与人教版最新教材
同步配套

新编数学ABC

《数学ABC》编写组 编

走向大学丛书

高中二年级〈上〉

浙江大学出版社

●高中二年级(上)

数学 A B C

《数学 ABC》编写组　编

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学 ABC．高中二年级．上／《数学 ABC》编写组编．
6 版．一杭州：浙江大学出版社，2002.7
（走向大学丛书）
ISBN 7-308-02547-0

Ⅰ．数... Ⅱ．数... Ⅲ．数学课—高中—教学参考
资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 017039 号

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 8.25
字　　数 208 千
版 印 次 2002 年 7 月第 6 版 2006 年 5 月第 14 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-02547-0/G・492
定　　价 8.00 元

再版前言

在这姹紫嫣红的春天，我社迎来了“高中 ABC 丛书”出版的第十个年头。丛书出版以来，发行量逐年攀升，备受广大师生的关注和青睐。新学期伊始，我社邀请了杭州二中等著名中学的特级教师、高级教师，对“高中 ABC 丛书”进行了全面的改版和修订。

改版后的“高中 ABC 丛书”有如下特点：

1. 内容结构合理　丛书与现行人教版教材密切配套，按章分节编写，由知识要点、例题精析、同步练习及能力测试等板块组成。

2. 注重能力培养　丛书力求贯彻现代教育新理念，以思维训练为焦点，以方法创新为主线，以能力培养为核心。

3. 突出重点难点　题型归纳分类解析，思维激活举一反三，重点内容反复强调，难点之处逐个解决。

4. 题量丰富，试题新颖　丛书通过丰富的试题覆盖所学的知识与技能，在练习设计上注重梯度，并针对不同层次的学生安排 A、B、C 多组题目；试题设计新颖，切中高考重点、热点。

目　录

第六章　不等式

6.1　不等式的性质(1)

【知识要点】

实数的运算性质与大小之间的关系

(1)$a>b \Leftrightarrow a-b>0$;(2)$a=b \Leftrightarrow a-b=0$;(3)$a<b \Leftrightarrow a-b<0$.

【典型例题】

例1　已知$a>b>0$,试比较$\frac{2a+b}{a+2b}$与$\frac{a}{b}$的大小.

解　$\because \frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{b(2a+b)-a(a+2b)}{(a+2b)b}=\frac{b^2-a^2}{(a+2b)b}$.

又$\because a>b>0$,$\therefore a+2b>0$,$a^2>b^2$.

$\therefore \frac{b^2-a^2}{(a+2b)b}<0$,　$\therefore \frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}<0$,　$\therefore \frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$.

说明　要比较两个数(或式)的大小,有时可以转化为比较这两个数(或式)的差与零的大小.其一般步骤为:作差→变形→定号(差的符号)→结论.

例2　已知a,b,m,n都是正实数,且$m+n=1$,比较$\sqrt{ma+nb}$与$m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$的大小.

解　$\because m+n=1$且$(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2=ma+nb-(m^2a+n^2b+2mn\sqrt{ab})=ma(1-m)+nb(1-n)-2mn\sqrt{ab}=mn(a-2\sqrt{ab}+b)=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$,

$\therefore \sqrt{ma+nb}\geqslant m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

当$a=b$时　$\sqrt{ma+nb}=m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

当$a\neq b$时　$\sqrt{ma+nb}>m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

说明　对于两个正实数,当直接作差比较有困难时,可考虑比较它们的平方的大小.

例3　已知$a>0,b>0,n\in \mathbf{N}^*$且$n>1$,试比较$a^n+b^n$与$a^{n-1}b+ab^{n-1}$的大小.

解　$a^n+b^n-(a^{n-1}b+ab^{n-1})=a^{n-1}(a-b)-b^{n-1}(a-b)=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$.

$\therefore$当$a>b>0$时,$a-b>0$,$a^{n-1}-b^{n-1}>0$.故$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})>0$.

当$0<a<b$时,$a-b<0$,$a^{n-1}-b^{n-1}<0$.故$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})>0$.

$\therefore$当$a\neq b$时　$a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

当$a=b$时　$a^n+b^n=a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

说明　当差的符号不确定时,对变量分类讨论再"定号".

【同步训练】

1. 若$x+y>0$,$a<0$,$ay>0$,则$x-y$的值　(　　)

(A)大于0　　(B)等于0　　(C)小于0　　(D)符号不能确定

2. 已知$m<n<0$,则下列不等式成立的是　(　　)

(A)$m^2<mn<0$　　(B)$m^2<mn<n^2$

(C)$m^2<n^2<0$　　(D)$m^2>n^2>0$

3. 若 $f(x)=3x^2-x+1, g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ( )

(A) $f(x)>g(x)$　　(B) $f(x)=g(x)$

(C) $f(x)<g(x)$　　(D) 随 x 值变化而变化

4. 设 $0<x<1$，则下列不等式中成立的是 ( )

(A) $\sqrt[3]{x}<\lg x<3^x$　　(B) $\lg x<\sqrt[3]{x}<3^x$

(C) $\lg x<3^x<\sqrt[3]{x}$　　(D) $\sqrt[3]{x}<3^x<\lg x$

5. 设 $a>0, a\neq 1, x=\log_a(a^3+1), y=\log_a(a^2+1)$，则 x,y 的大小关系是 ( )

(A) $x>y$　　(B) $x<y$

(C) $x=y$　　(D) 大小关系不能确定

6. 若 $a\neq 2$ 或 $b\neq -1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 的值与 -5 的大小关系是________.

7. 已知 $a>1, m>n>0$，试比较 $a^m+\frac{1}{a^m}$ 与 $a^n+\frac{1}{a^n}$ 的大小．

8. 已知 $x>y>0$，试比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{y}{x}$ 的大小．

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0, a_3=b_3>0$，试比较 a_5 和 b_5 的大小．

6.1　不等式的性质(2)

【知识要点】

不等式的主要性质

1. $a>b \Leftrightarrow b<a$

2. $a>b$ 且 $b>c \Rightarrow a>c$

3. $a>b, c\in \mathbf{R} \Rightarrow a+c>b+c$

4. $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$

5. $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

6. $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$

7. $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

8. $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ ($n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}$)

9. $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}$)

【典型例题】

例 1　判断下列命题的真假并说明理由．

(1) 若 $a>b$ 则 $ac^2>bc^2$

(2)若 $ac^2>bc^2$ 则 $a>b$

(3)若 $a<b<0$ 则 $a^2>ab>b^2$

(4)若 $a>b,ab>0$ 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(5)若 $c>a>b>0$ 则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$;

(6)若 $a>b>0,c>d>0$ 则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$;

(7)若 $a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 则 $a>0,b<0$

解　(1)当 $c=0$ 时 $ac^2=bc^2$,∴是假命题.

(2)∵$ac^2>bc^2$,∴$c\neq0$,即 $c^2>0$,∴是真命题.

(3)$a<b,a<0\Rightarrow a^2>ab,a<b,b<0\Rightarrow ab>b^2$,∴ 是真命题.

(4)∵$a>b,ab>0$,∴$\frac{1}{ab}a>\frac{1}{ab}b$,即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,∴是真命题.

(5)∵$c>a>b>0$,∴$c-b>c-a>0\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}$.

又∵$a>b>0$,∴$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$,∴是真命题.

(6)若 $a=2,b=1,c=4,d=1$,则 $\frac{a}{c}=\frac{1}{2},\frac{b}{d}=1$,∴是假命题.

(7)∵$a>b,\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\Rightarrow ab<0$,又 $a>b\Rightarrow a>0,b<0$ 是真命题.

说明　在判断命题的真假时,如果是真命题,必须说明理由或加以证明,在推理过程中要充分利用不等式的性质. 如果是假命题只需举出一个反例即可.

例 2　设 $f(x)=ax^2+c$,且 $-3\leqslant f(1)\leqslant1,-2\leqslant f(2)\leqslant3$,求 $f(3)$ 的取值范围.

解　∵$f(x)=ax^2+c$,

∴$\begin{cases}a+c=f(1)\\4a+c=f(2)\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1)\\c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)\end{cases}$

∴$f(3)=9a+c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$. ∵$-2\leqslant f(2)\leqslant3$. ∴$-\frac{16}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant8$.　①

又∵$-3\leqslant f(1)\leqslant1$,∴$-\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant5$.　②

①+②,得 $-\frac{16}{3}-\frac{5}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant8+5$,即 $-7\leqslant f(3)\leqslant13$.

【同步训练】

定理 1,2,3 及定理 3 的推论同步练习

1. 若 $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是　(　　)

(A)$-2<\alpha-\beta<0$　　(B)$-2<\alpha-\beta<-1$

(C)$-1<\alpha-\beta<0$　　(D)$-1<\alpha-\beta<1$

2. 能否判断下列两式的大小? 若能加以证明,若不能举列说明

(1) 如果 $a>b$,判断 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小;

(2) 如果 $a>b,c>d$,判断 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小;

(3) 如果 $a>b,c>d$,判断 $a-2c$ 与 $b-2d$ 的大小;

(4) 如果 $a>b,c>d$,判断 $a-d$ 与 $b-c$ 的大小。

3. 已知 $-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$,求 $y-x,y+x$ 的取值范围。

4. 已知 $-3<a<b<1$, $-4<c<0$,则 $(a-b)\cdot c$ 的取值范围是________.

5. 已知 $0<\theta<\pi$, $a>0$, $b>0$,比较 a^2+b^2 与 $2ab\sin\theta$ 的大小。

6. 比较 a^2+b^2+3 与 $2(a-b)$ 的大小。

定理 4、定理 4 的推论及定理 5 同步练习

1. 设 $a>b>0$,下列各数小于 1 的是 ( )

(A) 2^{a-b} (B) $(\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}$ (C) $(\frac{a}{b})^{a-b}$ (D) $(\frac{b}{a})^{a-b}$

2. 以①$a<0<b$②$b<a<0$③$b<0<a$④$0<b<a$ 中的一个为条件,可以推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的有 ( )

(A)1 个 (B)2 个 (C)3 个 (D)4 个

3. $a,b\in\mathbf{R}$,下列命题正确的是 ( )

(A)若 $a>b$,则 $a^2>b^2$ (B)若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

(C)若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$ (D)若 $a\neq|b|$,则 $a^2\neq b^2$

4. 若 $x>y$ 且 $a>b$,则在①$a-x>b-y$;②$a+x>b+y$;③$ax>by$;④$x-b>y-a$;⑤$\frac{a}{y}>\frac{b}{x}$,这五个式子中恒成立的不等式的序号是________________.

5. 若 $a>b>0$, $c<d<0$, $e<0$,求证 $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

6. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 满足 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $3\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$ 的取值范围.

7. 设 $m,x\in\mathbf{R}$,比较 x^2-x+1 与 $-2m^2-2mx$ 的大小.

6.2 算术平均数与几何平均数(1)

【知识要点】

1. 如果 $a,b\in \mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号.

2. 设 a,b 均为正数,则称$\frac{a+b}{2}$为 a,b 的算术平均数,称$\sqrt{ab}$为 a,b 的几何平均数.

3. 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数,即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

【典型例题】

例 1 已知 a,b 都是正数,求证$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 8a^3b^3$.

证明 $\because a>0,b>0,\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0.\ a^2+b^2\geqslant 2ab>0,a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}>0.$

$\therefore (a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant(2\sqrt{ab})(2ab)(2\sqrt{a^3b^3})=8a^3b^3.$

说明 当要证明的不等式的一边有系数 2^n 时,可以考虑利用不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的放缩加以证明.

例 2 已知 a,b,c 均为正数,求证$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geqslant\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

证明 $\because a,b,c$ 均为正数

$\therefore \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{bc}\cdot\frac{b^3}{ac}}=2\frac{ab}{c},\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{b^3}{ac}\cdot\frac{c^3}{ab}}=2\frac{bc}{a},\frac{a^3}{bc}+\frac{c^3}{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{bc}\cdot\frac{c^3}{ab}}=2\frac{ac}{b},$

$\therefore 2(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab})\geqslant 2(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}).\therefore \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geqslant\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}.$

同理可证$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geqslant a+b+c$.

例 3 已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$. 若 x_1,x_2 是正实数,判断$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$的大小,并加以证明.

证明 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)=\frac{1}{2}\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}$,

$\because \sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时,取"="号).

$\therefore$ 当 $a>1$ 时,$\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,即

$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时,取"="号).

当 $0<a<1$ 时,$\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\geqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时,取"="号).

【同步训练】

1. 已知 $a>0,b>0$ 且 $a+b=4$,则下列不等式中正确的是 ( )

(A)$\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}$ (B)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 1$

(C)$\sqrt{ab}\geqslant 2$ (D)$\frac{1}{ab}\geqslant 1$

2. 设 a,b 是两个非零实数,则下列不等式中成立的是 ( )

(A)$\frac{a+b}{2}\geqslant 2\sqrt{ab}$ (B)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$

(C)$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (D)$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$

3. 下列不等式：①$a^2+1>2a$；②$a^2+4\geqslant 4a$；③$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$；④$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\leqslant ab$，其中恒成立的是　(　　)

(A)①④　　(B)③④　　(C)②③　　(D)①②

4. 若 a,b 均为正数，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$与 2 的大小关系是_____<_____.

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 且 $xy=x+y+3$，则 xy 的取值范围是________.

6. 若 a,b,c 均为正数，求证 $a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)\geqslant 6abc$.

7. 设 a,b,c 都是正数，求证$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geqslant\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$.

8. 已知 $x>0,y>0$，且 $x+y=1$. 求证(1)$\frac{1}{xy}\geqslant 4$；　(2)$(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{y^2})\geqslant 25$.

6.2　算术平均数与几何平均数(2)

【知识要点】

已知 x,y 均为正数，$S=x+y,P=xy$.

(1)如果 P 为定值，那么当且仅当 $x=y$ 时 S 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2)如果 S 为定值，那么当且仅当 $x=y$ 时，P 有最大值$\frac{S^2}{4}$.

【典型例题】

例 1　已知 $x>0,y>0$ 且 $2y+8x-xy=0$，求 $x+y$ 的最小值.

解　$\because 2y+8x-xy=0$，$\therefore y=\frac{8x}{x-2}$，由 $x>0,y>0$，$\therefore x>2$.

于是 $x+y=x+\frac{8x}{x-2}=x+\frac{8(x-2+2)}{x-2}=x+8+\frac{16}{x-2}=(x-2)+\frac{16}{x-2}+10\geqslant$ $2\sqrt{(x-2)\frac{16}{x-2}}+10=18$，当且仅当 $x-2=\frac{16}{x-2}$时，即 $x=6$ 时 $x+y$ 取最小值 18.

说明　利用算术平均数与几何平均数的大小关系求两变量的和最大值时，必须满足三个条件：①这两个变量均为正数；②这两个变量的积为定值；③不等式中的等号必须能取到.

例 2　已知 a,b 都是正数，且满足 $2a+3b=10$，求$\sqrt{2a}+\sqrt{3b}$的最大值.

解　$\because(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2=2a+2\sqrt{(2a)(3b)}+3b$，

而 $2\sqrt{(2a)(3b)}\leqslant 2a+3b$　$\therefore$由 $2a+3b=10$ 得：

$(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2\leqslant 20$，$\therefore\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\leqslant 2\sqrt{5}$，当且仅当 $2a=3b=5$ 即 $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{5}{3}$时取等号.

$\therefore\sqrt{2a}+\sqrt{3b}$的最大值为$2\sqrt{5}$.

例3　已知直角三角形的周长为定值L,求它的面积的最大值.

解　由$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=L$得$L\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}$,

$\therefore\sqrt{ab}\leqslant\frac{L}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}L,ab\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{2}L^2$,故面积$S=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{4}L^2$,

于是当$a=b=\frac{L}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}L$时,$S$取得最大值$\frac{3-2\sqrt{2}}{4}L^2$.

【同步训练】

均值不等式求最值同步练习(1)

1. 函数$y=x(1-3x)(0<x<\frac{1}{3})$的最大值是　(　　)

(A)$\frac{1}{16}$　(B)$\frac{1}{12}$　(C)0　(D)无最大值

2. 设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a+b=3$,则2^a+2^b的最小值是　(　　)

(A)6　(B)$4\sqrt{2}$　(C)$2\sqrt{2}$　(D)$2\sqrt{6}$

3. 设$a,b\in\mathbf{R}^+$,若$a+b=2$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值等于　(　　)

(A)1　(B)3　(C)2　(D)4

4. 已知a,b为正数,且$a+2b=1$,则ab的最大值为　(　　)

(A)$\frac{1}{9}$　(B)$\frac{1}{8}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{1}{16}$

5. 已知$x<\frac{5}{4}$,求$y=4x-1+\frac{1}{4x-5}$的最大值.

6. 若$x^2+y^2=1$,求$(1+xy)(1-xy)$的最大值和最小值.

7. 已知正常数a,b和正变数x,y满足$a+b=10,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,若$x+y$的最小值为18,求$a,b$的值.

均值不等式求最值同步练习(2)

1. 已知$x>0,y>0$且$x+y=1$,则$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$的最大值为　(　　)

(A)$\sqrt{2}$　(B)$2\sqrt{2}$　(C)$4\sqrt{2}$　(D)$6\sqrt{2}$

2. 设$a,b\in\mathbf{R}^+$,且$a+b=1$,则a^2+b^2的最小值为________,$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$的最小值为________.

3. 已知$x>1,y>1$,且$\lg x+\lg y=4$,则$\lg x\cdot\lg y$的最大值是________.

4. 函数$y=2-3x-\frac{4}{x}(x>0)$的最大值是________.

5. 建造一个容积为8m^3,深为2m的长方体无盖水池,如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元,那么水池的最低总造价为________.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{2^{x+3}}{4^x+8}$,(1)求 $f(x)$ 的最大值;(2)对于任意实数 a,b,求证 $f(a)<b^2-4b+\frac{11}{2}$.

7. 某种生产设备购买时费用为 10 万元,每年的设备管理费为 9 千元,这种设备的维修费第一年为 2 千元,以后依次每年 2 千元逐年增加,问这种生产设备最多使用多少年报废最合适?

6.3 不等式的证明(1)

【知识要点】

1. 比较法:由于 $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$. 所以要证明 $a<b$ 只要证明 $a-b<0$. 这种证明不等式的方法通常叫比较法.
2. 用比较法证明不等式的步骤:作差→变形→判断.

【典型例题】

例 1 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$, $0<x<1$, 求证 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

证法一 当 $0<a<1$ 时,$\because 0<x<1$, $\therefore 0<1-x<1$, $1<1+x<2$,

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0$.

所以 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

当 $a>1$ 时, $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$, 所以原不等式成立.

证法二 $0<x<1$, $\therefore 0<1-x<1$, $1<1+x<2$, $0<1-x^2<1$.

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\frac{1}{|\lg a|}[|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|]=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$

$=-\frac{1}{|\lg a|}\lg(1-x^2)>0$, 所以 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

证法三 $\because 0<x<1$, $\therefore 0<1-x<1$, $1+x>1$ 且 $\frac{1}{1-x}>1+x$.

$\therefore \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)$

$=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$, 所以 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

例 2 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和, 证明 $\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

证法一 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 由题设可得 $a_1>0$, $q>0$.

则 $S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}=a_1(S_n-S_{n+1})=-a_1a_{n+1}<0$.

即 $S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$, $\log_{0.5}(S_n\cdot S_{n+2})>\log_{0.5}S_{n+1}^2$.

即$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

证法二 设公比为 q，则 $q>0$.

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，$S_{n+1}=(n+1)a_1$，$S_{n+2}=(n+2)a_1$，

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=n(n+2)a_1^2-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0$.

当 $q\neq1$ 时 $S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^n)^2}{(1-q)^2}$

$=\frac{a_1^2}{(1-q)^2}(-q^n-q^{n+2}+2q^{n+1})=-\frac{a_1^2q^n}{(1-q)^2}(q^2-2q+1)=-a_1q^n<0$.

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$，$\therefore\log_{0.5}(S_n\cdot S_{n+2})>\log_{0.5}S_{n+1}^2$.

即$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

【同步训练】

1. 已知 $a\neq2$，求证$\frac{4a}{4+a^2}<1$.

2. 已知 a,b,c 是不全相等的正数，用比较法证明 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

3. 已知 a,b,m 都是正实数，并且 $a<b$，求证$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

4. 已知 a,b,x,y 均为正数，且$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$x>y$. 求证$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$.

5. 已知 $x,y,m,n\in\mathbf{R}$，求证 $mx+ny\leqslant\sqrt{(m^2+n^2)(x^2+y^2)}$.

6. 已知 $x>0$ 且 $x\neq1$，$m>n>0$，求证 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

6.3　不等式的证明(2)

【知识要点】

1. 综合法:利用某些已经证明过的不等式和不等式的性质推导出要证明的不等式成立,这种证明不等式的方法叫综合法.

2. 通常可以运用的不等式有

(1)$a^2\geqslant 0$;(2)$a^2+b^2\geqslant 2ab$;(3)$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$;

(4)$(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$;(5)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$($a,b$ 同号).

【典型例题】

例 1　已知 $a>0,b>0,c>0$ 且 $a+b+c=1$,求证 $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$.

证明　$\because a+b+c=1$, $\therefore 1-a=b+c,1-b=a+c,1-c=a+b$.

又$\because a,b,c$ 均为正数,

$\therefore b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0,a+c\geqslant 2\sqrt{ac}>0,a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$,

$\therefore(b+c)(a+c)(a+b)\geqslant 8abc$, $\therefore(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$.

例 2　已知 a,b,c 是正数,且 $a+b+c=1$,求证:

(1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$;(2)$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant 8$.

(1)证　$\because a+b+c=1$,

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=3+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\geqslant 3+2+2+2=9$,

即$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

(2)证　$\because a+b+c=1$,

$\therefore(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}$

$=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=8$.

$\therefore(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant 8$.

【同步训练】

1. 下列各式中,对任何实数 x 都成立的一个是　　(　　)

(A)$\lg(x^2+1)\geqslant\lg 2x$　　(B)$x^2+1>2x$

(C)$\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$　　(D)$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a,b\neq 0$,则在"①$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$,②$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$,③$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$,

④$(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$"这四个不等式中恒成立的个数是　　(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3. 若 $a>1,b>1,c>1$,则 $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant$________.

4. 若 $a>0,b>0$,则 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant$________.

5. 已知 $a>0,b>0$,求证 $2(a^5+b^5)\geqslant(a^3+b^3)(a^2+b^2)$.

6. 已知 $x>0,y>0$,求证 $\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.

7. 已知 a,b,c 均为正数,且 $a+b+c=1$,求证 $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$.

6.3 不等式的证明(3)

【知识要点】

分析法:证明不等式时,有时可以从求证的不等式出发,分析使不等式成立的充分条件,把证明不等式转化为判断这些充分条件是否成立的问题,如果能够肯定这些充分条件都已具备.那么可以断定原不等式成立,这种证明不等式的方法通常叫分析法.

【典型例题】

例 1 求证 $my+ny\leqslant\sqrt{(m^2+n^2)(x^2+y^2)}$.

证明 要证 $mx+ny\leqslant\sqrt{(m^2+n^2)(x^2+y^2)}$,

只要证 $(mx+ny)^2\leqslant\left(\sqrt{(m^2+n^2)(x^2+y^2)}\right)^2$,

只要证 $(mx)^2+2mnxy+(ny)^2\leqslant m^2x^2+m^2y^2+n^2x^2+n^2y^2$,

只要证 $2mnxy\leqslant m^2y^2+n^2x^2$,

$\because x,y,m,n\in\mathbf{R}$,$\therefore 2mnxy\leqslant m^2y^2+n^2x^2$ 成立,

所以 $mx+ny\leqslant\sqrt{(m^2+n^2)(x^2+y^2)}$.

例 2 已知 $a>0,b>0,2c>a+b$,求证 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

证 要证 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$,

即证 $|a-c|<\sqrt{c^2-ab}$,即证 $(a-c)^2<c^2-ab$,

即 $a^2-2ac+c^2<c^2-ab$,又 $a>0$,

$\therefore$ 即证 $2c>a+b$.又 $2c>a+b$ 已成立,

$\therefore c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

例 3 已知 $a>0,b>0$,求证 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

证 要证 $(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,只要证 $[(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}]^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.