2007年

英才园

名师导学

新高考第1轮总复习

XINGAOKAODIYILUNZONGFUXI

◎ 主编：杨耀美 ◎

数学

（学生用书）

延边人民出版社

2007年

英才园

名师导学

新高考第1轮总复习

XINGAOKAODIYILUNZONGFUXI

数学 (学生用书)

顾　问：赵绪清

策　划：田隆岗

主　编：杨耀美 杨志勇

副主编：夏开举 刘坤望 李庭华 李韶庭 任泽贵 曾子斌

编　委：陈冬山 陈克双 陈明清 程远新 丁成武 龚光元 黄道兰 黄艳萍 韩绍玉 刘志菊 刘　琳 李炎辉 李　斐 李安厚 罗宏祥 覃业集 孙圣年 佘兴国 滕仿清 王世华 王忠发 王先斌 熊祚林 颜学双 余典军 杨六生 张新春 张运新 刘　俊 尹玉生（排名不分先后）

延边人民出版社

责任编辑:肖玉梅

图书在版编目(CIP)数据

新高考第一轮总复习·数学/杨耀美主编.
—延吉:延边人民出版社,2006.5
ISBN 7—80698—637—5

Ⅰ.新… Ⅱ.高… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010830 号

新高考第一轮总复习·数学(学生用书)

出　　版:延边人民出版社
吉林省延吉市友谊路 363 号,http://www.ybcbs.com
印　　刷:湖南航天长宇印刷有限责任公司
发　　行:延边人民出版社
规　　格:850×1168　1/16
印　　张:258
字　　数:9800 千字
版　　次:2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
书　　号:**ISBN 7—80698—637—5/G·445**
全套定价:**386.00** 元

前　言

本书是一本应对新教材高考的数学第一轮复习教学用书，编写者是湖南省部分省级重点中学资深的一线数学教师。

本书有三个显著的特点：

一是较好的实用性　全书依据现行的高中数学新教材，根据高三数学复习的需要与可能，将高中数学概括为86个小节，每个小节精选复习教学内容，严格控制练习总量，使教和学基本上能够按照每小节2个课时的进度落实。同时安排了34个考点，供学有余力的学生进行拔高训练；安排了12次单元测试，供全体学生分阶段检测反馈。各小节内容以教案形式呈现，考点和单元测试以活页试卷的形式呈现，方便师生使用，减轻了教师的备课负担，有利于提高复习教学效率。

二是突出的主体性　毫无疑问，复习教学的主体是高三的学生，复习课的效率如何，根本点是看学生学习落实的情况如何。因此，复习教材的编写，必须体现"教着眼于学，教服务于学"的理念，把培养学生主动学习的态度和主动学习的习惯放在突出位置。本书在每小节复习教(学)案的编写体例上，打破了复习教学中"教师提示复习目标，归纳双基要点，讲解例题，学生练习"的传统模式，在"考点导读"后设置了"学法导引"、"初试导练"两个环节，引导学生主动回顾归纳基础知识和基本技能，然后师生共同进行"例题导析"，教师"技巧导津"，最后学生进行"随堂演练"。这样，能够较好地将复习教学由教师的"满堂灌"变为学生的"主动学"，使课堂教学动静相宜，学生复习轻松实在。

三是鲜明的前瞻性　高中课程在不断改革，高考数学也在不断改革。在我国即将启动的新一轮普通高中课程改革中，对教学目标不仅要关注"知识与能力"，还要关注"过程与方法"、"情感态度价值观"。为了适应这种变革，2004年高考《数学(新课程版)考试大纲》考试要求已经由原来的"知识要求"、"能力要求"两部分增加为"知识要求"、"能力要求"和"个性品质"三部分。所谓"个性品质"，即指"考生个体的情感、态度和价值观"、"审慎思维的习惯"、"数学的美学意义"的理解和感悟。高考对考生的个性品质提出要求，预示着今后高考试题可能安排一些新情景、新形式的题目。这些题目也许"新而不难"，但对感情脆弱、死记硬背的学生来说会形成巨大挑战。应对这种新的变化，本书作了积极的尝试，试图在注意双基的同时，尽可能渗透能够训练学生"个性品质"的内容。

总之，本书是一本新颖而实用的高中数学复习教材，希望能对您的教或学有所帮助。

祝您高考成功！

赵绪清

2006年5月

目　录

第一章　集合与简易逻辑

1.1　集　合

考点导读

1. 了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义.

2. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.

3. 掌握有关术语和符号，并会用它们正确地表示一些简单的集合.

学法导引

一、集合

1. 集合是一个不能定义的原始概念，描述性的定义为：某些指定的对象________就成为一个集合，简称______，集合中每一个对象叫做这集合的________.

2. 集合中的元素具有：(1)确定性；(2)____；(3)____.

3. 集合的表示法常用的有________；________和韦恩图法三种，有限集常用________，无限集常用________，图示法常用于集合之间的相互关系.

4. 元素与集合之间的关系

元素与集合是________的从属关系，若 a 是集合 A 的元素，记作________，若 a 不是集合 B 的元素，记作________.

5. 集合与集合的关系

集合与集合的关系用符号________表示，但要注意元素与集合是相对而言的.

(1)子集：若集合 A 中________都是集合 B 的元素，就说集合 A 包含于集合 B(或集合 B 包含集合 A)，记作________.

(2)相等：若集合 A 中________都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的________都是集合 A 的元素，就说集合 A 等于集合 B，记作________.

(3)真子集：________，就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作________.

二、集合的运算

1. 交集：由________的元素组成的集合，记为________，即交集 $A\cap B=$________.

2. 并集：由________的元素组成的集合，记为________，即并集 $A\cup B=$________.

3. 补集：集合 A 是集合 U 的子集，由________的元素组成的集合，叫做 U 中子集 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=$________.

三、常用结论及性质

1. 若集合 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有________个，真子集有________个，非空真子集有________个.

2. 空集 $\varnothing$ 是一个特殊而又重要的集合，它不含任何元素，$\varnothing$ 是任何集合的________，$\varnothing$ 是任何非空集合的________，特别要注意解题中的空集.

3. $A\cap A=$______，$A\cap\varnothing=$______，$A\cap B=B\cap A$；
$A\cup A=$______，$A\cup\varnothing=$______，$A\cup B$____$B\cup A$.

4. $A\cap(\complement_U A)=$______，$A\cup(\complement_U A)=$______，
$\complement_U(\complement_U A)=$________.

5. $\complement_U(A\cup B)=$________，$\complement_U(A\cap B)=$________.

初试导练

1. 下列说法正确的是　　　　(　　)

A. lg3 的近似值组成的集合是{lg3 的近似值}

B. 内角和为 360° 的三角形的全体组成一个集合

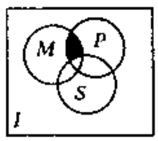
C. 集合 $A=\{1,a,b,c\}$ 与集合 $B=\{a,c,1,b\}$ 是不同的两个集合

D. 集合 $\{1,x,x^2,-x\}$ 中的元素 x 可以是任一实数.

2. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是　　　　(　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

3. 如图，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分表示的集合是　　　　(　　)



A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_I S)$

4. 设全集为 $\mathbf{R}$，若集合 $M=\{x|x\geqslant1\}$，$N=\{x|0\leqslant x<5\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)$ 是　　　　(　　)

A. $\{x|x\geqslant0\}$　　B. $\{x|x<1$ 或 $x\geqslant5\}$

C. $\{x|x\leqslant1$ 或 $x>5\}$　　D. $\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant5\}$

5. (2005·全国Ⅰ)设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是　　　　(　　)

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

例题导析

例1 已知集 $A=\{x|y=\sqrt{15-2x-x^2}\}$，$B=\{y|y=x+\frac{1}{x},x>0\}$，试判断两集合的关系.

例2 若集合 $M=\{x|x^2+x-6=0\}$，$N=\{x|ax+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，且 $N\subsetneqq M$，求 a 的取值范围.

例3 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|0<x-m<9\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

例4 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x-2,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|y=a(x^2-x+1),x\in\mathbf{N}^*\}$，问：是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，求出 $A\cap B$；若不存在，请说明理由.

技巧导津

1. 研究集合间的有关问题，要准确把握集合中元素的属性，正确理解集合描述法的实质，如下集合：$\{x|y=f(x)\}$，$\{y|y=f(x)\}$，$\{(x,y)|y=f(x)\}$. 正确认识这些集合及之间的关系，往往是解决问题的关键.

2. 要注意集合中元素的三性，尤其是互异性，因此，当集合的元素含有参数时，要注意检验.

3. 集合的运算常常借助于数轴、韦恩图而进行. 如【例2】结合数轴可使求解更直观，并且首先化简给定的集合.

4. 对于存在性、探索性问题，可先假设存在，然后进行推理，若推出矛盾，则说明不存在，若推理过程中，找到了满足条件的对象，则说明存在，并具体找出了所求的解.

5. 本节主要涉及的数学思想："数形结合"思想、补集思想和分类讨论思想；主要的数学方法：图示法和分析法。

随堂演练

基础过关

1. 集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的真子集个数有 ( )

A. 32　B. 31　C. 16　D. 15

2. 若 $x\in\mathbf{R}$，则由 x，$|x|-x$，$-\sqrt{x^2}$，$(\sqrt{|x|})^2$ 组成的集合中，元素最多有 ( )

A. 2 个　B. 3 个　C. 4 个　D. 5 个

3. 设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则 ( )

A. $M=N$　　　　B. $M\supsetneqq N$

C. $N\subsetneqq M$　　　　D. $M\cap N=\varnothing$

4. 设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是　（　）

A. $P\subsetneqq Q$　　　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　　　D. $P\cap Q=\varnothing$

5. 若集合 $M=\{y|y=2^{x-1}\}$，$N=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cap N$ 等于　（　）

A. $\{y|y>1\}$　　　　B. $\{y|y\geq 0\}$

C. $\{y|y\geq 1\}$　　　　D. $\{y|y>0\}$

能力升级

6. 设集合 $A=\{(x,y)|2x+y=1,x、y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|a^2x+2y=a,x、y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a=$______.

7. 已知集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geq 0\}$，$B=\{x|x^2-2x+2m<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

跨越重点

9. 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1)解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$

(2)记 A 为(1)中不等式的解集，集合 $B=\{x|\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=0\}$，若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

1.2　绝对值不等式与二次不等式的解法

考点导读

1. 理解绝对值的意义，掌握 $|ax+b|<c$，$|ax+b|>c(c>0)$ 两种类型不等式的解法.

2. 掌握三角不等式及简单应用.

3. 熟练掌握一元二次不等式的解法，深刻理解一元二次不等式、一元二次方程、二次函数之间的关系，并能运用它们的关系解决含有参数的不等式的有关问题.

学法导引

1. $|a-b|$ 的几何意义是______________.

2. $|x|>c$.

当 $c>0$ 时，解集为______________.

当 $c=0$ 时，解集为______________，

当 $c<0$ 时，解集为______________.

$|x|<c$.

当 $c>0$ 时，解集为______________.

当 $c\leq 0$ 时，解集为______________.

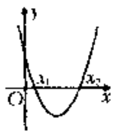
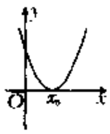
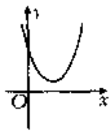
3. $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow$________.

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow$________.

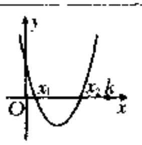
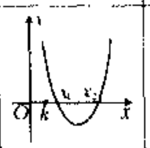
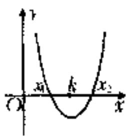
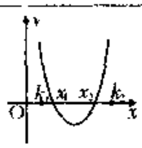
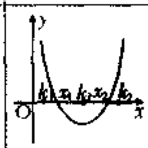
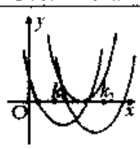
4. $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，注意等号成立的条件．

5. $ax^2+bx+c<0(a>0)$解集非空的充要条件________．

6. 一元二次不等式($ax^2+bx+c>0(a>0)$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$)、一元二次方程($ax^2+bx+c=0$)、一元二次函数($f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$)之间的关系：

	$\Delta=b^2-4ac>0$	$\Delta=b^2-4ac=0$	$\Delta=b^2-4ac<0$
二次函数图像			
方程的根	$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	无解
不等式>	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_0, x\in\mathbf{R}\}$	$\mathbf{R}$
不等式<	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

7. 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，对应的方程$ax^2+bx+c=0$的两根为x_1、x_2，则方程$f(x)=0$的根的分布所满足等价条件如下表：

根的分布	$x_1<x_2<k$	$k<x_1<x_2$	$x_1<k<x_2$
图象			
等价条件	$\begin{cases}f(k)>0\\-\frac{b}{2a}<k\\\Delta>0\end{cases}$	$\begin{cases}f(k)>0\\-\frac{b}{2a}>k\\\Delta>0\end{cases}$	$f(k)<0$
根的分布	$k_1<x_1<x_2<k_2$	$k_1<x_1<k_2<x_2<k_3$	在(k_1,k_2)内有且仅有一个根
图象			
等价条件	$\begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)>0\\k_1<-\frac{b}{2a}<k_2\\\Delta>0\end{cases}$	$\begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)<0\\f(k_3)>0\end{cases}$	$f(k_1)f(k_2)<0$，或$\Delta=0$且$-\frac{b}{2a}\in(k_1,k_2)$ $\begin{cases}f(k_1)=0\\f(k_2)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)=0\end{cases}$

初试导练

1. 写出下列不等式的解集：

(1)$|x-2|<3$:________.

(2)$3<|x-2|<4$:________.

(3)$|2x-3|<3x+1$:________.

(4)$\sqrt{x^2+4x+4}>1-2x$:________.

(5)$\left|\frac{x-1}{x}\right|>\frac{1-x}{x}$:________.

(6)$ax>b$的解为:________.

(7)$x^2+2x-3>0$:________.

(8)$2x^2+7x+3\leqslant0$:________.

(9)$x^2-x+1<0$:________.

(10)$x^2+x+1>0$:________.

(11)$-x^2+2x-1\geqslant0$:________.

2. 画出下列函数的图象：

(1)$y=|2x+1|$;

(2)$y=|x^2+2x-3|$;

(3)$y=x^2+2|x|-3$.

例题导析

例1 解关于x的不等式

(1)$-4<-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}<-2$

(2)$2x^2+ax+2>0$

(3)$|ax-2|\geqslant bx$.(a、$b\in\mathbf{R}^+$)

例2　已知不等式 $2x-1>m(x^2-1)$.

(1)若对于所有的实数 x 不等式恒成立,求 m 的取值范围;

(2)若对于 $m\in[-2,2]$ 不等式恒成立,求实数 x 的取值范围.

例3　解关于 x 的不等式:$ax^2-(a+1)x+1>0(a\in\mathbf{R})$

例2　关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 的解集为 A,不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0(a\in\mathbf{R})$ 的解集为 B,若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

技巧导津

1. 解绝对值不等式,其通性通法是设法脱去绝对值符号,常用绝对值的定义、绝对值的几何意义、两边平方和零点分段. 基本思想是分类讨论及化归的数学思想方法. 转化必须是等价转化.

2. 含有参数的不等式在给定范围内恒成立的问题一般的解决方法是分离变量法、图象法和转化成二次函数的问题.

3. 解一元二次不等式时,应当考虑相应的二次方程,二次函数,根据二次项的系数的符号确定不等式解集的形式,当然还要考虑相应的二次方程根的大小;二次不等式的解集有两种特殊的情况,即空集和全体实数. 对其中的各种情况要理解;当二次项系数有参数时,不能忽略二次项系数为零的情况;在闭区间上讨论根的分布时,要注意端点.

随堂演练

基础过关

1. 不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是　　　　(　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 不等式 $1<|x+1|<3$ 的解集为　　　　(　)

A. $(0,2)$　　B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$　　D. $(-4,-2)\cup(0,2)$

3. 不等式 $\frac{x^2-1}{|x|}<0$ 的解集为　　　　(　)

A. $\{x|-1<x<1\}$

B. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

C. $\{x|-1<x<0$ 或 $0<x<1\}$

D. $\{x|x\neq0\}$

4. 函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+2x+3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是　　　　(　)

A. $a>0$　　B. $a\geqslant\frac{1}{3}$

C. $a\leqslant\frac{1}{3}$　　D. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$

5. 下列四个命题

①$ax>b(a\neq0)$ 的解集为 $\{x|x>\frac{b}{a}\}$;

②$x^2>b$ 的解集是 $\{x||x|>b\}$;

③$\frac{x}{x+1}<1$ 的解集是 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-1\}$;

④$x^2-1>0$ 的解集是 $\{x||x|>1\}$.

其中正确的是　　　　(　)

A. ①③　　B. ②④　　C. ④　　D. ①②③④

能力升级

6. 如果函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么可能有 ( )

A. $f(2)<f(1)<f(4)$　B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$　D. $f(4)<f(2)<f(1)$

7. $|x+2|-|x-2|>0$ 的解集为______.

8. 方程 $2mx^2-2x-3m-2=0$ 的两实根一个大于 1，另一个小于 1，则实数 m 的取值范围是______.

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, x\geq0,\\ -1, x<0,\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+2)f(x+2)\leq5$ 的解集是______.

跨越重点

10. 设 $x\in\mathbf{R}$，是否存在正整数 m，使不等式 $\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}\geq m$ 恒成立，若存在，求出 m 的值，若不存在，说明理由.

1.3　简易逻辑

考点导读

了解命题的概念和命题的构成，理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，并能判断命题的真假；掌握四种命题之间的相互关系及真假判断并掌握反证法的基本方法.

学法导引

1. ______的语句叫做命题. 命题由____两部分构成；命题有______之分；

数学中的定义、公理、定理、公式等都是______.

2. ______叫简单命题. ______称为复合命题；逻辑联结词有______.

复合命题构成形式有三种：______、______、______.

3. 判断复合命题真假的方法——真值表：

p	q	p 或 q	p 且 q	非 p
真	真			
真	假			
假	真			
假	假			

p 或 q 简述为______，p 且 q 简述为______，非 p 简述为______.

4. 四种命题：

原命题：若 p 则 q；逆命题：______；

否命题：______逆否命题：______.

5. 四种命题的关系是：原命题与______同真假；否命题与______同真假.

6. 用反证法证题的基本步骤______.

初试导练

1. 用下列各组命题构成"p 或 q"，"p 且 q"，"非 p"形式的复合命题，其中以"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，"非 p"为真的一组是 ( )

A. p：π 是有理数，q：$\sqrt{a}$ 是无理数（$a\in\mathbf{R}$）

B. p：$2\sqrt{3}<\sqrt{6}+1$，q：$5\geq3$

C. p：$Q\subset\mathbf{R}$，q：$\mathbf{N}=\mathbf{Z}$

D. p：$\arccos0=\dfrac{\pi}{2}$，q：$\arctan(-1)=\dfrac{\pi}{4}$

2. 若 p、q 是两个简单的命题，且"p 或 q"的否定是真命题，则必有 ( )

A. p 真 q 真　B. p 假 q 假　C. p 真 q 假　D. p 假 q 真

3. 命题"正偶数不是质数"与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中，假命题有 ( )

A. 4 个　B. 3 个　C. 1 个　D. 0 个

4. 填写下表：

词语	是	都是	大于	所有的	任一个	至少一个	至多一个
词语的否定							

例题导析

例 1 指出下列各题中的"p 或 q"，"p 且 q"，"非 p"形式的复合命题的真假.

(1) p：梯形有一组对边平行，q：梯形有一组对边相等；

(2) p：5 是 17 的约数，q：5 是 15 的约数；

(3) p：-1 是方程 $x^2+2x+3=0$ 的解，q：-3 是方程 $x^2+2x+3=0$ 的解；

(4)p:不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集是 $\mathbf{R}$,q:不等式 $x^2+2x+2\leqslant 1$ 的解集是 $\varnothing$;

(5)p:$a\in\{a,b,c\}$,q:$\{a\}\subset\{a,b,c\}$.

例4 写出以下原命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.

(1)如果学好了数学,那么就会使用电脑;

(2)若 $x=3$ 或 $x=7$,则 $(x-3)(x-7)=0$;

(3)正方形是矩形又是菱形;

(4)若 a、b 都是奇数,则 ab 必是奇数.

例3 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,a,$b\in\mathbf{R}$,对命题"若 $a+b\geqslant 0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1)写出它的逆命题,判断真假,并证明你的结论;

(2)写出其逆否命题,判断真假,并证明你的结论.

例4 用反证法证明:已知 $f(x)=x^2+bx+c$,则 $|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

技巧导津

1."或"、"且"、"非"与集合中的"并"、"交"、"补"有密切的联系.(例 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$)

2. 复合命题的判断可分为三步:

(1)先明确复合命题的形式是"p 或 q","p 且 q",还是"非 p";

(2)然后判断构成此复合命题的简单命题的真假;

(3)最后利用真值表作出复合命题真假的判断.

3. 一个命题的真假难以判断时,可考虑判断其逆否命题的真假.

4. 在命题中含有"至多"、"至少"等否定词,已知条件较少,正面证明较难时可考虑用反证法证明.

随堂演练

基础过关

1. 命题"$1<x<2$"属于下列哪一类命题　　( )

A. 简单命题

B. p 且 q 形式复合命题

C. p 或 q 形式复合命题

D. 非 p 形式复合命题

2. 命题 P:若 a、$b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件;命题 q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.则　　( )

A."p 或 q"为假　　B."p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

3. 若一个命题的否命题是真命题,则其逆命题　　( )

A. 不一定是真命题　　B. 一定是真命题

C. 一定是假命题　　D. 不一定是假命题

4.(2005·江苏)命题"若 $a>b$,则 $2^a>2^b-1$"的否命题为____________.

5. 给出如下命题：

①若 $x>1$，或 $y>2$，则 $x+y>3$；

②若 $a^2+|b|=0$，则 $a=0$，且 $b=0$；

③若 a 是无理数，且 b 是实数，则 $a+b$ 为无理数；

④若两条直线的斜率相等，则这两条直线平行；

⑤351 能被 7 或 9 整除；

⑥若 $m<0$，则 $x^2+2x+m=0$ 有实根；

⑦三个角为直角的四边形为矩形；

⑧在△ABC 中，若 $\sin A>\sin B$，则 $A>B$；

⑨平行四边形的对角线互相平分；

⑩若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

其中原命题为真命题的序号是________________；

其中逆命题为真命题的序号是________________.

能力升级

6. 已知下列四个命题：

①a 是正数；②b 是负数；③$a+b$ 是负数；④ab 是非正数. 写出一个逆否命题是真命题的复合命题______.

7. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假.

(1)若 $x^2+y^2=0$，则 x、y 全为零；

(2)若 $xy=0$，则 x，y 中至少有一个是零.

8. 在△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别为 a、b、c，若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，求证：∠$B$ 必为锐角.

跨越重点

9. 若 a、b、c 均为实数，且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，求证：a、b、c 中至少有一个大于 0.

1.4 充要条件

考点导读

掌握充分条件、必要条件、充要条件等概念，能够判断给定两个命题之间的充要关系.

学法导引

1. 如果 $p\Rightarrow q$，则 p 叫做 q 的____________，q 叫做 p 的____________.

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，那么 $p\Leftrightarrow q$，则 q 叫做 p 的______.

充要关系还可用集合语言叙述：

若 $A\subset B$，则 A 叫做 B 的______，B 叫做 A 的_______.

若 $A=B$，则 A 叫做 B 的充要条件.

2. 四种命题的等价关系是_______.

初试导练

1. 不等式 $|2x+5|\geqslant 7$ 成立的一个必要而不充分的条件是 ( )

A. $x\geqslant 1$　　B. $x\leqslant -6$

C. $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -6$　　D. $x>0$ 或 $x<0$

2. $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是　（　）

A. $0<a\leqslant 1$　　B. $a<1$

C. $a\leqslant 1$　　D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a<0$

3. "点 M 的坐标是方程 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的解"是"点 M 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上"的　（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. "$b^2=ac$"是"a、b、c 成等比数列"的________.

例题导析

例1 (1)设甲、乙、丙是三个命题.如果甲是乙的必要条件,丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件,那么　（　）

A. 丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件

B. 丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件

C. 丙是甲的充要条件

D. 丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件

(2)"$x+y\neq -2$"是"x,y 不都为 -1"的　（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(3)已知 A、B、C 三个集合;命题 p:$A\subset B$ 或 $A\subset C$;命题 q:$A\subset(B\cap C)$,则 p 是 q 的　（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例2 (1)是否存在实数 p,使"$4x+p<0$"是"$x^2-x-2>0$"的充分条件?如果存在,求出 p 的取值范围.

(2)是否存在实数 p,使"$4x-p<0$"是"$x^2-x-2>0$"的必要条件?如果存在,求出 p 的取值范围.

例3 设 $x,y\in\mathbf{R}$,求证:$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

例4 曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 与 $y=k(x-2)+4$ 有两个交点的充要条件是什么?

技巧导津

1. 要判断命题的条件与结论的充要关系,首先要分清命题的条件是什么,结论是什么.在此基础上,如果条件能推出结论来,那么这个条件是结论成立的充分条件;反过来,如果由结论能推出条件来,那么这个条件是结论成立的必要条件.

2. 若条件推结论较难时,可以考虑它的逆否命题.

3. 充要条件的证明,要证明充分性和必要性两个方面.

随堂演练

基础过关

1. 在$\triangle ABC$中,"$\angle A>\angle B$"是"$\sin A>\sin B$"的　（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. “$a=1$”是“$y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的 ( )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若非空集合 $M\subset N$,则“$a\in M$ 或 $a\in N$”是“$a\in M\cap N$”的 ( )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

4. 已知数列$\{a_n\}$,那么“对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,点 $P_n(n,a_n)$都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$为等差数列”的 ( )

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. (2005·江西)在$\triangle ABC$ 中,设命题 p:$\frac{a}{\sin B}=\frac{b}{\sin C}=\frac{c}{\sin A}$,命题 q:$\triangle ABC$ 是等边三角形,那么命题 p 是命题 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

能力升级

6. 用“充分不必要条件”、“必要不充分条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”填空.

(1)$x,y\in\mathbf{R}$,$x>1$ 是 $x^2+2x-3>0$ 的________.

(2)$x\neq2$ 且 $y\neq3$ 是 $x+y\neq5$ 的________.

(3)$x\neq2$ 或 $y\neq3$ 是 $x+y\neq5$ 的________.

(4)两条直线平行是这两条直线的斜率相等的________.

(5)x、y 至少有一个不为零是 $x^2+y^2\neq0$ 的________.

(6)A 的充分不必要条件是 B,则 $\neg A$ 是 $\neg B$ 的________.

(7)$\alpha=\beta$ 是 $\tan\alpha=\tan\beta$ 成立的________.

7. 命题 A:两曲线 $F(x,y)=0$ 和 $G(x,y)=0$ 相交于点 $P(x_0,y_0)$,命题 B:曲线 $F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$(λ 为常数)过点 $P(x_0,y_0)$,则 A 是 B 的________

8. 已知 $x^2-mx+3m-2=0$ 的两根大于 1,求 m 的取值范围.

跨越重点

9. 证明:二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为偶函数的充要条件是 $b=0$.

10. 证明二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的两个零点在点$(m,0)$的两侧的充要条件是 $af(m)<0$.