高等学校教材

杨向群　主审

基础高等数学

湖南师范大学数学与计算机科学学院　组编

第二版

主编　彭富连　刘迪芬

湖南教育出版社

高等学校教材

杨向群 主审

基础高等数学

湖南师范大学数学与计算机科学学院 组编

第二版

主　编　彭富连　刘迪芬

副主编　许振泽　吴宗其　昌国良　秦宣云

编　者　彭富连　刘迪芬　许振泽　吴宗其
　　　　昌国良　汤自凯　秦宣云　谢海明　周立仁

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

基础高等数学/湖南师范大学数学与计算机科学学院编.—长沙:湖南教育出版社,2004

Ⅰ.基... Ⅱ.湖... Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072158 号

基础高等数学

湖南师范大学数学与计算机科学学院

责任编辑:蒋 芳

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)

网 址:http://www.hneph.com

电子邮箱:postmaster@hneph.com

湖南省新华书店经销 湖南广播电视大学印刷厂印刷

787×1092 18 开 印张:21 $\frac{2}{3}$ 字数:400000

2004 年 7 月第 1 版 2006 年 4 月第 2 版第 1 次印刷

印数:9001—19000

ISBN7-5355-4309-X/G·4304

定价:31.00 元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

前　言

本书的初版是一本适合于D类(即文、史、哲、法、外、新闻、教科类等)及部分C类(即经济学与管理学类、会计、旅游、生物、医科、人口、资源与环境经济学类等)专业使用的教材.本书自初版发行以来,深受广大师生的好评和厚爱,也得到专家同行的肯定,认为该书在编写体例和内容上有自己的特色,是作者多年教学的积累,融入了丰富的教学经验,重点突出、注重基础、注重应用、内容精要、深入浅出、语言叙述细腻,是一部非常合用的教材,我们深感欣慰.

为了使该书能更好地适应形势的发展,能满足更多的院校和更多专业的需要,并保持它的先进性与实用性,我们决定对初版进行修订.为了搞好这次修订,湖南师范大学数学与计算机科学院组织使用本书初版作为教材的部分老师进行了认真的研讨,并考虑和吸收了有关专家及兄弟院校的同行对此次修订提出的意见和建议.在此次修订中,第一编增加的多元函数一章介绍有关二元函数的基本概念,偏导数与微分的概念及求法,二重积分的概念与计算;第二编在有些章节的叙述上作了一些小的修改,并增加了一定的习题量;第三编增加了一节,用于介绍二维随机变量.

全书共三编十五章,教学内容是按一个学年安排的.计划学时为:第一编《一元微积分与多元微积分》约70学时;第二编《线性代数》约30学时;第三编《概率与统计》约30学时;“数学文化”约10学时,这部分内容主要是供读者参考,它有助于读者了解所学数学知识的背景和历史发展过程.若周学时为3,按一个学期安排,建议选用第一编中的第一章至第六章,即一元微积分部分;若周学时为4,按一个学期安排,建议选用第一编;若按两个学期安排,建议第一学期选用第一编,第二个学期选用第二编与第三编.为了使该书所包含的内容能适应要求不完全相同的读者的需要,我们在书中写了一些供选学的内容,这些内容均用“*”号标出.针对各院校对高等数学的具体安排,在教学过程中,教师可根据具体情况对教材内容作必要的删减或增补.

该书可作为高等院校文科、经济、管理、会计、医学、生物、旅游等专业、高等工业院校本科少学时专业以及一些专科学校的教材,也可作为相关专业的成人教育、网络教育以及工程技术人员的教材或参考书.

本书由湖南师范大学数学与计算机科学学院组编.本书修订分工为:前言、第一章、第二章、第七章、第八章由彭富连(湖南师大),秦宣云(中南大学),汤自凯(湖南师大)完成;第三章、第四章、第五章、第六章由刘迪芬(湖南师大),谢海明(湘南学院)完成;第九章、第十章、第十一章、第十二章由许振泽(湖南师大),周立仁(湖南理工学院)完成;第十三章、第十四章、第十五章由吴宗其(湖南师大)完成;"数学文化"由昌国良(湖南师大)完成;最后由彭富连统稿、定稿.在本书修订中,我院"国家有突出贡献专家"、博士生导师杨向群教授在百忙中认真审阅了书稿,欧阳柏玉教授审阅了该书部分内容,对他们提出的宝贵意见,表示衷心的感谢.

本书的编写和出版,得到了湖南师范大学数学与计算机科学学院和湖南教育出版社领导的高度重视和支持,罗治国副院长主持并参与了该书从策划到成书的整个过程,湖南教育出版社的龙育群主任亲自参与我们的编写讨论工作,在编辑出版过程中,责任编辑蒋芳小姐作了大量的工作,在此向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中难免有一些疏漏,恳请读者批评指正.

编　者

2006年2月

目　　录

第二编　线性代数

第三编　概率与统计

第一编　一元微积分与多元微积分

微积分主要包含函数微分学与函数积分学两部分．它以变量作为研究对象，以极限方法作为研究手段．本编将介绍一元函数、极限、函数的连续性、导数与微分、不定积分、定积分、常微分方程、多元函数、偏导数、二重积分等基本概念、基本理论和基本计算方法以及它们的一些应用．

第一章　预备知识

§1　集　合

1.1　集合的概念及运算

我们把具有某种特定性质的事物的全体，称为集合，简称集．组成这个集合的事物称为集合的元素．

一般以大写的拉丁字母 $A,B,M,\cdots$ 表示集合，小写的拉丁字母 $a,b,x,\cdots$ 表示元素．若 a 是 A 的元素，我们就说 a 属于 A，记为 $a\in A$．如果 a 不是 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$．

如果一个集合含有有限个元素，则称这个集合为有限集；如果这个集合含有无限个元素，则称它为无限集．

由研究对象的全体构成的集合称为全集，记作 U．不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$．由数或点所组成的集合简称为数集或点集．常用的数集及符号是：不含 0 的自然数集 $\mathbf{N}^*$，自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$．

设 A,B 是两个集合，如果 A 的一切元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$．如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A,B 相等，记作 $A=B$．

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$；由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$；由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$；已知全集 U 及 U 的子集 A，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作集合 A 在集合 U 中的补集，记作 $\complement_U A$ 或 $\overline{A}$．

集合的并、交、补运算满足如下的运算律：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4)对偶律(德·摩根(De Morgan)定理)

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$,

$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

1.2　区间和邻域

在一元微积分中,我们常用的实数集是区间. 设 $a,b\in\mathbf{R}, a<b$:

满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间,记为(a,b).

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间,记为$[a,b]$.

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间,记为$(a,b]$或$[a,b)$.

根据实数和数轴上点的一一对应关系，这些有限区间可以在数轴上表示出来，点 a 和点 b 称为这些区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

除以上列出的有限区间外,还有无限区间:

$(-\infty,+\infty)$表示全体实数;$(a,+\infty)$表示满足不等式 $a<x$ 的实数 x 的集合;$(-\infty,a)$表示满足不等式 $x<a$ 的实数 x 的集合.

邻域也是我们今后常用的一种集合. 设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}, \delta>0$,称集合

$$\left\{x \,\middle|\, |x-x_0|<\delta\right\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 由绝对值的性质知,点 x_0 的 δ 邻域就是指 x_0 附近的全体实数组成的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,如图 1-1 所示.

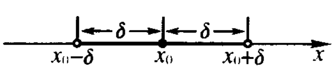

图 1-1

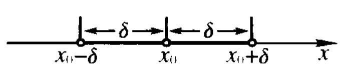

图 1-2

如果把邻域的中心 x_0 去掉,则称为 x_0 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-x_0|<\delta\right\}$,如图 1-2 所示.

应当指出,邻域的半径 δ 虽然没有明确规定其大小,但一般总取很小的正数.

§2　函　数

函数是微积分研究的主要对象，它反映了变量之间的一种对应关系.

2.1　函数的定义

我们先来看一个例子. 设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的依赖关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2（g\text{ 为重力加速度}）$$

确定. 在这个关系中，距离 s 随着时间 t 的变化而变化，当下落时间 t 取定一个值时，对应的距离 s 也随之确定.

如果抽去所考察变量的具体意义，我们看到，它表达了两个变量间的一种对应关系：当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一个变量就有唯一确定的一个值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义　设 x 和 y 是两个变量，X 是一个给定的数集，如果当变量 x 在集合 X 中每取定一个数值时，变量 y 依照某种法则总有唯一的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 X 叫作这个函数的定义域，变量 x 叫作自变量，变量 y 叫作因变量.

当 x 取遍 X 中的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $Y=\{y|y=f(x),x\in X\}$ 称为函数的值域.

表示函数的记号 f 也可改用其他字母，例如 φ,g 等，此时记作 $y=\varphi(x)$，$y=g(x)$ 等.

在上述定义中，x 是在一个数集 X 中取值，即我们讨论的函数只有一个自变量，这种函数叫作一元函数. 在一些实际问题中，有时会遇到多个变量之间的依赖关系，若因变量依赖于多个自变量，这种函数叫作多元函数.

给定函数 $y=f(x)$，它的图象是 xOy 平面上的一个子集，这个子集是

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in X\}.$$

它是由平面上这样的点 (x,y) 组成：x 在 X 上变化，而 y 满足 $y=f(x)$. 一般说来函数的图象是一条平面曲线，如图 1-3 所示.

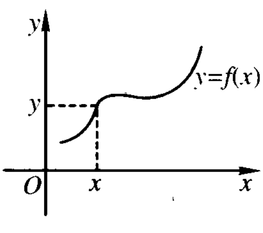

图 1-3

对函数的定义，这里要特别指出两点：定义域与对应关系.

定义域——自变量 x 的变化范围. 一般分为两

种：一种是自然定义域，若函数是由解析式表示的，那么使解析式有意义的 x 的集合称为函数的自然定义域；一种是由实际问题确定的，如在前面的例子中，设物体落到地面的时间为 T，则定义域为 $[0,T]$.

对应关系——给定自变量 x，确定函数 f 在点 x 处函数值 y 的法则.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

解 由

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ 1-x^2\neq 0,\end{cases}$$

得

$$-1<x<1,$$

故函数的定义域为

$$(-1,1).$$

例 2 已知函数 $y=f(x)=\frac{3}{1+x^2}$，求 $f(-1)$，$f(\frac{1}{x})$.

解 此处

$$f(\quad)=\frac{3}{1+(\quad)^2},$$

故有

$$f(-1)=\frac{3}{1+(-1)^2}=\frac{3}{2},$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{3}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{3x^2}{x^2+1}.$$

在中学阶段，我们学过映射的概念. 对于映射 $f:A\to B$，根据集合 A,B 的不同情况，在不同的数学分支中，术语“映射”有着不同的惯用名称，如“函数”、“泛函”、“变换”、“算子”等等. 我们所说的函数 f，实际上就是 A,B 为实数集时的映射.

2.2 函数的表示法

函数的表示方法有很多，常用的有三种：解析法、图象法、列表法.

用解析法表示的函数可以由一个解析式给出，也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数称为分段函数.

下面举两个常用的分段函数的例子：

(1)符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

它的定义域为 $X=(-\infty,+\infty)$，值域为 $Y=\{-1,0,1\}$，其图象如图 1-4 所示.

(2)取整函数

$$y=[x], x\in \mathbf{R}.$$

其中记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如$\left[\frac{2}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$. 它的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{Z}$，其图象如图 1-5 所示.

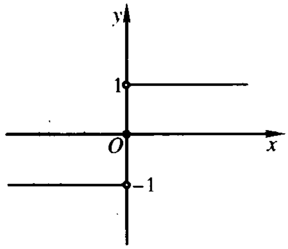

图 1-4

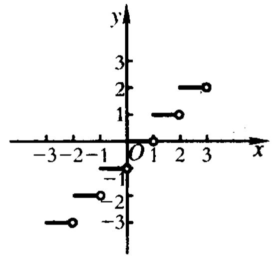

图 1-5

2.3 建立函数关系

根据实际问题建立函数关系，先要确定问题中的自变量、因变量以及对应关系，再将这种关系表示出来.

例 3 设计一个体积为 V 的有盖圆柱形容器，求其表面积 A 和底半径 R 之间的函数关系.

解 设圆柱形容器的高为 H，于是其表面积为

$$A=2\pi R^2+2\pi RH.$$

由 $V=\pi R^2 H$，得 $H=\frac{V}{\pi R^2}$，代入上式，得

$$A=2\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{2V}{R},$$

定义域为$(0,+\infty)$.

在日常生活中，个人或企业向银行贷款要付利息，利息是按规定的利率和期限付息的. 利息又分单利、复利、连续复利等方式.

例 4(单利问题) 设一笔贷款的本金为 p_0，年利率为 r，贷款期限为 x

年，求本利和 P.

解 一年的利息为 $p_0 r$，x 年的单利为 $p_0 rx$，所以本利和为

$$P=p_0+p_0 rx=p_0(1+rx).$$

例 5(复利问题) 设一笔贷款的本金为 p_0，年利率为 r，贷款期限为 x 年，求本利和 P.

解 贷款满一年后的本利和为

$$P_1=p_0(1+r).$$

将 P_1 作为第二年的本金，则两年后的本利和为

$$P_2=P_1(1+r)=p_0(1+r)^2.$$

于是得到 x 年后的本利和为

$$P_x=p_0(1+r)^x.$$

下面介绍几个常用的经济函数.

设某种产品在某个时间范围内，如果视价格以外的因素不变，则需求量 Q 可视为价格 P 的函数，记作 $Q=Q(P)$，称为需求函数；若生产 x 件产品的固定成本为 C_0，变动成本为 $C_1(x)$，则总成本函数为 $C=C(x)=C_0+C_1(x)$；销售 x 件产品的总收益函数为 $R=R(x)$；总收益和总成本之差记作 $L(x)=R(x)-C(x)$，称为总利润函数.

例 6 某民营企业生产某种产品的固定成本为 12 000 元，每单位产品的可变成本为 10 元，售价为 30 元，求：(1)固定成本函数；(2)可变成本函数；(3)总成本函数；(4)总收益函数；(5)总利润函数.

解 设产量为 x，则

(1) $C_0=12\,000$；　　(2) $C_1=10x$；

(3) $C=12\,000+10x$；　　(4) $R=30x$；

(5) $L=30x-(12\,000+10x)=20x-12\,000$.

例 7 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从长沙到某地每千克收 0.15 元；当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求长沙到某地的行李费 y(元)与重量 x(千克)之间的函数关系.

解
$$y=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50, x\in\mathbf{N}^*;\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50, x\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$$

注意建立函数关系除写出对应关系之外，应同时写出定义域，定义域的确定原则是：既要使表达式有意义，又要使实际问题有意义.

§3 函数的性质

3.1 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X，若存在 $K>0$，使得$|f(x)|\leqslant K$ 对 $\forall x\in I\subset X$都成立，则称函数 f 在 I 上是有界的，K 叫作 f 在 I 上的界. 如果这样的 K 不存在，则称函数 f 在 I 上是无界的.

显然，函数 f 在 I 上有界的充要条件是：

存在两个数 A,B，使得 $A\leqslant f(x)\leqslant B$ 对 $\forall x\in I\subset X$ 都成立. 其中 A 为它的下界，B 为它的上界.

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的，因为$|\sin x|\leqslant 1$；而 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上是无界的，但在$[1,+\infty)$上是有界的.

注意有界函数的界不是唯一的. 例如对于 $y=\sin x$，不仅 1 是它的界，任何一个大于 1 的数都是它的界. 不难看出，有界函数的图象总是位于平行于 x 轴的直线 $y=A$ 与 $y=B$ 之间.

3.2 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，$\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 f 在 X 上单调递增；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 f 在 X 上单调递减. 单调递增和单调递减函数统称为单调函数.

例如，$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；$y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增，但在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.

3.3 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 X 关于原点对称，即当 $x\in X$ 时，有 $-x\in X$. 若函数 f 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数；若函数 f 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数.

例如，函数 $y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\csc x$ 都是奇函数；$y=x^2$，$y=|x|$，$y=\cos x$，$y=\sec x$ 都是偶函数，而 $y=x^3+x^2$，$y=\sqrt{\sin x}$是非奇非偶函数.

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称. 图 1-6 和图 1-7 分别为 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$和 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$的图象.

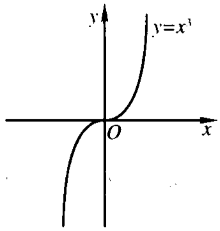

图 1-6

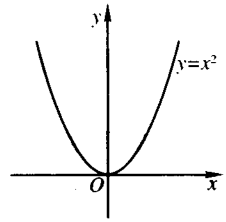

图 1-7

3.4 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 X,如果存在不为 0 的数 T,使得对每一个 $x\in X$,有 $x\pm T\in X$,且总有 $f(x+T)=f(x)$,就称 $f(x)$是周期函数,T 称作$f(x)$的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

例如 $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\csc x$ 的周期为 2π, $\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期为 π.

并不是每一个周期函数都有最小正周期,例如对于常数函数 $y=C$ 来说,任何正实数都是它的周期,由于最小的正数是不存在的,所以它没有最小正周期.

§4 反函数与复合函数

4.1 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,值域为 Y,如果对于 $\forall\, y\in Y$,都有 X 中唯一的 x 值,使得 $f(x)=y$,则称变量 x 为变量 y 的函数,记为 $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$. 相应地,我们称 $x=f^{-1}(y)$为 $y=f(x)$的反函数,其定义域为 Y,值域为 X. 通常称 $y=f(x)$为直接函数,显然反函数的定义域和值域分别是直接函数的值域和定义域.

习惯上常用字母 x 表示自变量,y 表示因变量,这样 $y=f(x)$的反函数就写为 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图象是关于直线 $y=x$ 对称的,这是由于互为反函数的两个函数的因变量与自变量互换的缘故:若(a,b)是 $y=f(x)$的图象上的一点,则(b,a)就是 $y=f^{-1}(x)$的图象上的一点,而 xOy 平面上的点(a,b)与点(b,a)关于直线 $y=x$ 对称. 例如指数函数 $y=e^x$ 和对数函数$y=\ln x$,它们互为反函数,其图象显然关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-8 所示.

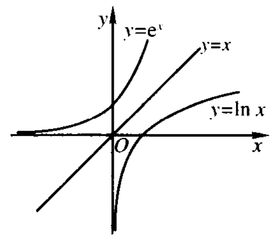

图 1-8

求反函数的步骤为:由方程 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$,再将 x 与 y 对换,

即得所求函数的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 求 $y=x^2+1(x\geqslant 0)$ 的反函数.

解 由

$$y=x^2+1,$$

得

$$x=\pm\sqrt{y-1},$$

又 $x\geqslant 0$,所以

$$x=\sqrt{y-1},$$

因而反函数为

$$y=\sqrt{x-1}\ (x\geqslant 1).$$

注意只有一一对应的函数才有反函数,因为单调函数是一一对应的,所以单调函数一定有反函数.下面我们介绍反函数存在定理:

若函数 $y=f(x),x\in X$ 是单调递增(递减)的,则存在它的反函数 $x=f^{-1}(y),\ y\in Y$,并且反函数也是单调递增(递减)的.

例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一一对应的,所以它没有反函数,若将函数限制为 $y=x^2,x\in(-\infty,0]$ 或 $x\in[0,+\infty)$ 时,其反函数分别为 $y=-\sqrt{x}$ 和 $y=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$.

同样,对正弦函数 $y=\sin x,X=(-\infty,+\infty),Y=[-1,1]$,在 X 上不是一一对应的,通常为了保证一一对应,我们就把它限制在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上.此时,它的反函数存在,叫作反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,并且在定义域上单调递增.我们把在这样的单调区间上所建立起来的反三角函数称为反三角函数的主值.类似地,有

$$y=\cos x,x\in[0,\pi] \text{ 与 } y=\arccos x,x\in[-1,1];$$

$$y=\tan x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ 与 } y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty);$$

$$y=\cot x,\ x\in(0,\pi) \text{ 与 } y=\operatorname{arccot} x,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

互为反函数.

4.2 复合函数

在某个变化过程中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量联系起来的.例如 $y=f(u)=\sqrt{u}$,又 $u=\varphi(x)=1-x^2$,那么用简单的代入法,得到一个新的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,把它叫作由 f 和 φ 复合而成的复合函数,

在这里 y 通过变量 u 变成 x 的函数，而 u 本身并不是自变量，我们把它叫作中间变量.

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，$u=\varphi(x)$ 的值域为 $R_\varphi \subset U$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 f 和 φ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

复合函数的概念通俗地说就是函数套函数. 我们把 $\varphi(x)$ 叫作内函数，把 $f(u)$ 叫作外函数. 由复合函数的定义可知，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域或者与 $\varphi(x)$ 的定义域完全相同，或者只是 $\varphi(x)$ 的定义域的一部分. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 看作由 $y=\sqrt{u}$ 经 $u=1-x^2$ 复合而成，但是 $u=1-x^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$，相应的值域 $(-\infty,1]$ 并没有完全包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 中，只有当 $u=1-x^2$ 的定义域取为 $[-1,1]$ 时，值域 $[0,1]$ 才包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内，因此复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$. 还要注意不是任何两个函数都能复合成一个函数，例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$，因为这个函数对任何实数都无意义.

求复合函数定义域的步骤是“从外到内”，求出使算式有意义的一切实数 x. 一般是先列出不等式或不等式组，再求解.

例 2 求复合函数 $y=\ln\cos x$ 的定义域.

解 $y=\ln\cos x$ 可看成是由

$$y=\ln u, u=\cos x$$

复合而成的.

由 $u>0$，得 $\cos x>0$，故定义域为

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbf{Z}).$$

复合函数的概念可以推广到有限多个函数复合的情形. 例如函数 $y=e^{\sin\sqrt{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成的，定义域为 $[0,+\infty)$.

§5 初等函数

5.1 基本初等函数

我们所遇到的函数，一般是由几种最简单的函数构成的，即：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这五类函数叫作基本初等函数. 为了查阅方便，本书用列表的方式列出它们的表达式、图象和简单性质.