（高教版）

概率论与应用数理统计

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

李新有 主编

■内容提要
■知识结构图
■教学要求、重点、难点及考点
■典型题解析
■课后习题全解
■学习效果测试及答案

农林 NONG LIN SAN DAO 三导丛书

西北工業大學出版社

农林三导丛书

概率论与应用数理统计

（高教版）

导教·导学·导考

主　编　李新有
副主编　连　坡　张远迎
编　者　李新有　连　坡　张远迎
　　　　刘建军　王　洁　田　凯

西北工业大学出版社

【内容简介】 全书共分 8 章，每章均设了 6 个板块，即内容提要，知识结构图，教学要求、重点、难点及考点，典型题解析，课后习题选解，学习效果测试及答案等 6 个部分来编写，旨在帮助读者掌握课程重点、难点，学会分析方法，提高解题能力，为考研的读者提供帮助，同时可为教师教学提供参考。

本书可作为高等农林院校各专业本、专科生的课程辅导及应试参考书，也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的指导书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与应用数理统计导教·导学·导考/李新有主编.—西安：西北工业大学出版社，2006.8

（农林三导）

ISBN 7-5612-2109-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 085392 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西丰源印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：467 千字
版　　次：2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

出版说明

2006 年 2 月 15 日，胡锦涛同志在新农村专题研讨班上的重要讲话中指出，建设社会主义新农村，是我们党在深刻分析当前国际国内形势、全面把握我国经济社会发展阶段性特征的基础上，从党和国家事业发展的全局出发确定的一项重大历史任务。同时，他也指出，重视农业、农村、农民问题是我们党的一贯战略思想。“三农”问题始终是关系党和人民事业发展的全局性和根本性问题，农业丰则基础强，农民富则国家盛，农村稳则社会安。在新世纪新阶段，我们必须始终不渝地高度重视并认真解决好“三农”问题，不断开创“三农”工作的新局面。

中国是个农业大国，农民多，市场广阔，特别是经过 20 多年的发展，许多人致了富。美国著名财经杂志《福布斯》评出的“2005 年福布斯中国富豪榜”显示，中国排名前 10 名的富豪中，排名第五、第六的是刘永行、刘永好兄弟，谁都知道，他们是从事农业的。而曾任《福布斯》杂志中国地区调研员的胡润更是语出惊人：中国最热的行业是农业，赚钱最多的民营企业也是农业。我国农业科技和农业发展与世界相比，还存在较大的差距，并面临着严峻挑战，这无疑需要大量的农业人才。目前，我国农业改革已进入关键时期，教学、科研、管理等方面农业人才的需求呈现出强劲势头。

从报考研究生的人数和录取比例来看，农林院校不再是冷门，甚至一些专业颇受考生的青睐。2003 年以来，农林院校的研究生报考人数持续增长，有的院校报考人数增长率甚至超过当年全国研究生报名人数的平均增长率。一般情况下，农林院校研究生的录取比率在 3∶1 左右，部分专业竟达到了 8∶1 甚至 10∶1，如生物学、食品安全、农药检测、公共卫生等专业。这些专业正是伴随着近年来的社会热点事件如 SARS 疫情、禽流感的出现及人们公共卫生意识的增强而日益火爆起来的。

随着经济建设的快速发展、“十一五”规划战略的实施和科教兴国战略、人才强国战略的进一步实施，社会对高素质专业人才的需求更加迫切。为了配合全国各农林院校加强高素质、知识型人才的培养，西北工业大学出版社精心策划和组织编写了“农林三导”丛书，首批推出 9 种公共基础课辅导用书。

本套丛书具有以下 4 大特点。

1. 选题新颖，独树一帜

根据市场需求，2001 年西北工业大学出版社在全国首家有针对性、有计划性地推出整套农林院校课程的辅导学习用书——“农林提高与应试”丛书，填补了市场空白，一改广大农林院校学生找不到相关辅导书的尴尬局面，引起全国农林院校师生的良好社会反响，体现了很好的

社会效益与经济效益。而今,根据广大师生的需求,再次重拳出击,推出"农林三导"丛书,涵盖导教、导学、导考三个层面,更好地体现"贴近读者,贴近需求,贴近实际"。

2. 紧扣大纲,严把尺度

丛书紧紧围绕国家教育部制定的教学大纲和研究生入学考试大纲,以全国通用的主流教材为蓝本,按照"内容提要—知识结构图—教学要求、重点、难点及考点—典型题解析—课后习题选解—学习效果测试及答案"的主线,把握课程内容的主旨和要害,使读者按照由浅入深、循序渐进,从感性认知、实际应用到理性认知的科学认知规律最快捷、最有效地掌握本门课程。

3. 重视能力,提高技巧

丛书严格遵从不管是课程学习还是过关考试,其最终目的都是为了提高学生分析问题、解决问题、举一反三的能力这一主旨,重在通过简明扼要的基础要点、独具特色的知识结构图以及绝对经典的典型题解析来引导学生掌握学习理论知识和解决实际问题的方法与技巧,以提高个人的综合素质和综合能力,为今后个人的良好发展奠定坚实的基础。

4. 一流作者,更胜一筹

参加丛书编写的作者,均是全国重点农林院校从事相关课程教学的资深骨干教师。他们教学经验丰富,对于课程相当熟识,深谙教学、学习和考试的规律及关键所在,因此,在丛书内容的取舍、材料的选编以及文字表述等方面能更胜一筹,使丛书详略得当,重点突出,内容精益求精,分析一针见血,讲解简明扼要,注释切中要害。

本套丛书的出版得到了广大师生读者的支持和关心,西北农林科技大学、中国农业大学、东北农业大学、华中农业大学、华南农业大学、南京农业大学、西南大学等单位的有关人士也为丛书的出版出谋划策,提出了许多建设性的意见和建议。84 岁高龄的中国工程院院士、西北农林科技大学李振岐①教授,献身教育事业 50 余年,德高望重,学识渊博,他自 2001 年在百忙之中出任"农林提高与应试"丛书的编委会主任以来,一直十分关注农林方面的教材、教辅出版工作。为此,我们一并表示衷心的感谢。

我们坚信,这套丛书将为广大农林院校的师生提供有力的帮助,也必将成为在知识海洋中遨游的学子们不断搏击、获取胜利的力量源泉。

丛书编委会

2006 年 6 月

① 李振岐,男,1922 年生,中国工程院院士,植物病理学家和小麦锈病专家,我国小麦锈病研究和植物免疫学教学的主要奠基人之一,主编了我国第一部《植物免疫学》全国统编教材。现为西北农林科技大学植物保护学院教授、博士生导师,西北农林科技大学学术委员会常委,陕西省委省政府特邀咨询委员。

前 言

概率论与应用数理统计是农林院校一门重要的基础课，是许多专业的学生学好后续课程的必需条件，也是农林院校相关专业硕士研究生入学考试的必考内容。

为了加强学生对所学内容的深入理解，帮助他们了解解题规律，掌握解题的方法与技巧，提高应试解题能力，强化技能训练，我们根据农林院校的教学特点，编写了“农林三导”丛书之一的《概率论与应用数理统计导教·导学·导考》一书。

本书涵盖了教学大纲和研究生考试大纲涉及的全部内容，并突出了重点和难点内容。本书内容共分 8 章，每章均设计了 6 个板块。

(1)内容提要。简要介绍本章内容，列出基本概念、重要定理和公式，突出考点的核心知识。

(2)知识结构图。用框图形式列出本章的主要内容，并指出了各知识点的有机联系。

(3)教学要求、重点、难点及考点。包括教学基本要求，重点、难点指南，考点指南 3 块，言简意赅。其目的是使读者明确本章的重点、难点和考点以及应掌握的程度，并将其内容加以细化和归纳，使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求。

(4)典型题解析。从历年本科生期末试题和历年研究生入学考试题以及各教材综合题中精选出典型题目，通过对典型题的解题分析，归纳出概率论与应用数理统计中一些问题的解决方法和技巧，使读者可以举一反三、触类旁通。这也是本章的主要部分。

(5)课后习题选解。由于篇幅所限，对高等教育出版社“面向 21 世纪课程教材”《概率论与应用数理统计》(刘光祖主编)的部分课后习题作了详细解答，希望读者在学习过程中先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖解答。

(6)学习效果测试及答案。根据概率论与应用数理统计课程考试和考研内容，精选了适当的自测题，并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加深对基本概念的理解，增强解决问题的能力，并检验自己对所学知识掌握的程度。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了概率论与应用数理统计的解题方法、解题规律和解题技巧，对于提高读者分析问题的能力，理解基本概念和理论，开拓解题思路，全面增强综合素质，会收到良好的效果。

本书可作为高等农林院校各专业本、专科生的课程辅导及应试参考书，也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的指导书，同时可为教师教学提供参考。

本书的第 1,2 章由连坡编写，第 3,4 章由张远迎编写，第 5,6 章由李新有编写，第 7 章由

刘建军编写，第8章由王洁编写。田凯参加了部分内容的编写和校稿工作。全书由李新有负责统稿和定稿。在此，对西北农林科技大学应用数学系的全体老师致以诚挚的谢意，对本书选用的参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，不当之处在所难免，诚请广大读者批评指正。

编　者

2006年6月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 内容提要

1.1.1 样本空间与随机事件

1. 随机现象及其统计规律性

随机现象是指一定条件下，具有多种可能发生结果的现象，这类现象有一个共同特点：结果的出现具有一定偶然性，每次观察之前无法预言其具体结果.

随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 尽管在一次或几次试验或观察中，随机现象会出现这样或那样的结果，呈现出偶然性的一面，但在相同条件下，对一个随机现象进行大量重复试验或观察，就会发现其结果的出现存在着一定的规律. 随机现象在大量的重复试验或观察中所呈现出的规律性，称为随机现象的统计规律性.

2. 随机试验与随机事件

对随机现象，在相同条件下可重复进行的观察或试验称为随机试验，简称试验，一般用 E 表示. 随机试验具有两个特点：① 在相同条件下可重复地进行试验；② 试验前由试验条件能明确试验所有可能结果，但不能预知该次试验具体结果.

随机试验的特点决定了一次试验的结果可能这样，也可能那样，具有一定的偶然性，但一次试验的结果绝不可能跳出该随机试验所有可能结果所构成的集合. 把随机试验可能出现的每一个最基本的结果称为该试验的一个样本点，一般用 ω 表示，样本点的全体构成的集合称为该试验的样本空间，用 Ω 表示.

随机试验在一次试验中，可能出现，但未必肯定出现的结果，称为随机事件，简称事件，一般用英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 随机事件按其特征可分为基本事件和复合事件. 随机试验的基本结果(随机试验结果的最小单位)，即由一个样本点构成的单点集称为基本事件；若干个基本事件共同在一起才能表达的试验结果，即由若干个样本点构成的一个集合称为复合事件. 事实上，随机事件就是随机试验的样本点的某个集合，某事件发生当且仅当属于它的某一个样本点出现.

在随机事件中有两个事件尽管它们失去了随机性，但为了讨论方便，仍将它们按具有随机性的特殊随机事件看待. 其中，一个是在每次试验中必然发生的事件，称为必然事件，一般用 Ω 表示；另一个是在每次试验中必然不发生的事件，称为不可能事件，一般用 $\varnothing$ 表示.

1.1.2 随机事件的关系和随机事件的运算

1. 事件的和

设 A,B 是随机试验 E 的任意两个事件，则称“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件为事件 A 与事

件 B 的和事件，记作 $A+B$（或 $A\cup B$）.

事件 A 与事件 B 的和事件 $A+B$，也常常表述为事件 A 发生或事件 B 发生，即集合 $A+B$ 为集合 A 与集合 B 的并集($A\cup B$). 两个事件和事件的概念可以推广到任意有限多个事件，甚至无穷可列个事件上. 一般地，称"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"这一事件为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$（或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$）. 称"无穷可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生"这一事件为无穷可列个事件的和事件，记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$（或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）.

2. 事件的积

设 A,B 为随机试验 E 的任意两个事件，则称"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 AB（或 $A\cap B$）. 即集合 AB 为集合 A 与集合 B 的交集.

两个事件积的概念可以推广到有限多个事件甚至无穷可列个事件上. 一般地，称"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记作 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$（或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$）. 称"无穷可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生"这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，一般用 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$（或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$）表示.

3. 事件的差

设 A,B 是随机试验 E 的任意两个事件，称"事件 A 发生，而事件 B 不发生"这一事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$. 即集合 $A-B$ 为集合 A 与集合 B 的差集. 也就是，从集合 A 中去掉集合 B 与集合 A 公共元素后，剩下元素的全体构成的集合.

如图 1.1 表示的随机试验样本空间 Ω，其中图 1.1(a)，(b)，(c) 中的阴影部分分别表示了 $A+B$，AB，$A-B$.

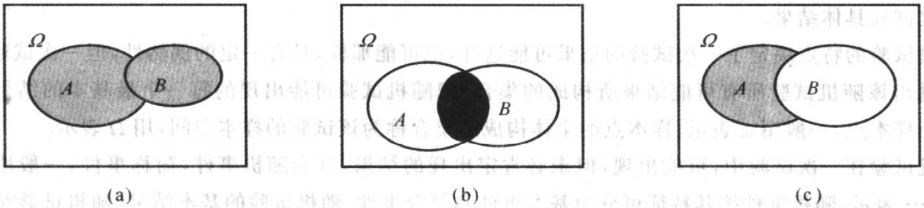

图 1.1

4. 事件的包含关系

设 A,B 是随机试验 E 的事件，若事件 A 发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$. 即 $A\subset B$ 为集合 A 是集合 B 的子集.

5. 事件的相等（或等价）

设 A,B 为随机试验 E 的事件，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等或等价，记作 $A=B$.

6. 事件的互斥（或互不相容）

设 A,B 为随机试验 E 的事件，若在同一次试验中，事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互斥或互不相容. 显然，若事件 A,B 互斥，一定 $AB=\varnothing$，即事件 A,B 的积事件为不可能事件，事件 A 与事件 B

互斥就是集合 A 与集合 B 没有公共元素.

7. 事件的对立

若事件 A 与事件 B 互斥,且在每次试验中,事件 A 与事件 B 必有一个发生,则称事件 A 与事件 B 对立.

若事件 A 与事件 B 对立,显然 $AB=\varnothing$,且 $A+B=\Omega$,即事件 A,B 的积事件为不可能事件,且事件 A,B 的和事件为必然事件.一般用 $\overline{A}$ 表示事件 A 的对立事件,互斥事件和对立事件是有区别的.两事件对立,则两事件一定互斥;两事件互斥,却未必两事件一定对立.

8. 互斥完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是随机试验 E 的事件,若任意两个事件互斥,且在每次试验中 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 必有一个发生,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 构成随机试验的互斥完备事件组.互斥完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是样本空间 Ω 的一个划分或分割,它满足:① $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$ 且 $i,j=1,2,\cdots,m$;② $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i=\Omega$.

如图 1.2 表示的随机试验样本空间 Ω,其中图 1.2 (a),(b),(c),(d) 分别表示事件包含关系、事件互斥关系、事件对立关系及互斥完备事件组.

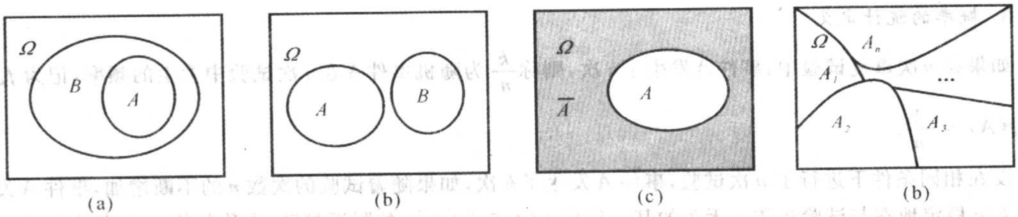

图 1.2

9. 事件运算所满足的运算律

设 A,B,C 是随机试验 E 的事件,则事件的和、差、积运算符合下列规律:

(1) 交换律 $A+B=B+A$, $AB=BA$

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$

(3) 分配律 $A(B+C)=AB+AC$, $A+BC=(A+B)(A+C)$

(4) 对偶律 (De Morgan 法则) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

这些运算规律均可推广到任意有限个事件的情形,De Morgan 法则还可推广到无穷可列个事件的情形.

10. 重要公式

$$A\overline{B}=A-B=A-AB$$

1.1.3 概率的定义

1. 概率的古典定义

若随机试验 E 的样本空间 Ω 只有有限个样本点,且试验中每个样本点出现的可能性相同,则称这种随机试验模型为古典概率模型,简称古典概型.

设随机试验 E 为古典概型,它的样本空间 Ω 含有 n(有限) 个样本点,随机事件 A 含有 k 个样本点,则事件 A 发生的概率定义为 $\dfrac{k}{n}$,记作 $P(A)$,即

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}$$

上述定义称为概率的古典定义，显然，概率的古典定义是以有限样本空间及每个样本点出现的等可能性为前提条件的.

2. **概率的几何定义**

若随机试验 E 的样本空间 Ω 可用欧氏空间的某一有界区域表示(区域中任一点皆为 E 的一个样本点，区域可为一维，二维，$\cdots$，n 维)，且试验中每个样本点出现具有等可能性，则称这种随机试验模型为几何概率模型，简称几何概型.

设随机试验 E 为几何概型，它的样本空间 Ω 的测度为 $\mu(\Omega)$，事件 A 的测度为 $\mu(A)$，则事件 A 发生的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

上述定义称为概率的几何定义，显然，概率的几何定义是以无限样本空间形成一个几何区域及每个样本点出现的等可能性为前提条件的.

3. **概率的统计定义**

如果在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 k 次，则称 $\frac{k}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{k}{n}$.

设在相同条件下进行了 n 次试验，事件 A 发生了 k 次，如果随着试验的次数 n 的不断增加，事件 A 发生的频率 k/n 稳定地在与试验次数 n 无关的某一数值 $p(p\in[0,1])$ 的附近摆动，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

上述概率的定义称为概率的统计定义，定义中的数 p 习惯上叫做事件 A 频率的稳定值，所以概率的统计定义可以简单的叙述为事件 A 频率的稳定值称为事件 A 的概率.

4. **概率的公理化定义**

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，如果对于 E 中的任一事件 $A\subset\Omega$，都对应一个实数 $P(A)$，且 $P(A)$ 满足：

公理 1 (非负性) 对于随机试验 E 的任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2 (规范性) 对于随机试验 E 的必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$.

公理 3 (可列可加性) 对于随机试验 E 的两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$，即 $P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

概率的公理化定义也称为概率的一般定义或数学定义，它既保持了数学概念的严谨性，又对所有的随机试验都适用.由于概率的古典定义、几何定义以及统计定义都具有非负性、规范性和可加性三条基本性质，因此它们都是概率的公理化定义的特殊情形.

1.1.4 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的两两互不相容事件，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

此性质也称为概率的有限可加性.

(3) 若 A,B 是随机试验 E 的两个事件，且 $A\subset B$，则有

(ⅰ) $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(ⅱ) $P(B)\geqslant P(A)$.

(4) 若 A 为随机试验 E 的任一事件，$\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

(5) 若 A,B 是随机试验 E 的任意两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(A)-P(AB)$$

此性质也称为概率的加法公式. 特别地，如果事件 A,B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则加法公式可表示为

$$P(A+B)=P(A)+P(A)$$

概率的加法公式可以推广到多个事件的情形，例如，对任意三个事件 A,B,C，则有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.1.5 条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 概率的乘法公式

定理 设 A,B 为随机试验 E 的任意两个事件，若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$；若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$.

定理中的两个公式习惯上称为概率乘法公式. 两事件概率乘法公式可以推广到任意有限个事件的情形，即若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为随机试验 E 的 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1.1.6 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的一个互斥完备事件组，$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对 E 的任一事件 B，有

$$P(B)=P(A_1)\,P(B\mid A_1)+P(A_2)\,P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)\,P(B\mid A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

定理中的公式称为全概率公式. 它表明若事件 B 的发生是由互斥完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的发生所致，则事件 B 发生的概率 $P(B)$ 就等于诸事件 $BA_i(i=1,2,\cdots,n)$ 发生的概率之和.

全概率公式可以进一步推广如下：

推论 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的两两互斥的一组事件（n 可以是 ∞），$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，

B 是随机试验 E 的任意一个事件，$B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

2. 贝叶斯(Bayes) 公式(逆概率公式)

定理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是随机试验 E 的一个互斥完备事件组，$P(A_i) > 0$，$i = 1,2,\cdots,n$，且 B 是随机试验 E 的任一事件，$P(B) > 0$，则

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

1.1.7 随机事件的独立性

1. 事件 A,B 相互独立

设 A,B 是任意两个事件，如果 $P(AB) = P(A)\,P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立，简称独立. 若事件 A 与事件 B 相互独立，则事件 A 与事件 $\overline{B}$，事件 $\overline{A}$ 与事件 B，事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 均相互独立.

2. 事件 A,B,C 相互独立

设 A,B,C 是三个随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)\,P(B), \quad P(AC) = P(A)\,P(C)$$

$$P(BC) = P(B)\,P(C), \quad P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

同时成立，则称事件 A,B,C 相互独立.

按两个事件相互独立的定义，若上述前三个式子成立，则 A 与 B，B 与 C，C 与 A 都相互独立，事件 A,B,C 也两两独立. 对于三个及其以上的事件，显然相互独立与两两独立不是同一个概念. 三个事件相互独立和两两独立的概念可以推广到 $n(n > 3)$ 个事件的情形.

1.1.8 二项概率公式

1. 随机试验的相互独立

设 E_1, E_2 是两个随机试验，A_1 是试验 E_1 的任意一个事件，A_2 是试验 E_2 的任意一个事件，如果 A_1, A_2 总是相互独立的，则称试验 E_1, E_2 互相独立.

2. n 重贝努里(Bernoulli) 概型

如果一个试验 E 是由一个只有结果 A 和 $\overline{A}$ 的试验 E_0 在相同条件下互相独立地重复 n 次构成的试验，则称 E 为 n 重贝努里试验或贝努里概型.

贝努里概型是非常重要的一种概率模型，它是"在同样条件下进行重复试验或观察"的一种数学模型，或者它是 n 个相同简单试验构成的复合试验. 在讨论某事件出现频率时常用这种模型，它是许多统计理论的基础，是历史上研究最早、最多的模型之一.

3. 二项概率定理

定理 设试验 E 是由试验 E_0 形成的 n 重贝努里概型，A 和 $\overline{A}$ 是 E_0 的事件，且 $P(A) = p, P(\overline{A}) = 1 - p = q(0 < p < 1)$，则 n 重贝努里概型 E 中，事件 A 发生 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

根据这个公式可以计算 n 重贝努里概型中事件 A 发生 $0,1,\cdots,n$ 次的概率. 由于公式中 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 恰好是二

项式$(p+q)^n$展开式中的第$k+1$项，故称此公式为二项概率公式.

1.2 知识结构图

- 随机事件及其概率
  - 事件的概念关系及运算
    - 随机试验，样本空间，事件的定义
    - 事件的运算：和，积，差
    - 事件的关系：相等，包含，互斥，对立
    - 事件的运算律：交换律，结合律，分配律，对偶律
  - 概率的定义和性质
    - 概率的定义
      - 古典定义
      - 几何定义
      - 统计定义
      - 公理化定义
    - 概率的性质
      - 规范性
      - 可加性
      - 单调性
  - 概率的计算
    - 定义计算
      - 古典概型 $P(A)=\dfrac{m}{n}$
      - 几何概型 $P(A)=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 区域的测度}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 区域的测度}}$
    - 性质计算
      - 加法公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - 减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
    - 条件概率 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
    - 积事件的概率 $P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A)\text{，当 }P(A)>0\text{ 时}\\ P(B)P(A\mid B)\text{，当 }P(B)>0\text{ 时}\end{cases}$
    - 全概率公式 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$为互斥完备事件组
    - 贝叶斯公式 $P(A_k\mid B)=\dfrac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$，$k=1,2,\cdots,n$
    - 二项概率公式 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$
  - 独立试验序列概型
    - 事件的独立性 $P(AB)=P(A)P(B)$
    - 贝努里概型

1.3 教学要求、重点、难点及考点

1.3.1 教学基本要求

(1) 了解随机现象，了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算.

(2) 了解事件频率的概念，理解概率的统计定义. 了解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.

(3) 理解概率的公理化定义和概率的基本性质，了解概率的加法定理.

(4) 了解条件概率的概念、概率的乘法定理. 了解全概率公式，会用贝叶斯公式解决比较简单的问题.

(5) 理解事件的独立性概念.

(6) 了解贝努里概型和二项概率的计算方法.

1.3.2 重点、难点指南

1. 古典概型的概率计算

利用古典概型计算事件概率特别要注意建立的样本空间中有限个样本点必须具有等可能性，忽略了这一点，就会得出错误的结论.

2. 全概率公式

全概率公式的应用关键是选取适当的互斥完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，一般情况下，互斥完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间的一个分割，可以理解为导致事件 B 发生的原因，这些原因的概率 $P(A_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，习惯上称为先验概率，是已知的或容易求得的. 实际上，只要互斥事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件 B 的一个分割就可以，即全概率公式进一步推广如下：

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是随机试验 E 的两两互斥的一组事件(n 可以是 ∞)，$P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，B 是随机试验 E 的任意一个事件，$B\subset\sum\limits_{i=1}^{n}A$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

3. 事件的独立性

"独立性"是概率论特有的重要概念. 事件独立性的本源是刻画一个事件发生的概率大小不受另外一个事件的控制，它是随机试验独立性的基础.

4. 概率的加法公式

加法公式是概率计算中使用频率很高的公式，由于与有关概念的结合，它的表现形式很多，主要如下：

$$P(A+B)=\begin{cases}P(A)+P(B)-P(AB), & A,B\text{ 为任意事件}\\ P(A)+P(B), & A,B\text{ 为互斥事件}\\ P(A)+P(B)-P(A)P(B), & A,B\text{ 为独立事件}\\ 1-P(\overline{A})P(\overline{B}), & A,B\text{ 为独立事件}\end{cases}$$

特别当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立事件时，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})=1-P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=$$
$$1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

把相容事件和的概率转化为独立事件概率的积来处理，既方便又快捷，在解决某些实际问题时非常有用，应给予足够的重视.

5. 贝努里概型

贝努里概型是由一个只有结果 A 和 $\overline{A}$ 的试验 E_0 在相同条件下独立地重复 n 次构成的试验，它的应用非常广泛. 若 $P(A)=p$，常见的主要如下：

(1) $P(n$ 次试验中事件 A 恰好发生 k 次$)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$