题1和例题2中，土的含水量的算术平均值都为0.74。从表面上看，这两路段上路基土的含水量相同，但仔細地将各次所得的数値进行比較时，就可以发見，在例题1中含水量的最大偏差为0.80－0.67＝0.13，而在例题2中含水量的最大偏差达0.86－0.64＝0.22。此外，12次测定的結果，在例题2中比在例題1中分散得零乱。很明显，例题1的测定精度較例題2的測定精度为高（图1）。因此仅用算术平均値表示测量的結果是不够的。

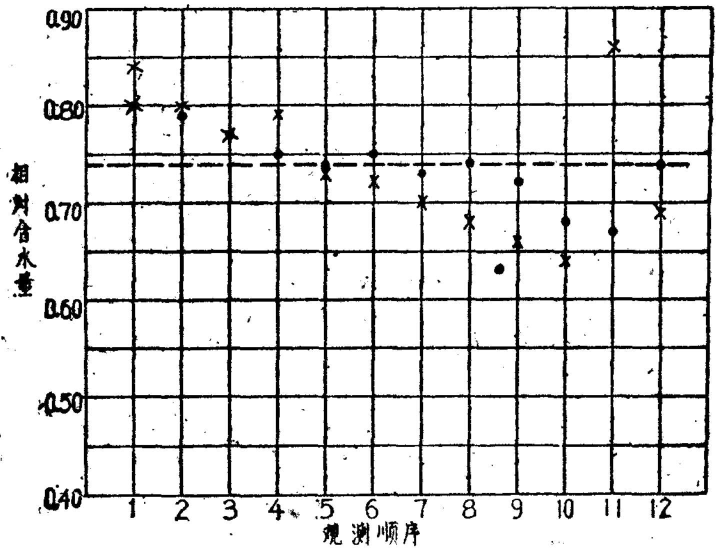

图1　图中圓形点是第1路段上观测的結果，而×形点是第2路段上观测的結果

通常用某一观測或試驗列的全部偶然誤差（最或然誤差）的均方数，即均方差来作为估計該列精度的标准。均方差与观測或試驗列中个別偶然誤差的符号无关。均方差能較明显地反映出在該列中所存在的比

較大的个别誤差。一定的观測或試驗条件具有一定的均方差。确定在某一試驗条件下的均方差后，在同一条件下所进行的任何单一观測或試驗，認为具有相同的均方差。

观測或試驗愈精确，其均方差愈小。实际上单个观測或試驗的均方差是按下式計算的：

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-1}} \tag{3}$$

式中：σ——均方差，n——观測或試驗次数，ε——最或然誤差，$\Sigma\varepsilon^2$——所有ε^2的总和。

例如，对例題1来講，其均方差

$$\sigma_W=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{(-0.06)^2+(-0.05)^2+\cdots\cdots+(0.00)^2}{12-1}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{0.0162}{11}}=\pm0.0383。$$

而对例題2来講，其均方差

$$\sigma_W=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{(-0.10)^2+(-0.06)^2+\cdots\cdots+0.05^2}{12-1}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{0.056}{11}}=\pm0.0714。$$

在此，均方差很明显地表示出，例題1中的試驗具有較高的精度。在例題1中每次測定的精度，即每次測定的均方差为0.0383，而在例題2中每次測定的精度为0.0714。

当观測次数多，即n大时，可用下式計算均方差：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}} \tag{4}$$

三、最大誤差

在誤差理論中，不只把均方差看作是估計观測或試驗結果精度的标

准。在某一条件下，求出观测或試驗結果的精度即均方差σ后，并不意味着在这种条件下进行的观测或試驗，其偶然誤差将位于±σ范围內。实际上所得的誤差往往可能比σ大，甚至大2～3倍之多。但是，誤差愈大，它出現的机会也将愈少。

如已知某一观测或試驗列中的均方差σ之值，则根据或然率理論可利用表1求出为σ之倍数的任意大小的偶然誤差之或然率。

表 1

K	b	誤差不超过b之或然率p	誤差超过b之或然率	1000个观测中誤差超过b的个数
0.5	0.5σ	0.3830	0.6170	617
1.0	1.0σ	0.6830	0.3170	317
1.5	1.5σ	0.8660	0.1340	134
2.0	2.0σ	0.9540	0.0460	46
2.5	2.5σ	0.9880	0.0120	12
3.0	3.0σ	0.9970	0.0030	3
3.5	3.5σ	0.9995	0.0005	0.5
4.0	4.0σ	0.9999	0.0001	0

表中 K——系数，即均方差的倍数，也可認为是以均方差σ为单位的偶然誤差的最大值；

b——偶然誤差值。

为了方便起見，可以根据表1之值作成K—P諾模图（图2）

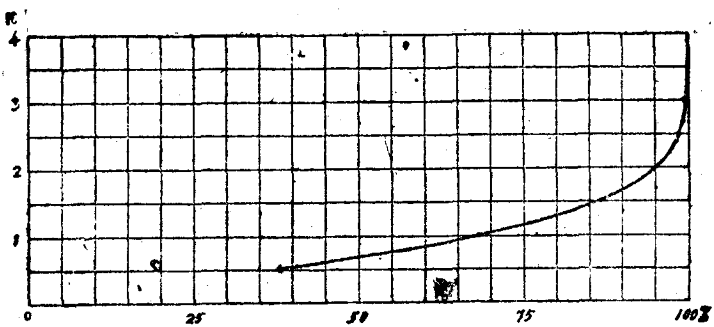

图2　誤差小于b出現的或然率p，（$b=K\sigma$）。

由上表可以看出，得出誤差不超过3σ的或然率等于0.997，即接近于必然性，而相反事件的或然率极小（等于0.003），也就是說，几乎不可能得出超过3倍均方差的誤差，因为在1,000次观測中只能出現3个这样的誤差。因此，在測量学中把3倍均方差的偶然誤差，認为是最大誤差。

四、观测量的函数之均方差

有函数$Z=kx$，其中k为常数，x为由观測或試驗所得的自变数，Z是函数。如x的均方差为σ_x，則Z的均方差

$$\sigma_z=k\sigma_x \tag{5}$$

有函数$z=x\pm y$，其中x和y是两个独立的量。如x和y的均方差分别是σ_x和σ_y，則z的均方差的平方等于被加数的均方差的平方之和：

$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2 \tag{6}$$

如，$z=x_1\pm x_2\pm x_3\pm\cdots\cdots\pm x_n$，設$\sigma_Z$，$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3\cdots\cdots\sigma_n$分别为函数及自变数的均方差，則

$$\sigma_z^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2 \tag{7}$$

在个别情况下，当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\cdots\cdots=\sigma_n$时，上式变为

$$\sigma_Z=\pm\sqrt{n}\,\sigma$$

如，$z=k_1x_1\pm k_2x_2\pm k_3x_3\pm\cdots\cdots\pm k_nx_n$，其中$k_1$，$r_2$，$k_3\cdots\cdots k_n$为常数，而$x_1$，$x_2$，$x_3\cdots\cdots x_n$的均方差分别为$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3\cdots\cdots\sigma_n$，此时

$$\sigma_z^2=(k_1\sigma_1)^2+(k_2\sigma_2)^2+\cdots\cdots+(k_n\sigma_n)^2 \tag{8}$$

五、算术平均值的均方差

上面已經提到，算术平均值的公式是

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\frac{1}{n}x_3+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{n}x_n$$

式中$\frac{1}{n}$是常数。如已求得单一观测或試驗的均方差，即x_1，x_2，x_3……x_n的均方差为σ，而算术平均值的均方差为$\sigma_{\bar{x}}$，则

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\sigma^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n}{n^2}\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2,$$

由此得出
$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

也就是說，算术平均值的均方差比单一观测或試驗的均方差小到$\sqrt{n}$倍。

前面已經提到

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n-1}},$$

因此

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n(n-1)}} \tag{10}$$

例如，在例題1中，算术平均值的均方差

$$\sigma_{\bar{w}}=\pm\frac{0.0383}{\sqrt{12}}=\pm0.0111。$$

在例題2中，算术平均值的均方差

$$\sigma_{\bar{w}}=\pm\frac{0.0714}{\sqrt{12}}=\pm0.0206。$$

在此，算术平均值的均方差更进一步說明了例題1中的測定具有較高的精度，实际上所測得的含水量应为0.74±0.0111；而在例題2中，实际上所測得的含水量为0.74±0.0206。

六、一般函数誤差的表示法

上面所談的观测量的函数的均方差，所指的仅是最簡单的函数，即一次方程式。但，实际上除一次方程式外，常会遇到二次方程式或一般的指数方程式。在此，我們用一般性的函数式来表示比較合适，即$y=f(x)$。

如已知x的絕对誤差（或均方差）为ε_x，則y的絕对誤差：

$$\varepsilon_y=\pm\varepsilon_x f'(x) \tag{11}$$

也就是說，y的絕对誤差等于x的絕对誤差乘上函数的一次导来式$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$，

而y的相对誤差（即絕对誤差与其相应的量之間的比值）

$$\sigma_y=\pm d\ln f(x)❶ \tag{12}$$

也就是說，y的相对誤差等于函数的自然对数的一次微分。

如果y是两个独立变数x_1，x_2的函数，即$y=f(x_1, x_2)$，則y的极限絕对誤差：

$$(\varepsilon_y)_{np}=\pm\left(\left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}dx_1\right|+\left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}dx_2\right|\right) \tag{13}$$

式中dx_1即x_1的絕对誤差，dx_2为x_2的絕对誤差。

y的极限相对誤差：

$$(\sigma_y)_{np}=\pm d\ln f(x_1, x_2) \tag{14}$$

例題3 在确定圓球的体积时所用的公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

现已量得圓球的半径$r=5.012\pm0.005$厘米，試求圓球的体积及其絕对誤差与相对誤差之值。

在此，半径r的絕对誤差$\varepsilon_r=\pm0.005$厘米而其相对誤差$\delta_r=\pm$

❶ $\ln f(x)$——表示$f(x)$的自然对数，即$\log_e f(x)$，$e\approx2.73$

$\frac{0.005}{5.012} \approx \pm 0.001$。

求圆球体积的絕对誤差时，需用公式(11)：

$$\varepsilon_V = \pm 0.005 \times 4\pi r^2 = \pm 0.005 \times 4\pi \times 25.12$$

$$= \pm 1.58\text{立方厘米} \approx \pm 2\text{立方厘米}。$$

圆球体积的数值

$$V = \frac{4}{3}\pi(5.012)^3 = 527.37\text{立方厘米}$$

$$V = 527 \pm 2\text{立方厘米}$$

求圆球体积的相对誤差时，利用公式(12)：

$$\delta_V = \pm d(ln4 - ln3 + ln\pi + 3lnr)$$

$$= \pm d(3lnr) = \pm 3\frac{dr}{r} = \pm 3\delta_r = \pm 0.003。$$

例題4 如果土基形变模量值 E_0 与土的相对含水量 $W_0\left(=\frac{W}{W_F}\right)$ 之間的关系为 $E_0 = 14.45 W_0^{-4.05}$。今測得土的含水量的算术平均値为 $\overline{w}_0 = 0.70 \pm 0.03$，試求 E_0 的值及其絕对誤差与相对誤差。

在此，相对含水量 W_0 的絕对誤差 $\varepsilon_{W_0} = \pm 0.03$，而其相对誤差 $\delta_{W_0} = \pm\frac{0.03}{0.70} \approx 0.04$。

求 E_0 的絕对誤差时，利用公式(11)：

$$\varepsilon_{E_0} = \pm 0.03 \times (-4.05) \times 14.45 W_0^{-5.05}$$

$= \pm 1.76 \times 6.06 = \pm 10.65 \approx 11$ 公斤/平方厘米。土基形变模量 E_0 之值

$$E_0 = 14.45 \times 0.70^{-4.05} = 14.45 \times 4.25$$

$$= 61.4$$

因此，　$E_0 = 61 \pm 11$　公斤/平方厘米。

求 E_0 的相对誤差时，利用公式(12)：