概率论与数理统计

王升瑞 吕建聚 杨宏晨 王亚军 程林凤 编

中国矿业大学出版社

概率论与数理统计

王升瑞　吕建聚　杨宏晨
王亚军　程林凤　编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书共分为八章，前五章是概率论部分，包含了随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征（数学期望与方差）、正态分布、中心极限定理和二维随机变量；后三章是数理统计部分，包含了数理统计的几个基本概念、参数估计和假设检验。书后的附录中包含排列组合和二项式定理以及配套习题解答。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王升瑞等编．—徐州：中国矿业大学出版社，2005.8

ISBN 7-81107-104-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．王…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 074939 号

书　　名	概率论与数理统计
编　　者	王升瑞　吕建聚　杨宏晨　王亚军　程林凤
责任编辑	朱明华
责任校对	周俊平
出版发行	中国矿业大学出版社 （江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
排　　版	中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷	徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销	新华书店
开　　本	850×1168 1/32　**印张** 9　**字数** 226 千字
版次印次	2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	13.60 元

（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

本书是在作者多年的教学经验和心得体会的基础上，以通俗易懂为指导思想，针对应用技术学院、高等职业学校、民办高校、成人高校及大专院校的教学实际而编写的。

本书的特点是取材适当、文字简洁、深入透彻、突出应用、淡化理论、重视基本概念和基本方法。在引入新内容时，一般都从实际问题出发，抓住问题的本质形成概念，并提升到一定的理论高度。重点内容反复阐述，力求做到重点突出、难点分解、直观明了。每节均配有大量的例题以利于读者把握概念的实质，理解理论的实际意义。

学习本课程需要具备一定的数学基础知识，包括集合论、排列组合、函数的导数、定积分、变上限积分求导、二重积分等知识。

读者在阅读完每一节后，要及时完成节末的练习题，以加深理解其基本内容，在理解基本内容的基础上独立完成每章的习题(至少 2/3)，以巩固所学知识。

由于编者水平有限，时间匆促，错误和不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　随机事件与样本空间

一、随机现象

人类社会和自然界发生的现象是多种多样的，一般分为两大类：其中一类称为必然（确定）现象，其规律为只要具备一定的条件，该现象一定会发生或一定不会发生，如：

如果平面图形是正方形（条件），那么其四个内角均为直角且四条边长相等（现象）；

物体在重力的作用下（条件），必然做下落运动（现象）；

在常温下（条件），铜铁一定不熔化（现象）；

标准大气压下水温低于 100℃（条件），水是不会沸腾的（现象）。

这种例子可以举出很多，我们称在一定条件下必定会发生的现象为必然现象；称在一定条件下必定不会发生的现象为不可能现象。不可能现象也是必然现象。研究必然现象的数学工具是微积分、线性代数等。

与必然现象不同的另一类现象称为随机（不确定）现象，其规律是在一定条件下该现象可能发生，也可能不发生。如：

人的寿命（条件）达到 90 岁（现象）；

某人买彩票（条件）中奖（现象）；

一个盒中有 10 个形状相同分别编有 1，2，…，10 号的球，从中任取一球（条件），取到 9 号球（现象）；

从一批产品中任取 5 件(条件),其中有不合格产品(现象)。

以上都是可能发生,也可能不发生的现象。

我们称在一定条件下可能发生也可能不发生的现象为**随机现象**。正是由于有了随机现象才使我们的世界丰富多彩。概率论与数理统计就是研究随机现象中的数量规律的学科。

二、随机试验

要发现并掌握随机现象在数量方面的规律性,必须对随机现象进行深入观察。我们把在一定条件下对事物的某种特征的一次观察称为**随机试验**(简称试验),其必须满足三个条件:

(1) 可以在相同情况下重复进行(可重复性);

(2) 每次试验可能出现的结果具有多种可能性,并能事先知道试验的所有可能结果(结果具有多个性);

(3) 试验前不能确定会出现哪种结果(结果具有随机性)。

具有上述三个特点的试验称为随机试验,用字母 E 表示。为了区分不同的试验,可用 $E_1,E_2,\cdots$ 符号表示。

这里试验的含义十分广泛,它包括各种各样的科学试验,也包括对事物的某一特征的观察。

例 1.1 E_1:抛一枚硬币,观察正面 H 反面 T 出现的情况;

E_2:将一枚硬币抛三次,观察正面、反面出现的情况;

E_3:将一颗均匀的骰子掷一次,观察出现的点数;

E_4:从标有 1、2、3、4、5、6 号码的六张卡片(其中 4 张红色,2 张白色)中任取一张,观察抽得的号码;

E_5:同 E_4 的条件,观察抽得卡片的颜色;

E_6:记录寻呼台 1 min 内接到呼叫的次数;

E_7:在一批电子元件中任意抽取一只,测试它的寿命;

E_8:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

对于一个随机试验,必须注意试验条件要相同,观察特征也要相同。观察的特征不同,其可能结果也不同,如 E_4,E_5 就是如此。观

察特征相同但条件不同(如 E_1,E_2),其结果也不相同。我们所说:"在一定条件下,进行一次试验",实际上是包括试验条件和观察特征两方面的内容。

三、随机事件

一个随机试验 E 有多个可能结果(观察必然现象时只有一个结果,这是特例)。这些结果有的简单,有的复杂一些。以 E_3 为例,它的结果最简单的是上面的点数有"1 点"、"2 点"、"3 点"、"4 点"、"5 点"、"6 点"。较复杂的如"点数少于 4 点","点数多于 1","少于 5"等。下面我们给试验 E 的结果一个名称。

定义 1.1 随机试验 E 的每一个结果称为**随机事件**(简称事件)。

随机事件一般用大写字母 A、B、C 表示。例如:

E_1 中用事件 A 表示"出现正面",用事件 B 表示"出现反面"。

E_2 中用事件 A 表示"第一次出现的是正面"。

E_3 中用事件 A_k 表示"抛出的骰子上面的点数为 k",$(k=1,2,3,4,5,6)$。用事件 B_3 表示"抛出的骰子上面的点数小于 3"。

E_7 中用事件 B_1 表示"电子元件是次品",$B_1=\{t|t<1\ 000\}$;

用事件 B_2 表示"电子元件是合格品",$B_2=\{t|t\geqslant 1\ 000\}$;

用事件 B_3 表示"电子元件是一级品",$B_3=\{t|t\geqslant 5\ 000$。

随机事件是本课程主要的研究对象。

下面,我们要特别提一下随机事件中几种有特殊意义的事件。

1. 必然事件

随机试验 E 中一定会发生的结果称为必然事件,记为 S。

例如:E_3 中"抛出的点数小于等于 6";E_7 中"电子元件的寿命不小于 0",即 $\{t|t\geqslant 0\}$,均为必然事件。

2. 不可能事件

在随机试验 E 中一定不发生的结果称为不可能事件,记为 $\varnothing$。

例如：E_3 中“抛出的点数大于 6”；E_7 中“电子元件的寿命小于 0”，均为不可能事件。

必然事件与不可能事件是随机事件的特例。

在 E_3 中事件 B_3=“抛出的骰子的点数小于 3”要比事件 A_1=“抛出的骰子的点数为 1”，A_2=“抛出的骰子的点数为 2”复杂些。

实际上 B_3 是由 A_1，A_2 构成的。这就是说，事件 B_3 还可以再分开。但 A_1，A_2 就不能再分开了。或者说，对于所观察的特征来说不能再分了。我们把这种最简单的事件叫做基本事件。

3. 基本事件

定义 1.2 设试验 E 有多个可能结果，若这些结果满足：

(1) 在任何一次试验中这些结果至多有一个发生(即除这些结果外，试验 E 没有其他结果)，这种性质称为完备性。

(2) 在任何一次试验中这些结果至少有一个发生，这种性质称为互不相容(互斥)性。

则称其中每一个事件为试验 E 的**基本事件**。

例如 E_4 中，$A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$，…，$A_6=\{6\}$为六个基本事件。

注 基本事件有可列的、不可列的、有限的和无限的。

4. 复合事件

若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件。复合事件在一次试验中发生是指组成复合事件的某一个基本事件发生。

例如 E_4 中 B=“抽到的号码小于 3”是由 A_1，A_2 组合而成的复合事件。

四、样本空间

定义 1.3 试验 E 的全部基本事件所组成的集合，称为 E 的样本空间，记为 $S=\{\omega\}$，其中$\{\omega\}$表示试验 E 基本事件的全体。

如例 1.1 中，E_1 的样本空间 $S_1=\{H,T\}$；E_2 的样本空间 $S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；$E_3$ 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；E_7 的样本空间 $S_7=\{t\mid t\geqslant 0\}$；$E_8$ 的样

本空间 $S_8=\{(x,y)|T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$。其中,$x$ 为最低温度,y 为最高温度,并设这一地区的温度不会低于 T_0,也不会高于 T_1。

注 样本空间的元素是由试验目的所确定,试验目的不一样,其样本空间也不一样,如 S_1,S_2。

例 1.2 设试验 E 是甲乙二人各自对目标射出一发子弹,观察命中目标情况,试写出 E 的样本空间。

解 因为 E 的基本事件为:A_1="甲中,乙不中",A_2="甲中,乙中",A_3="甲不中,乙中",A_4="甲不中,乙不中"。它们满足定义 1.2 中两个条件,则 E 的样本空间是 $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$。

要注意的是集合{"甲中","甲不中","乙中","乙不中"}不是 E 的样本空间。因为这个集合中,任何一个事件(如"甲不中")都不是 E 的最简单结果,也不互斥。在试验 E 中,试验条件是"二人各对目标射击一发子弹",观察特征是"命中目标情况",即将二人命中与否视为一体进行观察,看看有哪些结果,这些结果只能是 A_1,A_2,A_3,A_4。而不能孤立地看甲或乙命中的情况。这里看到,确定 E 的样本空间,不能脱离试验 E 的条件与观察特征。

例 1.3 一口袋中装有编号分别为 1,2,…,10 的 10 个形状相同的球,从袋中任取一球(取后放回),观察球的号数。

样本空间 $S=\{1,2,\cdots,10\}$

基本事件 $A_1=\{1\},A_2=\{2\},\cdots,A_{10}=\{10\}$

必然事件 S

不可能事件 $\varnothing$

复合事件 $B_1=\{1,3,5,7,9\}$

$B_2=\{2,4,6,8,10\}$

$B_3=\{8,9,10\}$

$B_4=\{1,4\}$

练习 1.1

1. 举出几个随机现象、必然现象和不可能现象的实例。

2. 举出一个随机试验的实例，并指出试验条件，观察特征及样本空间。

3. 指出下列随机试验的样本空间。

E_1 某篮球运动员投篮两次，观察命中的情况。

（答：$S=\{$“中，中”，“中，不中”，“不中，中”，“不中，不中”$\}$）

E_2 观察某城市 120 急救中心一天内接到呼救电话次数。

（答：$S=\{0,1,2,3,\cdots\}$）

E_3 观察一节能电灯的寿命。

（答：$S=\{t \mid t\geqslant 0\}$）

4. 指出下列事件中哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

(1) “从一副扑克牌中随机抽一张，抽到的是黑桃 A”。

(2) “10 个考签中有 4 个难签，6 人参加抽签考试，都抽到难签。”

(3) 一袋中有形状相同、编号分别为 1,2,3,4,5,6 的 6 个球，从中任取 1 个，观察抽得的球的编号：“编号为偶数”，“编号大于 6”，“编号大于 0”。

（答：(1) 随机事件；(2) 不可能事件；(3) 随机事件；不可能事件；必然事件。）

第二节　事件的关系与运算

一个随机试验有多个不同的事件发生，这些事件有的简单，有的复杂，详细分析寻求它们之间的关系是学习概率论的基础。

由于事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然要按照集合论中的集合之间的关系和运算来处理。概率论中所说的事件的“和”、“差”、“积”等运算与初等代数中的和、差、积概念是不同的。在学习中要把握住运算的含义，掌握其运算规律。

一、事件的包含与相等

定义 1.4 若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，如图 1-1 所示。

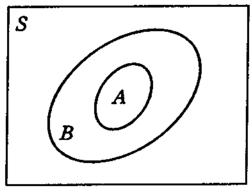

图 1-1

用集合运算的语言，即 $x \in A \Rightarrow x \in B$。

定义 1.5 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称**事件 A 与事件 B** 相等，记为

$$A = B$$

如例 1.3 中，设 A=“球号$\geqslant 2$”，B=“球号为 2、4”，C=“球号为偶数”，D=“球号数能被 2 整除”

由定义 1.4 可知：$A \supset B, A \supset C, A \supset D, C \supset B, D \supset B$。

由定义 1.5 可知：$C = D$。

例 1.4 同时抛两个硬币，观察出现正、反面的情况，事件 A=“正好一个正”，B=“都是正面”，C=“至少一个正”，D=“无反面”。

则有：$A \subset C, B \subset C, B = D$。

二、事件的运算与关系

1. 事件的和(和运算)

定义 1.6 由“事件 A 与事件 B 至少一个发生”所构成的事件称为**事件 A 与事件 B 的和**，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$，如图 1-2 所示。

即 $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

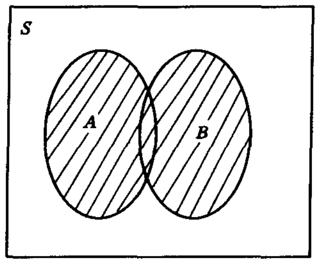

图 1-2

若 A 与 B 有公共元素，此元素在 $A\cup B$ 中只出现一次。

例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f\}$，$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$。

再例如，工地上 $A_1=$“缺水泥”，$A_2=$“缺黄沙”，则 $B=A_1\cup A_2$ =“缺水泥或黄沙”。

类似地，由“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”所构成的事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \quad 或 \quad A_1+A_2+\cdots+A_n$$

例如设事件 $A_1=$“甲没来”，$A_2=$“乙没来”，事件 $B=$“甲、乙至少有一个没来”，则 $B=A_1+A_2$。

例 1.5 在图 1-3 所示电路中，设事件：$A_1=$“开关 k_1 闭合”，$A_2=$“开关 k_2 闭合”，$A_3=$“开关 k_3 闭合”，$B=$“灯亮”。

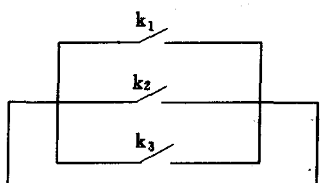

图 1-3

因为只要开关 k_1,k_2,k_3 中至少有一个闭合(包括 k_1,k_2,k_3 中仅有一个闭合;k_1,k_2,k_3 中任意两个闭合;k_1,k_2,k_3 三者都闭合),便有“灯亮”发生。这就是说,事件 B 是由事件 A_1,A_2,A_3 至少一个发生构成的。于是有

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

事件 A 与事件 B 之和如图 1-2 所示。从图 1-2 可看出 $A\cup B$ 包含事件 A,也包含事件 B,也包含事件“A 与 B 都发生”(A 与 B 的公共部分)。所以在运算中,不要忘记 $A\cup B$ 包含“由 A 与 B 同时都发生”所构成的事件。

2. 事件的积(积运算)

定义 1.7 由“事件 A 与事件 B 同时发生”所构成的事件,称为**事件 A 与事件 B 的积事件**,记为 $A\cap B$ 或 AB,如图 1-4 所示。

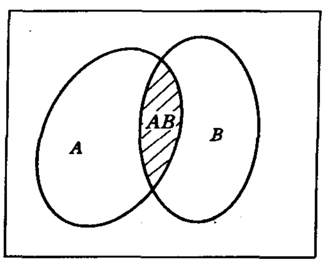

图 1-4

即
$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例如,$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{c,d,e,f\}$,$A\cap B=\{c,d\}$。

例 1.6 图 1-5 所示电路中,设事件 A_1=“开关 k_1 闭合”,事件 A_2=“开关 k_2 闭合”,事件 A_3=“灯亮”。

因为只有当开关 k_1,k_2 同时都闭合上,才有“灯亮”发生,于是有

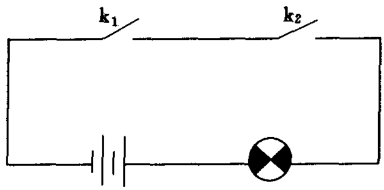

图 1-5

$$B=A_1\cap A_2$$

类似地，由“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”所构成的事件 B 称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \quad 或 \quad A_1A_2\cdots A_n$$

例如，设以 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别表示毕业班一位学生各门课程（n 门）合格，则 $B=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示该位学生门门课程都合格。

3. 事件的差（差运算）

定义 1.8 由“事件 A 发生，而事件 B 不发生”构成的事件称为**事件 A 与事件 B 的差**，记为

$$A-B$$

即 $A-B=\{x\mid x\in A 且 x\notin B\}$，同时，$A-B=A-AB$，如图 1-6 中的阴影部分。

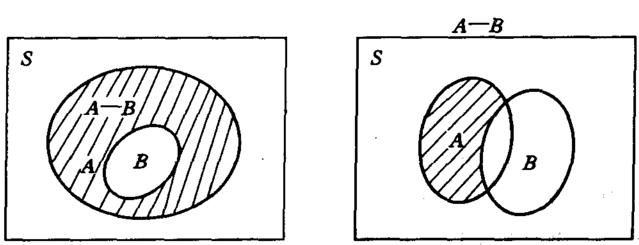

图 1-6