



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线 性 代 数

第二版

敖长林 蒋卫华 主编

 中国农业出版社

面向 21 世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线 性 代 数

第 二 版

敖长林 蒋卫华 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数 / 敖长林, 蒋卫华主编. —2 版. —北京: 中国农业出版社, 2006. 3

面向 21 世纪课程教材

ISBN 7-109-10453-2

I. 线... II. ①敖...②蒋... III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 130533 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

出版人: 傅玉祥

责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2001 年 1 月第 1 版 2006 年 3 月第 2 版

2006 年 3 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本: 787mm×960mm 1/16 印张: 15.75

字数: 275 千字

定价: 21.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

第 二 版 前 言

本书第一版作为教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，其主要特点在于：强调概念和内容的直观引入以及加强学生对线性代数理论和方法的理解；突出数学建模的思想与线性代数教学内容的融合；强调有关概念、方法与社会生活和生产实际的联系。第一版自出版以来受到广泛的关注，已被多所院校选为数学基础课的教材。不少同仁来信表示鼓励，指出教材中值得探讨的问题，并对如何修改提出了宝贵意见。在此我们对关心和支持这套教材的广大同仁表示衷心的感谢。为使本书特点更加突出、内容与体系更加完善，在中国农业出版社的支持下，我们对本书的第一版实施了本次修订。

本次修订由东北农业大学信息与计算科学系敖长林教授提出整体方案，并负责第一章、第二章的修订工作；孟翔燕老师负责第三章、第四章的修订；焦阳老师负责第五章的修订；哈尔滨工业大学的蒋卫华博士负责新增加的第六章内容的编写；张战国、刘慧老师负责全书习题的调整，吴秋峰老师负责附录的修订。全书由敖长林教授统纂定稿。修订工作包括以下几个方面的内容：

1. 订正了原教材中的疏漏。
2. 调整了一部分例题和习题，使其与相应的内容之间搭配得更加合理。
3. 为了便于内容的选择增加了线性变换一章。
4. 考虑到教学学时的限制，取消了原书中第二章“线性方程组唯一解”的内容。

根据我国高等教育从精英教育向大众化教育转变以及现代教育技术手段在教学中广泛运用的现状,我们对教材进行了立体化教学设计,配备了学习指导,配套的电子教案也在编写之中,将于近期出版.

本次修订过程中,我们广泛地搜集了读者对原教材的意见和建议,吸取了部分使用本教材第一版教学的教师的意见,在此表示衷心感谢,也期待广大读者进一步提出批评和建议.

编者

2005年10月1日

第一版前言

由于电子计算机的飞速发展和广泛应用,使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,于是作为离散问题的表述,数据的存贮以及各类数值计算方法的基础——线性代数,就成为理工、农林、经济、管理各专业本科生以及从事实际工作的科技人员和管理人员必修的课程。

本书是作为教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”立项项目《面向 21 世纪高等农业院校本科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践》的研究成果之一,经过几年教学实践及课题组同志们的讨论,确定了编写本书的基本思想:一是解决问题、模型化和应用;二是强调与计算机结合,引入相应的数学软件,加入数学实验的教学内容。多年的教学实践和调查表明,许多学生感到线性代数课程抽象难学,学完之后也不知道通过这门课程学到了什么,因而远不如学微积分那样有兴趣。究其原因就是在线性代数课程中未能把线性代数的抽象性与其应用性有机地结合起来。编写过程中我们注意了以下几点:

1. 努力体现实用性,尽量用与当今社会生活和现代科技密切相关的实例,适当进行理论证明的方法,在中学数学的基础上讲解有关的内容,目的是避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的教学模式。

2. 尽量突出数学建模的思想。

3. 一定程度体现数学实验和运用计算机的重要性,即通过学生自己做实验,有所发现,从而导致对某些结论的猜测,并自己从数学上

严格证明或否证这些猜测，从而真正领会线性代数的原理和方法。

4. 本书对目前流行的 Matlab 语言进行了介绍。

本书第一、二、三、四章由敖长林编写，第五、六、七章及附录由宋仁学编写。在本书编写过程中得到各级领导、同事们的支持和鼓励，在此表示感谢。我们还要特别感谢主审人潘介正教授，他提出了许多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量起到重要的作用。

限于编者的水平，书中难免有错误和不妥之处，特别是有关数学实验的内容，有很多需要进一步充实和完善之处，尚祈多方教正。

编 者

2000 年早春于哈尔滨

主 编 敖长林 蒋卫华

副主编 孟翔燕

第一版主编 敖长林 宋仁学

内容提要

本书内容包括矩阵、行列式、线性代数方程组、向量的内积与正交矩阵、二次型、线性空间与线性变换等6章,并有数值实验题和 Matlab 语言有关线性代数函数的使用介绍,书末附有习题答案、Matlab 语言简介及参考文献。可作为高等农林、水产院校各专业及其他院校相关专业的线性代数课程教材或教学参考书。

目 录

第二版前言

第一版前言

第一章 矩阵 1

1.1 矩阵的概念 1

1.2 矩阵的运算 10

1.3 可逆矩阵 25

1.4 矩阵的分块 27

1.5 初等变换与初等矩阵 30

习题 1 39

数值实验题 1 45

第二章 行列式 50

2.1 行列式的概念 50

2.2 行列式值的计算 55

2.3 若干应用 57

习题 2 65

第三章 线性代数方程组 68

3.1 矩阵的秩 68

3.2 线性代数方程组的解 74

3.3 向量的线性相关与线性无关 81

3.4 线性方程组解的结构 93

习题 3 101

数值实验题 2	105
第四章 特征值与特征向量	108
4.1 向量的内积与正交矩阵	108
4.2 矩阵的特征值与特征向量	113
4.3 相似矩阵 矩阵的对角化	120
4.4 矩阵对角化的应用	124
4.5 实对称矩阵	143
习题 4	149
数值实验题 3	154
第五章 二次型	162
5.1 二次型与对称矩阵	163
5.2 二次型的基本性质	167
5.3 用正交变换化二次型为标准形	170
5.4 正定二次型	176
习题 5	180
数值实验题 4	181
第六章 线性空间与线性变换	184
6.1 线性空间的定义与性质	184
6.2 维数、基与坐标	187
6.3 基变换与坐标变换	190
6.4 线性变换	193
6.5 线性变换的矩阵表示式	197
习题 6	201
附录 Matlab 语言简介	203
习题答案	224
参考文献	239

第一章 矩 阵

在社会生产实际中,大量的各种各样的问题都提出矩阵的概念,并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究,甚至于有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题,归结成矩阵问题以后却是相同的,这就使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的概念,因而也就使矩阵成为线性代数的一个主要研究对象.这一章的目的是引入矩阵的有关概念、运算;通过示例、练习、习题等说明其性质及由来;对在解决问题、解释概念中有一些技巧作了介绍;讨论了用途很广的矩阵的初等变换及初等矩阵.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

像所有的数学学科一样,线性代数有两类基本的数学构件.一类是对象:数组;一类是这些对象进行的运算,如两个数组的相加或相乘.本节将引入基本的对象——矩阵.下一节介绍基本运算.本节还要提出某些涉及矩阵的数学模型.这些模型将在本书中多次使用,以说明一些新概念.

例 1 在实际问题中我们经常会遇到各种各样的表格,例如某公司在计划期内生产并销售的甲、乙、丙、丁四种产品,这 4 种产品的销售量、销售单价、单位变动成本的有关资料如表 1-1.

表 1-1

销售单价 (元)	900	2 000	1 000	3 000
单位变动成本 (元)	700	1 800	600	2 100
销 售 量	40	80	20	60

为了简便,把表中的文字说明去掉,把数字按原来的位置列成一个表,即

$$\begin{bmatrix} 900 & 2\,000 & 1\,000 & 3\,000 \\ 700 & 1\,800 & 600 & 2\,100 \\ 40 & 80 & 20 & 60 \end{bmatrix}$$

这就是一个三行、四列的矩阵。

例 2 在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系的转轴（反时针方向转轴 θ 角），那么平面直角坐标变换公式为

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

其中 θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角，显然，新旧坐标之间的关系，完全可以通过公式中系数所排成的两行、两列矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

表示出来。

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

叫做 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵。这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素， a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素，元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。本书中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵，式 (1-1) 也简记为：

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } A = (a_{ij})$$

1.1.2 一些特殊的矩阵

从矩阵的形状看，遇到最多的是在式 (1-1) 中 $m=n$ 的情形，这时就称之为 n 阶方阵或 n 阶矩阵（1 阶矩阵作为数对待）。另外，只有一列（即 $n=1$ ）或一行（即 $m=1$ ）的矩阵也常碰到，分别称为列矩阵或行矩阵，亦称为列向量或行向量，作为列向量，常用小写黑体字母 a, b 记之，而行向量被记作 $a^T, b^T, \dots$ ，或 $a', b', \dots$ 如：

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

是个 2 阶矩阵，而

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

是个 2×1 的列矩阵, 也可当作列向量. 就向量而言, 称其元为分量, 分量的个数即为向量的维, 故称式 (1-3) 是 2 维向量, 今后凡未作特别说明, 讲到向量均指列向量.

从矩阵中零元素的分布看, 也可分出常见的特殊矩阵. 为此, 先引进下面的定义.

定义 2 对于式 (1-1) 的 $m \times n$ 矩阵 A , 记 $k = \min \{m, n\}$, 称 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ 构成 A 的主对角线, 并称 a_{ii} 为 A 的第 i 个对角线元.

对于方阵, 主对角线是自左上角到右下角的那根连线.

一般, 称 $a_{i,i+1}$ 在 A 的上对角线上, 而 $a_{i,i-1}$ 在 A 的下对角线上.

在下列这个 4 阶矩阵中, δ 表示其主对角线, 而 μ 及 λ 分别表示上、下对角线:

$$\begin{bmatrix} \delta & \mu & \times & \times \\ \lambda & \delta & \mu & \times \\ \times & \lambda & \delta & \mu \\ \times & \times & \lambda & \delta \end{bmatrix}$$

(1) **零矩阵**: 所有元素全为 0 的矩阵, 记作

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(2) **三角矩阵**: 主对角线一侧的元素都是零的方阵叫做三角矩阵, 若其非零元素只出现在对角线及其上 (或右) 方, 就称为上三角阵, 记作 R , 如

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是个 4 阶上三角阵.

一般而言, 对 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 当且仅当 $i > j$ 必有 $a_{ij} = 0$ 时, A 为上三角阵; 而当且仅当 $i < j$ 必有 $a_{ij} = 0$ 时, A 是下三角阵.

(3) **对角矩阵**: 一个既是上三角又是下三角的矩阵称为对角阵, 亦即对角阵是非零元只能在主对角线的方阵. 如

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是个 4 阶的对角阵, 显然由对角线的元素就足以确定对角阵本身. 故常将这阵记作

$$D = \text{diag}(2, 3, 1, 4)$$

而 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 表示一个对角线元为 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 的 n 阶对角阵, 详细写出就是

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

(4) 数量矩阵 (标量矩阵): 主对角线上元素都相等的对角阵, 特别称 $a_{ii} = 1$ 的数量矩阵为单位阵, 以 I 或 E 来记, 如:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-4')$$

1.1.3 矩阵问题的例

为了说明线性代数的一些概念与方法, 以下提出的有关矩阵的模型, 将在本书中多次使用.

例 3 (通路矩阵) a 省 2 个城市 a_1, a_2 和 b 省 3 个城市 b_1, b_2, b_3 的交通联结情况如图 1-1 所示, 每条线上的数字表示联结该两城市的不同通路总数, 由该图提供的通路信息, 可用矩阵形式表示 (称之为通路矩阵), 以便存贮、计算与利用这些信息. 现有

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

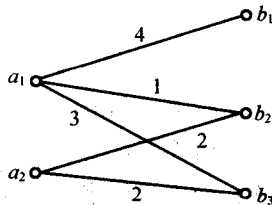


图 1-1

通路矩阵 C 的行表示 a 省的城市, 列是 b 省的城市, 而 c_{ij} 表示 a_i 与 b_j 间通路数.

例 4 (价格矩阵) 4 种食品在 3 家商店中, 单位量的售价 (以某货币单位

计) 可用以下矩阵给出:

$$\begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \end{array} \quad (1-5)$$

这里行表示商店, 而列表示食品, 例如第 2 列就是第二种食品, 其 3 个分量表示该食品在 3 家商店中的 3 个售价.

· 背景聚焦 ·

以数学为职业——访问国家安全局的 数学工作者 Didon Pachner

Walter Meyer: 以数学为职业与学数学很相像吗?

Didon Pachner: 某些方面很相像, 我在学校所学的许多知识, 在我的工作中迟早有用, 当我对一个课题不熟悉时, 我就得阅读数学书, 然而, 二者有一些差别, 我在阅读是因为我确实需要掌握这些材料, 而不再仅仅是为了成绩, 学习新的事物是非常令人愉快的, 由于现在我是真正想学, 并能按照我自己的进度阅读.

Walter Meyer: 哪种数学你用得最多?

Didon Pachner: 最近用得更多的是线性代数, 我比在学校时更喜欢它了. 我所使用的数学门类, 范围很广. 当我在不同部门进行为期 6 个月的轮流实习时, 我有一个实习计划, 每个部门有各自的需要和专业. 我曾经用过的其他门类数学包括抽象代数、概率论及统计.

Walter Meyer: 这似乎有点紧张.

Didon Pachner: 可能是有点紧, 勤奋工作确实有压力, 我设法通过保持一些业余兴趣来保持平衡, 例如负重训练、弹钢琴及在慈善餐厅服务等.

Walter Meyer: 你的雇主从事什么工作?

Didon Pachner: 我为国家安全局工作, 它的任务是从事秘密通信, 例如把消息译成密码, 以免被其他国家读出.

Walter Meyer: 你怎样找到这份工作的?

Didon Pachner: 在马里兰大学我主修数学, 并参加了一个与美国宇航局合作的项目, 后来, 我成了一名专职人员.

Walter Meyer: 你对现在的学生有什么建议?

Didon Pachner: 我认为, 设法真正理解你正在学习的内容是很重要的, 这比单纯记忆公式要更进一步.

例 5 炼油厂模型 考虑一家开办 3 个炼油厂的公司, 每个炼油厂生产 3

种石油产品：燃料油、柴油和汽油，设从 1 个单位（约 2L）原油中，第一个炼油厂生产 16L 燃料油、8L 柴油及 4L 汽油，第二、第三个炼油厂生产这 3 种产品的数量各不相同，用下列矩阵 A 来描述：

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{第一炼油厂} & \text{第二炼油厂} & \text{第三炼油厂} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{燃料油} \\ \text{柴 油} \\ \text{汽 油} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-6)$$

A 的每一个列向量，是一个炼油厂的一个产出向量，例如第三炼油厂从 1 个单位石油中生产 8L 燃料油、8L 柴油及 20L 汽油，我们可以用产出向量 $a_3 =$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ 表示第三炼油厂的生产能力. } A \text{ 的每一行是一个向量, 它的分量是不同}$$

炼油厂生产某种产品的数量，汽油产量的行向量是 $a_3 = [4, 10, 20]$.

设 x_i 表示第 i 个炼油厂所用石油的单位数，假设需 9 600 L 燃料油、12 800 L 柴油及 16 000 L 汽油，注意，这些需求对于一个实际的炼油厂来说是过于小了，实际的需求往往是几百万升。

x_i 应该满足下列线性方程组：

$$\begin{aligned} 16x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 9\,600 \\ 8x_1 + 20x_2 + 8x_3 &= 12\,800 \\ 4x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 16\,000 \end{aligned} \quad (1-7)$$

或满足矩阵列向量的单个向量方程（在下一节正式定义向量加法）：

$$x_1 \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\,600 \\ 12\,800 \\ 16\,000 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

设 b 是式 (1-8) 右端的需求列向量， x 是以 x_i 为分量的列向量，那么矩阵代数将为我们提供用 A 、 b 、 x 简明书写方程组的一种方法。确实，在下一节，我们将学会如何书写，在下一章，我们将学会如何解任何一个由 3 个变量 3 个方程构成的线性方程组。

例 6 天气的 Markov 链 假设我们把某市的天气分为 3 种状态：晴、阴与下雨，若今天阴，则明天晴的概率为 $1/2$ ，阴的概率为 $1/4$ ，下雨的概率为 $1/4$ 。如果今天晴，或今天下雨，则明天天气会出现另外的概率，这些概率可以通过观察该市以往几年每天天气的变化趋势来确定，用矩阵 A 来表示这些概率是方便的。