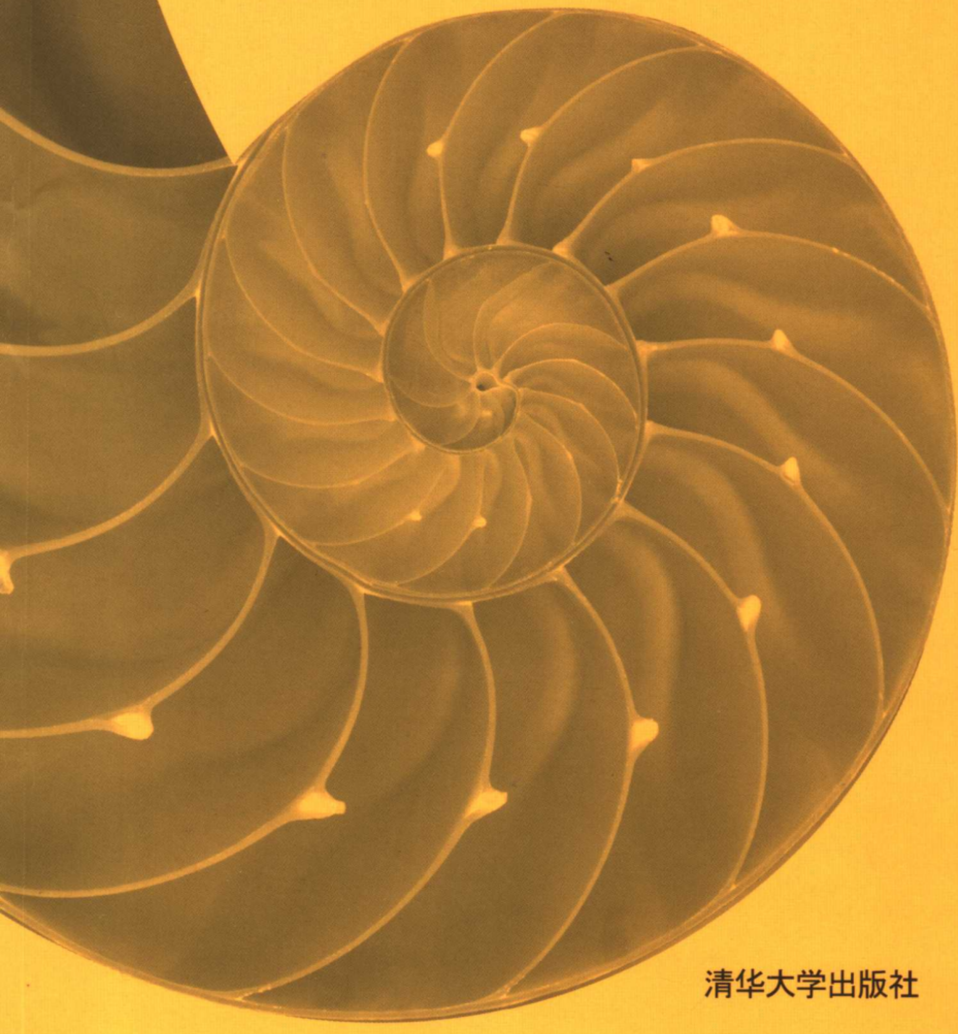
（第2版）

微积分教程

上

韩云瑞　扈志明　张广远　编著



清华大学出版社

本书分为上下两册。上册包括实数和函数的基本概念和性质，极限论和连续函数，一元函数微积分学，数项级数与函数项级数。下册包括多元函数微分学及其应用，重积分，曲线和曲面积分，向量场初步，常微分方程初步。

在概念和原理的表述上，力求科学、准确、清晰、平易且语言流畅。例题和习题重视基础训练，丰富且有台阶、有跨度。为了方便教学与自学，在附录中给出了习题答案及补充题的提示与解答，并且给出了微积分概念和术语的索引。

ISBN 7-302-12985-1

9 787302 129851 >

定价：19.80元

（第2版）

微积分教程 上

韩云瑞 扈志明 张广远 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是编者总结多年的教学经验和教学研究成果、参考国内外若干优秀教材，对《微积分教程》进行认真修订而成的.本书概念和原理的表述科学、准确、清晰、平易，语言流畅.例题和习题重视基础训练，丰富且有台阶、有跨度.为了方便教学与自学，在附录中给出了习题答案与补充题的提示与解答，并且补充了微积分概念和术语的索引.另外，在附录A中，按照“发现—猜测—验证—证明”的模式，指导读者以数学软件 Mathematica 为辅助工具，通过理论、数值和图形各方面的分析研究寻找问题的解答.这些问题紧密结合微积分教学和训练的基本要求，有助于培养学生分析和解决问题的能力.

本书分为上、下两册.上册包括实数和函数的基本概念和性质，极限理论和连续函数，一元函数微积分学，数项级数与函数项级数.下册包括多元函数微分学及其应用，重积分，曲线和曲面积分，向量场初步以及常微分方程初步等.本书可作为大学理工科非数学专业微积分(高等数学)课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程.上册/韩云瑞，扈志明，张广远编著.—2版.—北京：清华大学出版社，2006.8
ISBN 7-302-12985-1

Ⅰ.微…　Ⅱ.①韩…　②扈…　③张…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第046382号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：140×203　**印张**：13.875　**字数**：361千字
版　次：2006年8月第2版　2006年8月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-12985-1/O·537
印　数：1～4000
定　价：19.80元

第2版前言

《微积分教程》面世以来，在教学使用中取得了良好的效果，受到许多读者的好评. 但是，近年来国内高校的微积分（高等数学）教学的思想与水平都发生了许多变化，本书编者在近几年结合教学实践，从教育数学和数学教学两个方面对于微积分的体系和内容进行了较为深入的分析，同时也广泛地阅读了国内外的有关教材. 为了体现当前微积分课程教学的特点与要求，体现编者有关的教学研究成果，使本教材更加适应于微积分课程的教学，同时也为了克服本教材存在的若干不足，编者对原教材进行了较大幅度的修订.

修订后的《微积分教程》有以下几个特点：

1. 编者从教育数学的观点对微积分的内容进行深入研究，所以本书的逻辑结构简约而清晰，概念和原理的表述科学、准确、平易. 定理证明思路自然、清楚. 语言准确、流畅，层次清楚，逻辑性强，表述清楚，易教易学. 因此本书为学生和教师提供了一本在教学和学习方面都有参考价值的教科书和教学参考书.

2. 概念、定理与例题配置和谐，例题和习题重视基础训练，同时又丰富且有台阶、有跨度. 有许多激发学习兴趣、提高数学水平的独具特色的习题.

3. 对于微积分课程中的某些难点（例如极限概念、多元函数微分概念和曲面积分等），本书不追求完全形式化的抽象，而是以较为直观的、平易的方式适当地改变表述形式，在不失科学性的前提下降低教学难度.

4. 本书的上、下册都有一个名为“探索与发现”的附录. 读者

需要以数学软件 Mathematica 为辅助工具，通过理论分析和数值、图形分析才能找到解决问题的思路和解答方法. 这些问题紧密结合微积分教学和训练的基本要求，既能培养学生运用数学理论分析问题的能力，又能提高学生运用数学软件作为辅助工具来分析、发现和解决问题的能力. 这些问题的求解过程体现了"发现—猜测—验证—证明"的模式，有助于学生的创造能力和应用能力的培养.

5. 为了便于教学和自学，本书增加了习题答案与各章补充题的提示.

施学瑜、马连荣、刘庆华、章梅荣和谭泽光等教授都曾以不同形式对本书第 1 版做出了贡献，借此机会，编著者向他们表示敬意.

由于编者的水平所限，可能会有一些错误和不妥之处，敬请读者给予批评和指正.

韩云瑞

2006 年 5 月

第1版前言

本书是清华大学理工科各系一年级“微积分”课程的教材，它的前身是同名讲义．该讲义从1991年以来经过三次修改，并在清华大学各系使用多年，已经成为清华大学“微积分”课程的主要教材之一．清华大学应用数学系先后有十余位教师参与过原讲义的编写与修改工作．现在的这部教材是在原有讲义的基础上再次进行较大的修改而写成的．

随着科学技术的发展与教学改革的深入，近年来清华大学“微积分”课程的教学思想与内容要求发生了很大变化，这部微积分教材从一个侧面反映了清华大学“微积分”课程教学的发展趋势和教学水平．

由于近代数学以及许多有应用价值的数学知识不断地被充实到大学数学的教学内容中来，经典微积分的课时不断地被压缩，在这种情况下，更应当重视“微积分”课程在大学数学课程体系中的基础地位，在适当精简教学内容的同时，应当更好地把握微积分的基本要求，在较短的时间内，使学生掌握微积分的基本思想与基本方法．在为其他数学课程与各专业课程奠定良好的基础的同时，使学生的数学素养和能力得到扎实的提高．这是本书编写的主要指导思想．

在“微积分”课程的教材中，使分析的概念和原理与代数的运算相结合，将现代数学的观点和语言融入经典的微积分素材之中已经是一种趋势，在这方面，本书编者已经做过反复的探索．但是，经典微积分的思想与方法仍然是基础数学与应用数学的非常重要的基础．“微积分”课程教学的主要任务，是使大学生掌握经典微积

分的基本思想与基本方法.大学生们可以通过学习后续数学课程了解现代数学的内容与方法.鉴于这些考虑,在引进现代数学的原理和语言方面,本书只作了适量的努力.

尽管本书与传统的微积分教材没有体系上的重大区别,但是它的内容与叙述方法却有许多变化.例如,多元函数微积分与常微分方程的材料处理尽可能地使用线性代数语言,第二型线、面积分与向量场有机地结合起来,并更加重视物理背景,多元函数微分的分析概念更好地与几何直观相结合等.

教材中尽可能地将微积分发展中若干重要思想有机地融会于教学内容之中,向读者介绍了微积分的重要原理的产生背景与发展过程,展示一代代数学大师的光辉思想与巨大贡献.使学生在学习微积分知识的同时,在微积分前进的历史足迹中,受到启迪,吸取力量.

施学瑜教授对于本书的编写给予了热情的关心和指导,他认真阅读了教材全部内容,提出了许多有价值的意见和建议.吴洁华副教授也对教材提出了非常中肯的意见,他们的许多建议都已经为编者所采纳.孙念增教授曾经认真审阅过原讲义下册,并提出了具体的指导意见.马连荣博士、吕志博士、刘智新博士、杨和平博士、卢旭光博士、章梅荣教授、胡金德教授都曾经参加过原讲义的编写工作,许甫华副教授、王燕来副教授、刘庆华副教授都曾为本教材的形成作出过贡献.除此之外,谭泽光教授、白峰杉教授为本教材的编写提供了多方面的支持和鼓励.借此机会,向他们一一致谢.

由于编者水平所限,错误与疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1998 年 11 月于清华大学

目　　录

第 1 章　实数与函数

这一章的内容包括实数以及函数的概念和性质. 微积分课程的主要内容是以微分学和积分学为工具研究函数. 而这些研究都是在实数范围中开展的. 所以,在研究微分学和积分学之前,我们需要对实数有一些基本的认识,对函数进行比较详细的研究.

1.1　集合与符号

1.1.1　集合概念和运算

一个集合(set)S 是某些个体的总和,这些个体或者符合某种规定,或者具有某些可以识别的相同属性. 集合 S 中的每一个体 a 称为 S 的元素(element),记为 $a\in S$,读作"a 属于 S";如果 a 不是 S 的元素,则记为 $a\notin S$,读作"a 不属于 S".

一般情况下,集合有两种表示方法,通过下面的例子来说明.

例 1.1.1　考察由下列元素

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

组成的集合 S,我们可以将其表示成

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

这种将集合 S 中的所有元素都列举出来的表示方法称为列举法.

集合 S 也可以用下面的方式表示:

$$S=\{n \mid n\ 是小于\ 10\ 的非负整数\}.$$

在这里我们用一个命题"n 是小于 10 的非负整数"来描述集合 S 中所有元素 n 的属性. 这种表示集合的方式称为描述法.

在数学中经常用描述法来表示一个集合,即用$\{x \mid p(x)\}$表示所有满足命题 $p(x)$的实数 x 组成的集合. 例如,$\{x \mid x^2+1=2\}$表

示所有满足等式 $x^2+1=2$ 的实数 x 构成的集合；$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 表示所有满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 构成的集合.

现在考察下面两个集合：

$$A=\{1,2\},\quad B=\{1,2,3,4\}.$$

可以看出，A 中的每一个元素都属于 B. 一般情形，如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B，则称 A 包含于 B，并且记作 $A\subseteq B$. 例如，

$$\{2\}\subseteq\{1,2\},\quad \{3,5\}\subseteq\{1,2,3,4,5\},\quad (0,1)\subseteq[0,1].$$

当 $A\subseteq B$ 时，称 A 是 B 的一个子集. 如果 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立，则称 $A=B$.

空集是不包含任何元素的集合，空集的记号是 $\varnothing$.

例如，集合 $\{x|x^2+1=0,x\in\mathbb{R}\}$ 就是空集. 空集不含任何元素，因此空集是任何集合的子集. 今后在提到一个集合时，如果不加特别声明，一般都是非空集合.

设 A,B 是两个集合，由这两个集合中的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

例如，

$$\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\};$$

$$\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}.$$

今后我们经常要考虑实数集 $\mathbb{R}$ 的子集，要接触各种区间. 它们是：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

无穷区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

通常用大写英文字母 I(interval 的第一个字母)表示区间.

这里需要说明的是，$+\infty$，$-\infty$以及∞只是一种符号而不是实数，它们不能参与四则运算.

例 1.1.2 利用区间表示集合 $S=\{x|x^2+x-12>0\}$.

解 不等式左边分解因式，将不等式化成等价的形式：

$$(x-3)(x+4)>0.$$

等式左端是两个因子的乘积，为了使这个乘积为正数，必需且只需它们的符号相同，即 $x-3>0$，$x+4>0$，或者 $x-3<0$，$x+4<0$. 即 $x>3$ 与 $x>-4$ 同时成立，或者 $x<3$ 与 $x<-4$同时成立. 前一种情形意味着 $x\in(3,+\infty)$，后一种情形意味着$x\in(-\infty,-4)$. 也就是说不论 $x\in(3,+\infty)$，还是 $x\in(-\infty,-4)$，都满足不等式 $x^2+x-12>0$. 因此有

$$S=\{x\mid x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty).$$

1.1.2 邻域

今后经常提到"邻域(neighbourhood)"这样一个术语.

设 δ 是任意一个正数，集合$\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$称为点 x_0 的一个**邻域**，并且记作 $N(x_0,\delta)$. 这是一个以点 x_0 为中心，长度等于 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$；这个集合中所有的点 x 与 x_0 的距离$|x-x_0|$都小于 δ.

如果在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中除去点 x_0，则得集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$，称这个集合为点 x_0 的一个空心邻域，并记作 $N^*(x_0,\delta)$. 它是两个开区间的并集：$N^*(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

今后如果说到点 x_0 的一个邻域，就是指某个开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$；如果说到点 x_0 的一个空心邻域，就是指某个$(x_0-\delta,x_0)\cup$

$(x_0, x_0+\delta)$，其中 δ 是某个确定的正数. 但有时可能只需说明是点的某个邻域或空心邻域，而不需要说明这个正数 δ 的具体数值，则可以写成 $N(x_0)$ 或者 $N^*(x_0)$.

1.1.3 符号“$\forall$”与“$\exists$”

数学的特点之一，是有一套系统的符号体系. 数学符号的使用极大地增强了数学叙述的简洁性和确定性. 著名数学史和数学教育家 M. 克莱因说：“如果没有符号体系，数学将迷失在文字的荒原中.”

在逻辑推理过程中最常用的两个逻辑记号是“$\forall$”和“$\exists$”.

“$\forall$”表示“任取”，或者“任意给定”. 例如，$\forall a>0$ 表示任意取一个正数 a，或者任意给定一个正数 a. 又如，$f(x)<1, \forall x\in[a,b]$，表示对于区间 $[a,b]$ 中所有的 x 都有 $f(x)<1$.

“$\exists$”表示“存在”，“至少存在一个”，或者“能够找到”.

例如，考察下面这段话：“对于任意的正数 M，都能在区间 $[a,+\infty)$ 中找到一个数 x，满足 $x>M$.”如果用逻辑符号 $\forall$ 与 $\exists$，这一段话的意思可以用更加简明的方式叙述：“$\forall M>0$，$\exists x\in[a,+\infty)$，满足 $x>M$.”

又如实数的阿基米德(Archmed)公理是这样叙述的：“任意给定两个正的实数 a,b，都存在一个自然数 n，使得 $na>b$.”用逻辑符号 $\forall$ 与 $\exists$，可以将阿基米德公理改写成：“$\forall a,b>0$，$\exists n\in\mathbb{Z}^+$，使得 $na>b$.”

符号“$\stackrel{\text{def}}{=}$”表示“定义”或者“规定”. 例如定义实数的绝对值为

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴含”，或者“推出”. 如果 A 与 B 是两个命题，那么“$A\Rightarrow B$”表示：“若命题 A 成立，则命题 B 也成立”. 即命题 A

是命题 B 的充分条件. 例如, a 是整数 $\Rightarrow a$ 是有理数.

符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价", 或者"充分必要". 若 A 与 B 是两个命题, 那么"$A\Leftrightarrow B$"表示命题 A 与命题 B 互相等价, 即互为充分必要条件. 例如, $x^2>4\Leftrightarrow|x|>2$.

1.2 实数和实数集

1.2.1 实数

微积分主要是在实数(real number)范围中研究问题, 因此需要对实数有一些基本的认识. 下面对实数作简单介绍. 对实数更为深入的研究将在后面适当地展开.

1. 数轴

数轴是实数的坐标系, 是描述和研究实数的重要工具. 有关实数的许多性质, 都可以通过数轴直观地表现出来.

在一条直线上取一个定点 O, 称其为原点. 取直线的一个方向为正向, 并用箭头表示. 再取一个单位长度, 那么这条直线就称为数轴.

数轴上的任意一点 P 都惟一地对应着一个实数 x. 对应方法是这样的: 假定 P 与原点重合, 则 $x=0$. 假定 P 与原点不重合, 则用单位长度去度量线段 $\overline{OP}$. 如果 P 位于原点右侧, 则 $x=|\overline{OP}|$ ($\overline{OP}$ 的长度); 如果 P 位于原点左侧, 则 $x=-|\overline{OP}|$. 反之, 对于任意一个实数 x, 都可以在数轴上找到惟一的一点 P, 使得点 P 对应的实数为 x. 因此, 数轴上的点与全体实数构成的集合建立了一个一一对应的关系. 因此, 也可以将实数称为点.

实数 x 在数轴上对应的点称为 x 的坐标. 图 1.1 中标出了实数 $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \sqrt{2}$ 所对应的点.